SHOUT
SHARE
IT

S. 1142 A.

MEMORIE

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA

TOMO XX.

FASCICOLO PRIMO

DELLE

MEMORIE DI MATEMATICA

S. 11-42.

MEMORIE

DI MATEMATICA E DI FISICA

DELLA

SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA

TOMO XX.

PARTE CONTENENTE LE MEMORIE DI MATEMATICA.

MODENA
PRESSO LA TIPOGRAFIA CAMERALE.
MDCCCXXVIII.

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

INDICE

DELLE COSE CONTENUTE NEL PRIMO FASCICOLO DELLE MEMORIE DI MATEMATICA DEL TOMO XX.

Elenco dei libri mandati in dono alla Società Italiana delle Scienze Pag. (9)

Elogio del Cavalier Giovanni Fabbroni scritto dal Segretario ANTONIO LOMBARDI 1.

La Teoria delle funzioni analitiche considerata ne' suoi principii e nella sua applicazione di PIETRO FERRONI. I.

Giunta facile a compimento della teorica del nuovo metodo di BUDAN per la risoluzione delle equazioni numeriche d' ogni grado DELLO STESSO 17.

Riflessioni analitiche sulla riduzione degli archi circolari ai Logaritmi immaginarii. Memoria di GIUSEPPE CALANDRELLI 45.

Esame dell'Osservazione del passaggio di Venere sul disco solare ec. di ANDREA CONTI ASTRONOMO 64.

Sul Teorema Guldiniano. Memoria del Prof. ANTONIO BORDONI 86.

Intorno alla latitudine di Modena. Memoria del Prof. GIUSEPPE BIANCHI 108.

Sulla teorica del moto composto. Memoria del Prof. GIUSEPPE ZAMBONI 148.

Sopra gli integrali definiti. Memoria del Cav. Prof. PIETRO PAOLI 161.

Sull' integrazione dell' Equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left(1-\frac{i(i+1)}{x^2}\right)y=0$$

DELLO STESSO 183.

Sulla Legge delle variazioni orarie del Barometro. Memoria di FRANCESCO CARLINI ASTRONOMO 198.

Sopra alcune proprietà dei piani dei momenti ec. Dell'INGEGNER GAETANO GIORGINI 243.

Sull' uso del calcolo delle differenze finite nella dottrina degli integrali definiti. Memoria del Cav. Prof. PIETRO PAOLI 255.

Sulla trasformazione delle formole integrali duplicate e triplicate. Memoria del Dottor GABRIO PIOLA 272.

ELENCO DI LIBRI

MANDATI IN DONO

ALLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA

dal 17. *Marzo* 1826. *in avanti.*

Tomo XXIX. Degli Atti della Reale Accademia di Torino. ivi 1825. in 4.°

Berruti Dottor Secondo. Saggio sulla vita e sugli Scritti del Professor Anton-Maria Vassalli-Eandi Segretario perpetuo della R. Accademia delle Scienze di Torino ec. ec. ivi 1825. ap. Pomba. in 8.°

Colla Aloysii Illustrationes et Icones rariorum stirpium quae in ejus horto Ripulis florebant Anno 1824. Addita ad Hortum Ripulensem Appendice.

Herschel J. F. W. Sulla separazione del ferro dagli altri metalli 4.° Londra 1821. *In lingua Inglese.*

—— Lettura Backeriana sopra certi movimenti prodotti nei fluidi conduttori quando trasmettono la corrente elettrica. 4.° Londra 1824. *In lingua Inglese.*

—— e Babbage C. Relazione della maniera con cui sonosi ripetuti gli esperimenti del Sig. Arago sul magnetismo manifestato da varie sostanze durante l' atto di rotazione. 4.° Londra 1825. *In lingua Inglese.*

Memorie della Società Astronomica di Londra T. II.° ivi. *In lingua Inglese.*

Pezzana Prof. Angelo. Continuazione delle Memorie degli Scrittori e Letterati Parmigiani raccolte dal Padre Ireneo Affò. Parte I. contenente la vita di Affò 4.° Parma 1825. presso la Ducale Tipografia.

Edwards G. J. Dell' influenza degli agenti fisici sulla vita.

Versione compendiata del Conte Paoli 8.° Milano 1825. Il Sig. Conte Paoli mandò questo libro in dono.

Pertsch Matteo. Saggio sulla proprietà e su gli effetti delle Volte, tratto dall'opera del Sig. Carlo Federico Meerwin traduzione dal Tedesco del suddetto Sig. Pertsch Architetto. 4.° Trieste ap. gli Eredi Coletti 1825.

Memoirs of the astronomical Society of London. Vol. I. Part. II. Londra 1825.

Goldoni Professore Antonio. Trattato sulla infiammazione 8.° Parte I. Modena per gli Eredi Soliani 1825.

Brera Cav. Valeriano Luigi. Prospetto clinico dell'anno scolastico 1824-1825. Padova 1826.

—— Annotazioni Cliniche sull' Oftalmia contaggiosa dei soldati. Padeva 1826.

Memoirs of the Astronomical Society of London. Vol. II. Part. I. London. 1826.

Brandes Enrico. Osservazioni sulle stelle cadenti esposte da molti Osservatori della Natura accompagnate dagli esami intorno alle medesime 8.° Lipsia 1825. ap. Barth. *In Tedesco.*

Brandes Henrici. Dissertatio physica de repentinis variationibus in pressione Atmospherae observatis 4.° Lipsiae Literis Stanzii 1826.

Donino Dottor Gio. Giacomo. Biografia Medica Piemontese 8.° Torino 1824. ap. Bianco Tomi II.

Colla Louis. Memoire sur le Melanopsidium nigrum des jardiniers 8.° Paris 1825. De l' imprimerie de Lebel.

Geromini F. G. Dottrina medica Bufaliniana compendiata e discussa. 8.° Milano 1826. ap. la Società dei Classici Italiani.

Ranzani Prof. Camillo. Elementi di Ornitologia, Parte 8.ª e 9.ª del T.° 3.° 8.° Bologna 1826. ap. Nobili e Comp.

Piazzi Padre. Del Reale Osservatorio di Palermo. Libri VII. VIII. IX. con appendice di Nicolò Cacciatore Direttor del medesimo, Socio della Società Astronomica di Londra, ec. ec. Vol. I. Palermo dalla Tipografia di Filippo Lolli. 1826. 4.°

De la Casa Professore Vittorio. Opuscolo analitico di Geodesia sublime. 8.° Vienna 1824. Dalla Tipografia di Carlo Gerold.

Bignardi Professor Domenico Alfonso. Memoria sull'Ernia diaframmatica. 4.° Modena 1827. presso la Tipografia Camerale.

Canella Dottor Giuseppe. Giornale di Chirurgia pratica. N.° 4.° an. 3.° Aprile 1827. Trento.

Tommasini P.re Giacomo. Della infiammazione, e della febbre continua Considerazioni patologico - pratiche. T.° 2.° Pisa presso Sebastiano Nistri. 1827. in 8.°

Memorie della Società Astronomica di Londra T.° II.° Parte II.

Verri Carlo. L'arte di coltivare i Gelsi tradotta in Francese dal Sig. Filiberto Fontaneilles Medico della Casa Bourbon Condè, ec. ec. 8.° a Lione 1826. regalato dal Traduttore.

Atti dell'Accademia R. di Parigi T.° V. e VI. Memorie dei Dotti stranieri. T. I. mandati in dono dall' Accademia suddetta.

Atti dell'Accademia Reale di Torino T.° XXXI.

De la Casa Professor D. Vittorio. Orazione per le solenni esequie dell'Abate Giuseppe Avanzini Membro del Cesareo Regio Istituto ec. ec. recitata nella Chiesa di Santa Giustina il giorno 19. Giugno 1827. Padova 1827. dalla Tipografia del Seminario.

Ampere M.r Marie André. Memoire sur quelques nouvelles propriétés des axes permanens de rotation des corps et des plans directeurs de ces axes. 4.° Paris. Chez Bachellier 1823.

—— Theorie des Phénoménes electro-dynamiques uniquement deduite de l' experience. 4.° Paris. Chez Méquignon-Marois 1826.

Poissons M.r Memoire sur la Theorie du Magnetisme en mouvement. 4.° Paris. 1826.

Santini Giovanni. Teorica de' Stromenti ottici. Padova 1828. Vol. I.° Tipogr. del Seminario.

Colla Aloysii Icones et illustrationes rariorum stirpium quae in ejus horto florebant anno 1826. — Addita ad hortum Ripulensem Appendice III.

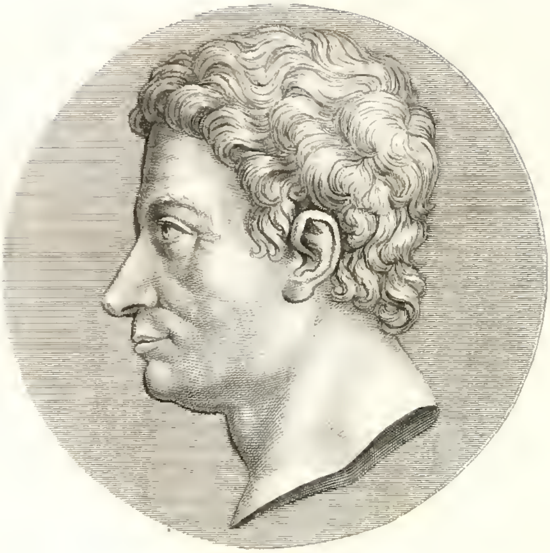
Consoni Canonico Taddeo. Nuovo sistema universale e completo di Stenografia Italiana 8.° Padova ap. li Fratelli Penada. 1826. con Tavole in rame.

Manfredini Dottor Gio. Battista. Sulle fasciature chirurgiche. 8.° Modena 1828. ap. la Tipografia Camerale.

Meneghelli Professore Antonio. Discorso inaugurale in circostanza che si pone nel chiostro dei RR. PP. Cappuccini di Padova una lapide alla memoria del P. Gio. Battista da S. Martino di Lupari. 8.° Padova 1828. Tipografia del Seminario.

Copie due mandate alla Società in dono dall'Eccellentissimo Sig. Dottor Filippo Scolari unitamente alli Signori Meneghelli suddetto, Giorgio Benomi, Consigliere Dottor Giuseppe Benatti, i quali hanno sostenuto le spese di detta lapide.

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY



Cavaliere Giovanni Fabbroni

ELOGIO

DEL CAV. GIOVANNI FABBRONI

SCRITTO

DA ANTONIO LOMBARDI

Non è raro il sentir uomini anche mediocremente istruiti nelle Lettere e nelle Scienze metter querela sulla inutilità di certi studii. E chi disprezza l' Antiquario che si logora il capo onde interpretar sigle, iscrizioni e monumenti; chi non riconosce nel paziente osservator del corso degli astri fuor di un soggetto che si pasce di vana curiosità, e che co' suoi calcoli getta tempo e fatica nel volerci segnare le tracce dei loro movimenti, nel fissar le epoche del ritornar che essi fanno all' orizzonte, e nel conoscere la forma il volume ec. di que' corpi maravigliosi che brillano sul firmamento, e che un perenne testimonio ci offrono della Divina Onnipotenza. Alcuni più severi ancora gridano al lusso nelle scienze, e limitar vorrebbero l' istruzione, quasi che il mondo morale ed il fisico non ci offrissero ognora nuova materia di meditazioni il primo, e di ricerche sperimentali il secondo, vantaggiose per più titoli oltremodo alle arti ed alla Società. Ben diversamente però la pensano quelli cui fu dato fin dai primi anni di loro gioventù il poter consecrarsi alla contemplazione di oggetti scientifici, e di conoscere i vincoli che in amichevole concordia stringono le scienze, al segno che quegli studj i quali più disparati sembrano fra loro, prestansi a vicenda mutui ed abbondevoli sussidii. Mentre infatti l' Astronomo prescrive allo Storico le regole della cronologia, ed al Teologo segna i limiti dei cicli pasquali, onde serbar l' ordine dovuto nella sacra Liturgia e nella celebrazione annuale dei più augusti Misteri, il Chimico presta al Filologo innocui reagenti per iscoprire gli antichi ormai spenti caratteri delle pergamene, all'Antiquario le norme per conoscer le varie leghe delle medaglie e monete, e somministra lumi e regole ai commercianti, onde evitare le frodi che rovinar potrebbero il loro traffico, e ai medesimi addita quali siano le merci di ottima qualità. Persuaso di questo Vero il Cavaliere Giovanni Fabbroni, rivolse suoi i studj a conoscere più scienze, e dotato di penetrazione non comune e di vasto ingegno, seppe utilmente applicarle ai bisogni della vita civile, anzi questo oggetto come il principale si propose delle sue letterarie fatiche. E appunto le moltiplici cognizioni da lui acquistate in diversi rami delle scienze specialmente naturali, il guidarono franco ora ad interrogar la natura con esito felice, ora a scuoprir nuovi arcani nelle scienze, ed ora ad arricchire di qualche utile invenzione il patrimonio scientifico che già possediamo.

Io mi accingo a scrivere l'elogio di questo Fisico illustre, e mi persuado che la narrazion semplice di quant'egli oprò e come Uomo di lettere, e come Uomo di Stato, basterà per comprenderne i meriti insigni, senza che mi sia d'uopo di mendicare dall' eloquenza i fiori del dire onde accrescerne la fama. Che se ci mancassero le prove a dimostrare quanto giovi a sviluppare i talenti, ed a procurar l'avanzamento delle scienze la protezione efficace e la munificenza dei Sovrani, il Cavalier Fabbroni ce ne offrirà un luminoso esempio, poichè di lui ragionando e ricordare dovendo i suoi lavori scientifici, non si può non encomiare ad un tempo il magnanimo Leopoldo Gran Duca di Toscana e poscia Imperadore d' Austria che il protesse, lo amò e il volle per sino compagno indiviso de' suoi studj.

Da Pistoja trasse origine la nobile famiglia Fabbroni, la quale essendosi in varj rami dal comun tronco distesa, alcuni se ne fissarono in piccol luogo della Toscana detto Maraddi, e da una di queste famiglie che diede già nella persona di Luca Fabbroni un primo Ministro alla Regina di Francia Maria de' Medici, sortì il Cav. Giovanni Valentino nato il 13. di Febbrajo dell' anno 1752. da Orazio Mattia e da Rosalinda di Adamo Werner Cittadino di Heidelberga nel Palatinato. Le scuole del Regio Arcispedale di S. Maria Nuova in Firenze somministrarono a questo giovane i mezzi più ampli onde istruirsi, come fece, ed essendosi in lui sviluppata una inclinazione possente per le scienze naturali, volle la propizia sua stella, che il magnanimo Leopoldo lo scegliesse a compagno del Fisico illustre Felice Fontana, che nel 1776. per Sovrano comando andò a Parigi onde acquistare macchine ed istrumenti fisici all'oggetto di fondare un magnifico gabinetto, che servir doveva all' istruzione dei Principi di Toscana. Quantunque giovane il Fabbroni, approfittar seppe di occasione così opportuna, e non tralasciò mezzo veruno per conoscere a fondo le scienze naturali, contrasse fin d' allora amicizia con i primi ingegni che in Parigi fiorivano, e legò con alcun d' essi amichevole corrispondenza scientifica che più non venne meno. Dimorava già egli da due anni in quella vasta Metropoli, allorchè l' Abate Fontana ricevette ordine dal suo Principe di trasferirsi a Londra per far nuovi acquisti al Gabinetto Fiorentino, che servir doveva alla Fisica non solo, ma ben anche all' Astronomia. Con quanto giubilo ricevesse simile notizia il Fabbroni, e quale premura ei dimostrasse di corrispondere alle sagge vedute di Leopoldo, argomentar lo possiamo da ciò che son per dire. Ignorava egli pienamente la lingua Inglese, e il tempo stringeva a partire; ma non si disanimò punto, e raddoppiando studio e fatica, riuscì ad impossessarsi in un mese del nuovo idioma così che lo scriveva correttamente, e con franchezza il parlava. Come a Parigi, così a Londra trovò favorevole accoglienza presso gli uomini più celebri di que' giorni; e pregiar si potè dell'amicizia di Banks, di Solander, di Magellano, dei fratelli Giorgio e Rinaldo Forster, e di Hunter, per tacere di più altri che a lui cortesi mostraronsi di lumi e notizie scientifiche.

Entrando quindi il giovane Fabbroni nelle idee del suo precettore il Chiar. Abate Fontana, e ben corrispondendo alle istruzioni da lui avute, colse l'occasione propizia da questo viaggio offertagli, e visitò con occhio filosofico le diverse miniere che abbondano in varii paesi di quell' isola; attentamente esaminò i metodi con maggior vantaggio impiegati nello scavarle; ed allorchè per singolar favore osservar gli fu dato le lavorazioni Inglesi, che la maraviglia formano dei viaggiatori, trasse non solo i disegni, ma costrusse ben anche i modelli delle macchine più pregevoli; e così dopo quattro anni di assenza rivide la patria ricco di un corredo di estese cognizioni che seppe all' opportunità utilmente applicare, come vedremo, onde promuovere il ben essere della Toscana. Mentre però il Fabbroni si istruiva, cercava ad un tempo di istruir gli altri, e sebben giovane, cominciò a figurare come autore, pubblicando nel 1780. a Parigi le sue riflessioni scritte in lingua Francese sullo stato attuale dell' agricoltura, ossia esposizione del vero piano per coltivare le terre. E convien dire che gli intelligenti favorevole opinione portassero di questo primo frutto dei talenti dell' Autor nostro, poichè due soli anni dopo ebbe il suo libro l' onore di una versione Tedesca a Berlino pubblicata da Rinaldo Forster viaggiator rinomato, e compagno dello sventurato Cook nel giro del mondo. A questo Scritto altro più esteso poi ne soggiunse il Fabbroni sullo stesso argomento, periodicamente ordinato, in cui fece soggetto delle sue ricerche l' agricoltura non solo, ma ben anche la pubblica Economia, la Fisica vegetabile e non pochi altri rami delle scienze naturali (1).

---

(1) Son costretto di limitarmi a brevi cenni su queste opere del Fabbroni, e lo stesso dovrò fare di non poche altre sue Memorie, poichè non mi è riuscito di poter avere sott' occhio se non che alcuni dei moltiplici suoi lavori i quali stamparonsi or quà or là, or si inserirono in varj Giornali, ed in altre opere periodiche.

Restituitosi egli a Firenze, la sovrana munificenza di Leopoldo non dimenticò i servigi da lui prestati, e il volle compagno al sullodato Fontana nel vigilare all' ampliamento del fisico teatro, per cui avevano essi ed a Parigi e a Londra acquistato macchine, strumenti e tutt' altro che occorreva onde formare un magnifico Gabinetto di Storia naturale e di Fisica, in cui nulla mancasse al Filosofo indagatore dei più riposti secreti della Natura. Ma piccola gloria per l' Autor nostro quella sarebbe di aver contribuito ad erigere questo santuario della Filosofia, se mostrare non lo potessi ancora come esperimentatore ingegnoso, e nelle scienze eccellente maestro. Tale però ce lo additano e le varie sue opere, e il nobile impegno a lui affidato di istruire nella Fisica i Reali Principi figli di Leopoldo, i quali raccoglievansi in questo teatro, e attenti pendevano ad osservare le sperienze del Fabbroni, e con piacere ne udivano i dotti ammaestramenti; nè i figli soltanto, ma il Reale lor genitore si piacea di intrattenersi più volte col Professor novello a ragionare sul gran libro della natura. Continuò il Cav. Fabbroni per anni venticinque a vegliare sopra questo celebre Gabinetto, come sotto-direttore; ed allorchè nel 1805. mancò di vita il sullodato Felice Fontana, non si esitò a nominarlo con onorevole rescritto successore al Defunto (1). Mentre però credevasi il Fabbroni di poter in pace godere il frutto de' suoi studj, e delle lunghe fatiche per lo spazio di circa 30. anni impiegate a vantaggio del sunnominato Reale museo, e per fondarlo, e per conservarlo nei più difficili tempi, e per ampliarlo ognora; mentre dissi, nutrir doveva il nostro Fisico così liete speranze dall' ultima distinzione al suo merito ben dovuta vieppiù avvalorate, soggiacque nell'anno appresso al peso di sinistre vicende, e spogliato si vide di così nobile impiego a lui cotanto gradito. A temprare però l' amarezza di un colpo così inaspettato giovò il pubblico voto, che riconobbe come un vero danno per le scienze l'allontanamento del Fabbroni dal Fiorentino museo, e nell' esprimere questi sentimenti si distinsero in particolare maniera i Dotti più rinomati dell' Accademia di Parigi; poichè indirizzarono essi una lettera in suo favore al Ministro Francese residente allora in Toscana (1). A cancellare poi dall' animo suo perfin la memoria di quest' onta, valsero se mal non mi appongo, le importanti commissioni a lui in appresso affidate, e delle quali più oltre dirò, giacchè or mi conviene retrocedere alcun poco dal cammino, in cui erami avviato per non interrompere la narrazione di quanto oprò il Fabbroni nel museo Fiorentino.

---

(1) Ecco le parole del Sovrano Rescritto in data 19. Marzo 1805. . . . . *Avuto altresì un benigno riguardo all' esteso credito e celebrità che in ogni ramo di fisica scienza gode l' attuale Sotto-Direttore, ed alle moltiplici prove da lui date di attività singolare e di attaccamento per il bene di questo Regno, ec.*

Le viste di pubblica utilità che dirigevano le operazioni del Gran Duca Leopoldo poscia Imperatore, lo determinarono a promuovere nei suoi dominii l' escavazione del carbon fossile, del quale abbondano alcune parti del suolo Toscano. Chiamò egli perciò in soccorso i lumi del Fabbroni, che esaminò diligentemente le cave di questo prodotto, stese un' opera intitolata *Dell'Antracite* a spese regie stampata, ed assecondando il magnanimo Principe le idee del Filosofo, propose un premio a incoraggiamento di questa lavorazione.

Ma tenue cosa può dirsi ciò a confronto dei tanti oggetti di pubblica utilità, che occuparono la penna dell' illustre nostro Fisico. E per ricordar soltanto i principali, volendo pur seguire un certo ordine, divideremo in classi gli Scritti sulle scienze naturali ch' ei pubblicò. L'Agricoltura e la Botanica ne formano la prima, l' Economia pubblica la seconda; alla terza spettano quei che trattano di Tecnologia; la Storia naturale poi, la Chimica suo studio prediletto, la Fisiologia e la Fisica formano gli altri quattro rami di scienze che somministrarono materia di dotte e copiose memorie al Fabbroni.

---

(1) I loro nomi sono Portal, Dejussieu, Fourcroy, Desfontaines, Lamark, Hauy, Geoffroy-S. Hilaire, Vauquelin, Thouin, Cuvier, Vanspaendonek, Lacepede. Presso di me esiste la copia di detta lettera.

Più sopra accennammo già due pregevoli sue produzioni di agricoltura; ma non furono queste le sole, poichè occupossi e nel far conoscere la coltivazione dei gelsi, e l' educazione dei bachi da seta secondo il metodo dei Chinesi, e istituì un giudizioso esame di uno scritto in Londra pubblicato dalla Camera di agricoltura, nel qual esame raffrontò i metodi di coltivazione in quel rigido clima usati con quelli del ridente suolo Toscano. Nè di tutto ciò pago, fece soggetto delle erudite sue ricerche l' economia agraria dei Chinesi, e trattò, direi quasi, di tutti gli oggetti utili che questa scienza abbraccia, o per introdurre nuove pratiche di agricoltura nel suo paese, o per correggerne i difetti, o per animare vieppiù l'industria degli attivi suoi concittadini. E siccome l'agricoltura nacque, può dirsi, col mondo, ed i sacri Codici depositarii delle più venerande memorie dell' Antichità ci tramandarono preziose notizie su quest' arte, così di esse il nostro Autore fece tesoro per una erudita dissertazione che lesse nell'Accademia dei Georgofili, e in cui esamina l' origine dell' arte agraria; ed appoggiato all' autorità immanchevole della sacra Bibbia, e chiamando in soccorso all' uopo quella di altri vetusti Scrittori, ne tesse brevemente la storia sino all' epoca tremenda della caduta di Gerosolima.

Uomo di Stato per lunga serie d' anni occupato in estese amministrazioni, cercò ognora il Cav. Fabbroni di migliorare la pubblica economia, di promuovere le arti, di introdur nuovi metodi di lavorazioni fra noi, e di schiantar certi pregiudizj da tempo immemorabile radicati nella plebe sempre mai ignorante dei proprii reali vantaggi. Le monete, i premii di incoraggiamento, l' equilibrio del commercio, l' annona, tutti questi rami della scienza economica, che ai nostri dì cresce e grandeggia con utili speculazioni, risvegliarono l' attenzione del nostro Autore. Fece egli perciò parte al Pubblico sin dal 1786. delle sue meditazioni su gli ardui problemi che incontransi nel fissare la lega, il valore e la proporzione delle monete, indi esaminò in genere il sistema monetario, e discusse l' altra non men difficile questione risguardante l' interesse eccessivo del denaro; e chiamando in sussidio la Fisica si accinse alle chimiche operazioni, onde aver mezzi per determinare il valore dell'oro coll'argento commisto; ben veggendo egli che la soluzione teorica di questo problema lasciataci già dal grande Archimede, soffre insigni modificazioni allorchè applicar vuolsi al caso concreto. Frutto di sue ricerche fu una copiosa tavola delle specifiche gravità di questi due nobili metalli dedotta dalla analisi delle monete di quasi tutta Europa, e spingendo poi anche più oltre le sottili sue indagini sulle antiche monete il Fabbroni, fissar potè un canone alla scienza monetaria oltre modo proficuo, cioè che il peso specifico non va d'accordo con la bontà, da cui la conseguenza ne trasse, che i fabbricatori di monete rende avvertiti ,, somma essere la difficoltà di fonderle tutte ,, a un dato titolo ad una data specifica gravità congiunto. ,,

La storia succinta di quanto operarono gli antecedenti Chimici per iscoprire la gravità specifica dei metalli insieme alligati, precede la suindicata Memoria; e questo metodo ben sovente usò il Fabbroni, metodo oltre modo giovevole a far progredire la scienza, poichè conoscendo noi le fatiche di coloro che ci precedettero nella carriera delle scoperte, evitar possiamo le inutili ricerche, e dirigere li nostri studii e le sperienze a fondar nuove conquiste nel vasto regno della natura. Più esteso lavoro chimico metallurgico ci presentò in appresso il nostro Autore sui metalli nobili, e ne fece una vantaggiosa applicazione alla Zecca Fiorentina: confrontò egli i metodi comunemente usati per la separazione delle particelle dell' oro e dell'argento dalle materie eterogenee, e a un diligente esame assoggettando le pratiche per ciò usate in

Germania, in America e fra noi, con la scorta delle esperienze sviluppò questo scabroso argomento per modo che l'Italia a lui andò debitrice di non pochi miglioramenti nello eseguire l'amalgamazione; metodo da lui anteposto a quello della fusione. Provò la zecca Fiorentina i felici risultamenti di questi studii del Cav. Fabbroni, poichè le macchine opportune da lui ivi introdotte produssero un risparmio notabile nelle spese della lavorazione, mentre questa riescì più spedita e diede buoni e ricchi prodotti.

Istruito a fondo siccome era il nostro Fisico nelle massime dei recenti Economisti, dar ne volle un saggio nella parte che risguarda la pubblica annona; ed allorchè la Toscana per breve tempo formò il patrimonio di una infelice Regina, scrisse questo Autore un' opera piuttosto voluminosa uscita nel 1804. sui provvedimenti annonarii, in cui appoggiato ai principii della scienza propose nuovi regolamenti per l' amministrazione delle Provincie del Regno Toscano, e bilanciando una discreta libertà con alcune massime di moderata restrizione, procurò di combinare il pubblico e il privato interesse. E dir conviene, che giovasse all'uopo quanto scrisse il Fabbroni, poichè ottenne egli il suffragio degli Economisti viventi, e provò la soddisfazione che si facesse una seconda edizione del suo libro, la quale tredici anni dopo la prima vide la luce. Se copiosi lavori non ci lasciò egli di Tecnologia e di Storia naturale, in que' pochi da lui condotti a termine si prefisse ognora lo scopo di giovare alla società. Le arti meccaniche infatti da lui ricevevano alcune nuove vernici e colori, mentre la storia della pittura all' Encausto davagli argomento di belle ricerche; nè sfuggivagli l' arte maravigliosa della incisione, ed insegnava agli amatori di stampe il mezzo di imbiancarle senza recar loro detrimento; istruì egli inoltre i dilettanti di libri rari a preservar questi preziosi avanzi della dotta antichità dal tarlo, ed a ristaurarli allorchè danneggiati. E mentre in queste materie occupavasi il Cav. Fabbroni, altri oggetti sommamente disparati trattava; e scorreva perciò con occhio indagatore i paesi dove una volta arsero Vulcani, ed arrichiva di note un' opera Inglese di mineralogia, ed alcune miniere nella Toscana esistenti con ogni cura esaminava e descriveva, onde risolvere la questione se con profitto dello Stato escavar si potessero.

Divideva così questo infaticabile Fisico il suo tempo tra le cure dello Stato, come più oltre vedremo, e le scientifiche occupazioni, offrendo a lui il vasto campo delle scienze naturali nuovi argomenti ognora e svariati, nei quali esercitava la versatile sua penna. Avvenne però a quest'Uomo insigne ciò che agli altri suoi pari avvien pure, di prediliggere cioè un ramo della scienza più che un altro, e di dedicarsi perciò con fervore più intenso a coltivarlo. La chimica occupò il primato negli studii del Fabbroni, ma la trattò egli per lo più, considerandone le applicazioni; nè si curò gran cosa delle teorie perchè incerte e tali che oscillano ognora, e al nascer dell' una l' altra ancor bambina sen muore. Mentre però il Filosofo osserva questo sorprendente fenomeno di continue teoriche varietà in Chimica, un altro più maraviglioso essa ne offre all' indagatore suo sguardo, quello cioè dei rapidi di lei progressi, la mercè dei quali si introdussero nel breve giro di pochi lustri tanti metodi nuovi di vantaggiose lavorazioni, e conobbersi non poche invenzioni dal comun voto già apprezzate. Questa importante considerazione rinvigorì, cred' io, nel Fabbroni il natural genio di procurare il bene de' suoi simili, e fece sì, che con maggiore energia si accingesse a maneggiare le varie sostanze che ci offrono i tre regni della natura, onde cercar di scuoprire nuove utili verità. Fece egli perciò soggetto delle sue particolari ricerche alcuni veleni, i varii metodi di tingere, e sopra tutto il difficile problema di fissare bene sui corpi i colori; più attentamente trattò, come già di sopra esposi, i metalli nobili, onde scuoprire il mezzo migliore per impiegarli nella monetazione, ed occupossi nell' esaminare seriamente l'azione chimica de' metalli in aspetto affatto nuovo considerata (1), del qual fatto la storia della scienza esige che io brevemente ragioni.

Agli Italiani Padre Beccaria, e Professori Galvani e Volta, nomi all' immortalità sacri, deve assai la teoria della elettricità, come tutti sanno; ma per amor del vero, e ad onor di Fabbroni osservar quì mi conviene, che fin dal 1799. spiegò egli le proprie idee intorno ai fenomeni del Galvanismo, ed i suoi pensamenti al dir dei Francesi stessi giovarono poscia (2) alla grande scoperta della Pila che a gloria del suo inventore testè rapito alle scienze si disse *Voltaica* (3). Nè parmi privo di fondamento questo titolo del Fabbroni per dividere in qualche parte almeno con Fisici così rinomati la riconoscenza dai posteri dovuta agli scuopritori di verità fisiche feconde di grandi applicazioni; poichè egli fin dall' epoca succennata così scriveva: *Convien supporre e credere che tra i metalli alcuni abbiano una data attrazione per il solo radicale idrogene, altri per il solo ossigene . . . . Che i metalli siano peraltro altrettanti esseri semplici, o altrettanti radicali purissimi, quali pare che si vogliano dai teoristi moderni* (si tratta dell' epoca del 1793.), *sono ben lontano dal potermene persuadere . . . . . Il magnetismo che si propaga a distanza, ed il principio che attira o con la presenza, o con l' accumulamento, o col moto le forze di due metalli dissimili per decomporre l' acqua, somiglierebbe in qualche caso per la proprietà suddetta, quasi più al fluido magnetico che al fuoco elettrico;* ed in queste ultime espressioni pare che trapeli come dalle risposte degli antichi oracoli qualche cenno dell' altra insigne scoperta, con cui il Danese Oerstedt aprì non ha guari un nuovo campo di amene ricerche ai moderni sperimentatori, cosicchè sembrami che l'Italia additar possa agli stranieri nel Cav. Fabbroni il precursore dei Galvani e dei Volta. E se più lunga vita gli avesse il Cielo donata, chi sa che ei gloriar non si potesse delle scoperte dal sullodato Fisico Danese fatte, mentre occupavasi il Fabbroni su gli ultimi dei suoi giorni a tentare nuove esperienze sulla Calamita e sugli effetti del magnetismo minerale: nè indarno, poichè le osservazioni sue erano feconde di verità luminose, e conoscer fecero alcune proprietà della Calamita finor sconosciute.

---

(1) Dell' azione chimica dei metalli nuovamente avvertita. Firenze 1793.

Sur l' action chimique des differens metaux entr'eux a la temperature de l' atmosphere et sur l' explication de quelques phenomenes Galvaniques 4.° Paris 1799.

(2) Bullettino della Società Filomatica di Parigi N. 29.

(3) Il Professor Alessandro Volta morì il 5. Marzo 1827. a Como.

Se io ho fin quì rapidamente parlato di non pochi scritti del nostro Filosofo, ciò far mi convenne oltre le ragioni già sopra addotte, per l'abbondanza delle cose che a sviluppare mi accinsi, e per la natura stessa degli argomenti da lui trattati, che non si piegano per se stessi a lunga esposizione, quando entrar non vogliasi decisamente in materia. Ma l'analisi della Quina, che inserì nei volumi della Società nostra a cui appartenne, (1) esige una narrazione più diffusa. Seguì egli in queste ricerche il metodo da lui quasi sempre usato, e fece quindi precedere la storia dei fatti antecedenti, e ci istruì in breve sulla scoperta di questa droga, ne distinse le varie specie, e ne assegnò con la scorta dei Botanici Spagnuoli i caratteri. La solubilità e l'attività variabile della Quina dalle analisi di Fourcroy e di altri Chimici determinate, furono soggetto di ulteriori indagini del Fabbroni, che mostrò quali conseguenze ora utili or dannose derivare ne possono nell'uso pratico. E vieppiù internandosi in così importanti disquisizioni, istituì egli le opportune sperienze onde esplorare l'attrazione rispettiva di varie specie di China per l'ossigene, e si condusse così a meglio conoscere alcuni dei principii che compongono la Quina, ed a fissare ad undici le sostanze varie distintamente separabili in essa, fra le quali tien luogo una materia vegeto-animale che la posteriore analisi di Fourcroy confermò. Dopo di avere così oltre spinte le sue ricerche, voleva pure il nostro Chimico sciogliere, direm così il nodo Gordiano, e spiegare come la Quina vinca portentosamente i mali periodici ma quì convenne anche a lui di arrestarsi. Se però la natura svelare non gli volle questo secreto, gli concesse tuttavia di trarre da così faticoso e lungo lavoro utili conseguenze per l' arte salutare.

---

(1) T. X. part. I. pag. 314.

Molto scrisse e meditò il Fabbroni, come da ciò che sin quì si disse argomentar puossi, ma pure sono ben lungi dall' aver io esposto tutto quanto egli nella carriera scientifica operò; ed a compiere il quadro delle sue produzioni mostrare lo dovrei Fisico valoroso non solo, ma distinto archeologo ben anche e scrittore di amena letteratura. Si occupò egli infatti nell'ottica, ed esaminò la forza refrattiva di alcuni fluidi, nella meccanica, e conoscer fece le bilance e stadere Chinesi, ed insegnò a trasformare in bilancia idrostatica ogni comune bilancia. La Cronologia da lui ricevette quello spedito almanacco in tavole per anni 50. avvenire calcolato, nell'uso assai comodo. La meteorologia fu arricchita, la sua mercè, di un nuovo Termometro stazionario ch' ei costruir fece a Parigi, e regalò ai Religiosi del Monte Cenisio, i quali nelle meteorologiche osservazioni se ne prevalsero con vantaggio. Curioso ed importante ad un tempo dir poi devesi un opuscolo di Chimica e di Antiquaria insieme, in cui il Fabbroni insegnò come fabbricar debbansi gli antichi mattoni galleggianti; nè limitossi egli in questa Memoria a figurar come semplice erudito, e a darci una ingegnosa sì ma sterile speculazione; poichè mettendo l'Autore a contributo le vaste sue cognizioni chimiche, costruir fece realmente mattoni di tal fatta, dimostrò in quali edifizj usar poteansi e non pochi Toscani cominciarono ad impiegarli in alcune fabbriche.

Allorchè nel 1802. sorse in Firenze una nuova Società detta *degli amatori della Storia patria Fiorentina*, le offrì il

Cav. Fabbroni una *breve storia sulla derivazione e coltura degli antichi abitatori d'Italia;* nel qual lavoro sviluppò egli specialmente le sue cognizioni di Archeologia. Ed in argomento simile si esercitò allorchè con coraggio affrontò il laberinto delle etimologie dei nomi dei popoli Celti, Osci, Iberi, Galli ec. perlocchè addottò un sistema particolare, derivar facendo dall' estremità orientale del Continente i primi stranieri che occuparono

„ . . . . il bel paese „
„ che Appenin parte, il mar circonda e l' alpi „

e preceder facendo l' incivilimento degli Etruschi a quello dei Greci, mentre spogliò questi di non poche invenzioni ad essi comunemente attribuite, da Etrusca origine le trasse. Io quì non discuterò se questo sistema esattamente combini con le antiche storie, e se perciò ritener si debbano secondo l' opinione del Fabbroni gli Etruschi come i primi conquistatori d' Italia, e così valorosi, che non la cedettero al dir di lui, in estension di Dominio ai Romani, e fondarono colonie, e sconfissero gli Argonauti; dirò bensì che risplende in questo Scritto l'erudizione e l'ingegno dell' Autore, e un ben chiaro testimonio esso ci offre della vastità delle sue cognizioni.

Esperto Chimico, buon Fisico, Agricoltor felice, Botanico e coltivator della storia naturale, leggeva sempre il Fabbroni nell' immenso libro della natura, ora svolgendone una parte ed or l' altra, e cercando sempre la verità onde accrescere il patrimonio della pubblica felicità. Non fa quindi maraviglia se un Uomo così ricco di lumi e dottrine mantenesse una estesa letteraria corrispondenza coi primi Dotti d'Europa, quali erano allora e Banks, e Magellano, e Adams, e Jefferson che edificò nelle sue terre in Virginia una casa per l' amico Fabbroni; e per tacer di tant' altri, ricorderemo i due Humboldt, Kirwan ed Ingenhouss, i quali tutti pregiaronsi di corrispondere col nostro Fisico Italiano. E a rendere viemmaggiore il nome e la fama di lui, concorsero non pochi Dotti Italiani e stranieri coll' indirizzargli le scientifiche loro produzioni, come tra gli altri praticò il Vannetti che nel 1778. scrisse una lunga lettera al Fabbroni sulla versione di Orazio pubblicata dal Corsetti, e l' Antiquario Francese Millin che a lui dedicò il secondo Tomo dell' Anno V. del suo magazzino Enciclopedico, e Sonnini e il Botanico Sig. Raddi col nome di Fabbroni chiamar vollero alcuni nuovi prodotti vegetabili da essi scoperti. Più di trenta Accademie o Società scientifiche lo onorarono chiamandolo nel loro seno, fra le quali ricorderemo soltanto le più celebri, quella cioè degli Antiquarii in Londra, l' altra della Scuola di Medicina in Parigi, l'Economica e l' Imperiale di Agricoltura di Pietroburgo, le Società Filomatica e Linneana di Parigi, e tutte le più cospicue d' Italia. Queste corrispondenze, e queste ben meritate ascrizioni accrebbero oltre modo la stima degli esteri verso il Fabbroni, che un bel testimonio ne ricevette dall' Imperatore delle Russie; poichè volendo questi nell'anno 1803. fondare una Università a Vilna, interrogar fece per mezzo del Principe Adamo Czartorinschi il nostro Italiano, affinchè proponesse non pochi Professori per le Cattedre nuovamente colà istituite, e contemporaneamente lo decorò col titolo di Professor Onorario dell' Università di Vilna (1).

Mentre però a conseguire il nobile scopo di giovare alla pubblica cosa consacrava questo Filosofo i suoi giorni alle scienze ed alle lettere, alla stessa meta dirigeva le sue cure come Uomo di Stato. Godeva egli, come già più sopra si disse, la confidenza del Gran Duca Leopoldo, il quale più volte si valse dell'opera sua e de' suoi consigli nel reggimento delle Provincie Toscane. Ed allor quando occupò quel Trono il Figlio Ferdinando III., non si limitò questi a consultarlo in affari dipendenti dalle scienze naturali, ma il volle ben anche legislatore, affidandogli nel 1793. sulle tracce del chiar.

---

(1) Nel Diploma inviato al Fabbroni leggonsi le seguenti espressioni. *Vir insigni eruditione et scientia conspicuus, multisque in lucem publicam editis operibus* ec.

Professore Lampredi la compilazione del Codice civile della Toscana; e pochi anni dopo per superiore disposizione dovette egli compilare un quadro della legislazione così detta *Leopoldina* per farne soggetto di studio e di imitazione ad altri popoli.

Filosofo profondo ed alla scuola educato di una lunga sperienza il nostro Fabbroni, allor quando soffrir dovette l'Italia sul cadere del Secolo XVIII. il dominio straniero, la più vigile prudenza regolò i suoi passi, e il credito da lui procuratosi gli conciliò ognora la stima dei varii Governi, che rapidamente l'un l'altro urtandosi succedevansi allora, finchè splendettero per l'Europa intiera giorni migliori. Il carattere ed i lumi suoi più chè altri capace il fecero di rendere segnalati servigi alla Patria; ed a ciò ognora pronto mostrossi specialmente nei tempi più difficili e burrascosi. Allor quando infatti le armi Francesi occuparono nemiche il Territorio Toscano, giovò l'opra sua non poco a temprare il rigor militare, ed a rendere men dura la sorte de' suoi Concittadini. Nè quì tacer io debbo, che la mercè sua Firenze conservò intatti almeno per alcuni anni in mezzo allo spoglio fatale d'Italia, il suo Museo, il Gabinetto di storia naturale, l'Accademia di Belle Arti, le pubbliche Biblioteche, e la Reale Galleria. Il veggiamo inoltre ritornare per comando del suo Principe nell'anno 1798. a Parigi a far parte della Commissione, che occupossi della sistemazione dei nuovi pesi e misure; e prevenuto dalla fama del suo sapere l'Istituto nazionale specialmente lo onorò, ricordando lui solo fra gli stranieri nel voluminoso rapporto presentato al Governo Francese sopra quest'arduo problema (1); e di così segnalata distinzione seco se ne congratulò per lettera (2) il suo Sovrano

---

(1) Ecco le espressioni dell' Istituto.
,, Il suffira de dire que Fabbroni de
,, Florence a été nommé pour que tout
,, le mond soit convèncu que ces ex-
,, periences ne pouvoient tomber en de
,, meilleurs mains, ni inspirer plus de
,, confiance ,,.

(2) La lettera porta la data del 3. Ottobre 1799.

Ferdinando III. che esule allora da' suoi Stati trovavasi a Vienna.

Ma il ramo di amministrazione alle scienze da lui coltivate più analogo quello era delle monete. Ben lo conobbero i pubblici Magistrati, e perciò nel 1803. affidarono al Cav. Fabbroni la direzione della zecca Fiorentina; e quì applicar ei seppe utilmente le sue cognizioni chimiche ed economiche, onde assieme conciliare l'interesse del Principe e quello del commercio. Migliorò egli il sistema di quella sempre complicata amministrazione, introdusse, come più sopra accennai, nuovi metodi onde ottenere scevri da materie eterogenee i metalli nobili; nei laboratorii della zecca prepararonsi la sua mercè i chimici reagenti necessarii ai diversi lavori, tal chè non deve più la Toscana ricorrere agli stranieri per simili oggetti; e con misure così ben calcolate rianimò quella pubblica officina, e riacquistar fece alla moneta d' oro di quello Stato il credito che era alquanto scaduto.

Non credasi però che il Cav. Fabbroni si limitasse a ben conoscere questo ramo di amministrazione pubblica; ma uomo universale, come già da principio accennai, dir si deve; poichè oltre gli altri affari da lui a pro dello Stato maneggiati, nei quali influiscono le naturali scienze, egli ci comparisce ora economista, ora politico, or militare. A lui in fatti vien commesso nel 1804. di salvare dai fulmini le torri del littorale Toscano e le polveriere con l' erezione di conduttori opportuni. A lui toccò di vegliare la pubblica salute quando sul cominciare dell' anno 1805. svilupossi la terribile malattia in Livorno, ed ei pur fece parte della Deputazione nominata dalla Regina Reggente al grand' uopo di sistemare le finanze, e rianimare il pubblico credito. E a tutte e così svariate incombenze compartiva l'attenzione sua questo abile Ministro, nè mai l'attività sua rallentavasi, anzi nell' agire nuovo vigore e lena maggiore acquistava.

Dopo d' avere la Toscana coraggiosamente lottato contro la procella che disperse gli Stati d' Italia, dovette pur essa ceder finalmente all' impeto della medesima, e quanto più tarda, tanto più fatale fu la sua rovina, poichè le toccò di far parte di un vasto Impero, dalla cui Capitale giaceva all' insigne distanza di più di 800. miglia. In mezzo però a così luttuose vicende qualche conforto provar dovette allorchè vide il Cav. Fabbroni, il quale andò nel 1808. Legislatore a Parigi per il Dipartimento dell' Arno, restituito nel 1810. all' Italia condecorato di onori (1), e della suprema Magistratura incaricato dei ponti e strade da Chambery in Savoja sino a Fondi nel territorio Romano. Collocato in così eminente grado, e involto perciò in tante cure, spiegò egli vieppiù i rari suoi talenti, e proseguir facendo i grandiosi lavori della superba strada sul monte Cenisio aperta, sotto il suo governo praticaronsi alcune rettificazioni, e si rese più comoda la salita su quegli ardui gioghi, e si procurarono ai viaggiatori ripari dalle bufere e dagli scoscendimenti di neve, la quale giù precipitando da quelle vette seco strascina qualunque ostacolo incontra. Sotto la direzione del Ministro Fabbroni videsi compito il magnifico ponte sul Pò all' ingresso della Città di Torino, e collocò egli la prima pietra di un altro simile edifizio sulla Dora, onde agevolare le comunicazioni con Milano; ed a lui pur devesi il merito di avere nel breve giro di cinque mesi creata intieramente una strada per il trasporto delle artiglierie sul Mont-Genevre, che più alto del Cenisio torreggia, strada che abbreviò di un giorno e mezzo il cammino da Lione a Torino. Nè sfuggirono alla sorprendente sua vigilanza i lavori che ad altri Dipartimenti Francesi di quà dall' Alpi occorrevano; e le strade ed i ponti della Toscana opportunamente risarcir fece, ed una nuova via cominciò egli che da Nizza costeggiando il mare si dirige a Sarzana.

---

(1) Ebbe l' Ordine della Legion d' onore, e fu nominato Referendario al Consiglio di Stato.

Chi considerar vorrà queste grandiose opere che in meno di un lustro compier fece il Fabbroni sotto un governo all' Italia straniero, in luoghi così fra loro distanti, e in tempi così difficili, perchè più aspra infieriva ognora la guerra, convenir meco dovrà che quest' Uomo unir seppe rare prerogative di animo e di mente onde combinar tanti diversi interessi, prevedere le difficoltà che incontrava sia rapporto ai progetti dell' arte, sia per dirigere la condotta di tante persone da lui dipendenti, e conciliarsi poi la benevolenza e la stima di coloro che in Francia reggevano la somma delle cose. Tutto ciò ei fece, e di maggiori onori ricolmo (1) il vide ritornare l' Italia nell' anno 1812. per riunirsi al Chiar. Conte Vittorio Fossombroni ora attuale Ministro e Segretario di Stato del Gran Duca di Toscana, all' importante oggetto di sistemare la confinazione tra il Regno d' Italia e l' Impero Francese. Mentre però trattavansi questi negozj di Stato, i destini del mondo volgevano a miglior ventura. Dopo che le armate del Conquistatore forse il più ardito che gli annali della Storia ci offrano, sostener dovettero nelle regioni settentrionali i duri colpi della militare fortuna, si sconvolse intieramente la gran macchina, e ruinò l' Impero Francese, laonde riacquistò la Toscana il naturale suo Principe nella persona di S. A. Imperiale Ferdinando III. che or essa piange estinto. Taluno per avventura vi sarà che considerando le cariche luminose dal Cav. Fabbroni sotto il Governo Francese coperte, argomento ne trarrà per giudicare con severità la sua condotta; ma sospenda pur questi il suo giudizio. L' amor della Patria, e il desiderio di giovare alla Società regolarono ognora li suoi passi, e siccome con integrità ad un sapere non ordinario congiunta servì egli e il Gran Duca Leopoldo, e la Regina d' Etruria, e l' Imperator Napoleone, così potè con animo tranquillo contemplare sempre le mutazioni di Governo a cui soggiacque l'Italia, e prestò ognora l' opera sua ai varii Dominatori della Etruria. Rincrebbe, è vero, ai Ministri Francesi il perdere un Uomo così distinto in ogni genere di cognizioni (1) e di somma attività e penetrazione fornito; ma egli bramò di restituirsi al suo Principe, e l' ottenne. Nè mancarongli nuove incombenze e nuovi onori, poichè a lui affidò il Sovrano la gelosa cura di vegliare sui nuovi Amministratori delle miniere Toscane, egli intervenne come arbitro nella difficile operazione di liquidare i crediti tra la Francia e il Gran Ducato; fece parte della Deputazione del nuovo catasto; riacquistò ben tosto nella restaurata Università di Pisa il grado di Professore onorario (2), e nel 1821. venne decorato del R. Ordine del Merito sotto il titolo di S. Giuseppe.

---

(1) Fu decorato dell' Ordine della Riunione col grado di Commendatore e fu insignito del titolo di Barone.

Condusse così questo Filosofo e Uomo di Stato una vita veramente operosa tra le cure del Ministero, e i diletti suoi studj da lui non mai intralasciati divisa; e di robusta complessione dotato sperar forse poteva di vedere l' età più tarda, ma colpito il giorno 17. Dicembre dell' anno 1822. da fiera apoplessia mancò rapidamente ai vivi (3), e venne così meno in lui un luminare della scienza, e un personaggio cui la Patria lungo tempo desidererà.

---

(1) Il Ministro Francese dell' interno così si espresse „ est ce qu'on vous „ a jetté des pierés en France? „ ed allorchè S. A. R. Carlo Filippo Luogotenente del Regno in quell'epoca con decreto 20. Aprile 1814. gli accordò la chiesta dimissione, nella lettera relativa del Ministro così egli si eprime „ „ Il m'est bien penible M. le Baron „ de vous voir eloigner. Dans tous les „ cas croyez que le Gouvernement aura „ present a la pensée les talens, le zele „ eclairé pour le bien public que vous „ avez toujours montré dans l'exercice „ de vos fonctions „ .

(2) S. A. R. si degnò di esprimersi nel *motu proprio* di questa nomina con le seguenti parole „ Avuto riflesso ai „ notorj servigj da esso resi alle scienze ed allo Stato „ .

(3) Il figlio dolentissimo per una così amara perdita gli ha fatto battere una medaglia in bronzo, nel diritto della quale vedesi l'effigie dell'illustre defunto, e dall' altra leggonsi le parole „ Alla tenerezza paterna e virtù „ l' amor figliale „ all' intorno poi quel verso dell' Alighieri „

Che notabili fien l' opere sue. „

La semplice narrazione che io feci di quanto egli oprò, onde promuovere le scienze naturali, ed applicarle ad oggetti di nazionale prosperità, deve a parer mio bastare per formare il carattere di quest' Uomo insigne, a cui la Toscana dovette in ogni tempo assai, poichè con le sue cognizioni scientifiche dilatò ne' Concittadini l' istruzione, gli ammaestrò alle buone arti, e introdusse così maggiore incivilimento in quelle già così colte Provincie. Col savio reggimento della pubblica cosa poi cercò ora i vantaggi di que' popoli; ora pronto riparò e sospese, o mitigò almeno le calamità che minacciavano la Patria; ora diede impulso a fondare nuove utili istituzioni, o a migliorare quelle già ricevute dalla Nazion Fiorentina. Ed allorchè maneggiar dovette sommi affari, dilatò, direm, così le sue viste, a più alto segno le diresse, ed abbracciando con la vastità dei talenti l'assieme delle cose, prevenne gli ostacoli o li superò; e con l' esempio e con la voce, e con gli scritti premendo e dirigendo, riuscì a condurre a termine gelosi negozj alle sue cure affidati; e nel pubblico voto di approvazione ottenne la più nobile ricompensa che un Uomo dotto ed un Reggitore di Stati deve far scopo precipuo delle vegliate notti, degli sparsi sudori, delle non interrotte sue meditazioni e degli assidui suoi studj (1).

---

(1) Ecco l' iscrizione composta dal chiar. Sig. Zannoni, e collocata alla tomba del Fabbroni nella Chiesa Curata di S. Maria a Casavicchia Potesteria di S. Cassiano.

IOANNI . HORATII . F. FABBRONIO . FLOR .

EQVITI . JOSEPHIANO . ET LEGIONIS . GALLIARVM . HONORARIAE

DOCTORI . EXTRA . ORDINEM . ACADEMIAE . PISANAE . ET . VILNENSIS

PRAEPOSITO . MONETAE . ITEMQVE . FODINIS . ET . FERRI . OPIFICIO

VII . VIRO . AEDIBVS . AGRISQVE . VECTIGALIBVS . RECTIVS . CENSENDIS

HOMINI . BENEFICO . COMI . RARISSIMO

QVI . INGENIO . VSVS . EST . PROMPTO . ET . SOLERTI

FACVNDIA . FLORVIT . ET . MVLTIPLICI . DOCTRINA

DE REBVS . PHYSICIS . DE ADMINISTRATIONE . PVBLICA . DE . COMMERCIO . SCRIPSIT

CIVIBVS . AEQVE . CELEBRATVS . ET . EXTERNIS

VIX . AN . LXX . M . X . D . IV . PIVS . IN . DEVM . PATRIAE . VTILIS . CARVS . OMNIBVS

DECESSIT . MATVRA . GLORIA . AN . MDCCCXXII . XVI . K . JANVAR.

LEOPOLDVS . PELLIVS . FABBRONIVS . PATRI . OPTIMO . DESIDERATISSIMO.

CVJVS . INTERITV . LITTERAE . ITALICAE . DAMNVM . FECERVNT.

TITVLVM . DAT . LACRIMAS . DVM . VITA . SVPPETET . DABIT.

ACCADEMIE ALLE QUALI ERA ASCRITTO

Il Cav. Fabbroni.

Istituto, ossia Accademia delle Scienze di Parigi.
Accademia degli Antiquari di Londra.
. . . . . . di Agricoltura di Parigi.
. . . . . . della Senna, e Oise.
. . . . . . del Commercio di Caen.
. . . . . . di Torino.
. . . . . . di Cagliari.
. . . . . . delle Belle Arti di Firenze.
. . . . . . Celtica di Parigi.
. . . . . . di Commercio ed Arti di Roma.
. . . . . . Di Economia di San Pietroburgo.
. . . . . . D' Emulazione di Cambrai.
. . . . . . Etrusca di Cortona.
. . . . . . Fiorentina per le lettere e la poesia.
. . . . . . dei Georgofili di Firenze.
. . . . . . di Bologna.
. . . . . . Jonica di Corfù.
Società Italiana dei XL. delle Scienze Residente in Modena.
Accademia Italiana per le Arti, Letteratura, e Scienze di Siena.
. . . . . . Italiana di Livorno.
. . . . . . Medicale della Scuola di Medicina di Parigi.
. . . . . . Medicale, Chirurgica, e Farmaceutica di Brusselles.
Academia Naturae Curiosorum d' Erlang.
Accademia Patriottica di Stockolm.
. . . . . . Filantropica di Emulazione di Prato.
. . . . . . Filomatica di Parigi.
. . . . . . Delle Scienze di Siena.
. . . . . . di varia Letteratura di Pistoja.
. . . . . . Reale di Lucca.

Accademia Linneana di Parigi.

. . . . . . Imperiale di Agricoltura di Mosca, cui fu ascritto un mese avanti la sua morte.

INDICAZIONE DELLE OPERE DEL FABBRONI

CLASSIFICATE PER ORDINE DI MATERIE.

I. AGRICOLTURA E BOTANICA.

Reflexions sur l' etat actuel de l' Agriculture, ou exposition du veritable plan pour cultiver ses terres etc. Paris 1780.

Della coltivazione del Gelso, e della educazione del Filugello secondo che si pratica dai Chinesi. Perugia 1784.

Dell' utilità dei prati artificiali. Firenze 1784. Napoli 1796.

Metodo di alimentare i vitelli con una mistura d' acqua di fieno e di latte 1787.

Dei sovesci col tabacco 1796.

L' Agricoltura, opera periodica, che comprende tutto ciò che concerne l' Agricoltura, pubblica Economia, Fisica vegetabile, Chimica, Veterinaria etc. Perugia 1784. al 1786.

Di alcune piante di frumento nate dai soli germi privati di perispermo. Firenze 1786. Napoli 1801.

Sul Geranio variegato. Firenze 1796.

Rapporto circa due scritti pubblicati dalla Camera di Agricoltura stabilita in Londra, nel quale viene a farsi un paralello tra l' Agricoltura Inglese e la Toscana. Firenze 1796. Napoli 1798.

Della moltiplicazione del pollame per mezzo del calore. Firenze 1796.

Coltivazione ed utilità delle Rape 1800.
Della Economia agraria dei Chinesi 1801.
Espedienti per distruggere i formicaj 1804.
Rapporto sul Problema „ Cercare per mezzo di esperienze esatte quale è l' influenza dell' aria, della luce, dell' acqua e della terra sulla vegetazione 1804.

II. ECONOMIA PUBBLICA.

Lega, valore, e proporzione reciproca delle monete. Firenze 1786.
Della prosperità nazionale. — Dell' equilibrio del Commercio, ed istituzione delle Dogane. Firenze. 1789.
Dei premi d' incoraggiamento che si retribuiscono alla mercatura. Dei privilegi esclusivi, che si accordano alle manifatture. Della libertà che si concede al commercio dei grani. Firenze 1791.
Lettera di Diego Lopez all' Autore delle lettere Spagnuole, ossia esatta idea del libro che ha per titolo „ Sentimento imparziale per la Toscana sopra la seta e lana. Firenze 1791. „
Sul sistema monetario di Napoli, e sulla moneta in generale. Napoli 1794.
Ozj della villeggiatura. Firenze 1800. (ne furono fatte due edizioni).
Dei provvedimenti annonarj. Firenze. 1804. 2.^{a} Edizione 1817.
Dell'eccessivo interesse del denaro, e della monetazione. 1805.

III. TECNOLOGIA.

Manifattura, conservazione e correzione dell' olio di oliva. Firenze 1787.
Incisione e tintura di alcune pietre dure. Firenze 1796.
Di una nuova tinta stabile che si può estrarre dall' Aloe soccotrino. Firenze 1796.

Esperimenti sul liquido estinguente di Knox. Napoli 1797.

Vernice atta a dare apparenza di Mahogams al legno comune. Napoli 1797.

Antichità, vantaggi, e metodo della pittura Encausta. Roma 1797.

Metodo facile per nettare, ed imbiancare le stampe in rame. Napoli 1797.

IV. STORIA NATURALE.

Memoria sopra i Volcani estinti. Firenze 1783.

Gabinetto Fisico di S. A. R. Firenze 1785.

Note all' Opera intitolata „ Essay toward a system of Mineralogy by Cronstedt. Londra 1788. „

Sopra la miniera di rame esistente nella Comunità di Arcidosso in Toscana.

Dell' Autractie o carbon fossile. Firenze 1790.

V. CHIMICA.

Sulla natura dell' arsenico, e preparazione dell' acido arsenicale. Milano 1780.

Nuovo metodo di fare il sale acetoso mercuriale 1796. Firenze.

Soluzione mercuriale per la tintura di seta e lana 1796.

Come si possa tingere con la filigine. Firenze 1796.

Sur l' action Chymique des differents mètaux entr' eux à la temperature de l'Atmosphére, et sur l' explication de quelques phénomenes Galvaniques. Paris 1799.

Metodo di sciogliere la resina elastica. Firenze 1781.

Metodo per stabilire sulla seta e lana i colori falsi. Firenze 1794.

Storia delle opinioni chimiche relativamente alla formazione degli Eteri. Firenze 1795.

Idea di un repertorio per i resultati di osservazioni, ed esperienze relative alle materie combustibili. Napoli 1795. Firenze 1796.

Ricerche sulla Quina. Modena 1803. Pisa 1804. Milano 1805.

Lo Statere Filippico, ovvero rilievi sulla bontà e titolo dell' oro-nativo. Siena 1808.

Raccolta di Opuscoli fisici, e chimici di Torberno Bergman tradotti in Italiano con aggiunte e note, sotto il nome di Giuseppe Tofani stampatore. Firenze 1787.

Del trascegliere dalle sostanze eterogenee le molecole d'oro e d'argento mediante l'amalgamazione. Verona 1815.

Della estrazione del glutine dalle ossa. Pistoja 1816.

VI. FISIOLOGIA E MEDICINA.

Tributo d'amicizia a Pierce Smith, ossia lettera sopra alcune novità fisiologiche, e specialmente sugli usi, ed efficacia del sugo gastrico, e sulla facoltà che hanno i vasi Succutanei di separare un fluido analogo al gastrico per distruggere le parti morte ec. Napoli 1796. e 1798.

Lettera di Giovanni Warm sopra alcune nuovità fisiologiche, e sulla analogia di effetto tra l'oppio, ed il sale ammoniaco.

Osservazioni circa un nuovo specifico contro la peste ritrovato da Baldwin Console generale d'Inghilterra per molti anni in Egitto. Firenze 1800.

Rapporto all'Accademia dei Georgofili di quanto viene riferito sul preservativo felicemente adoprato in Spagna contro il morso della vipera, e del cane rabbioso. Firenze 1802.

VII. FISICA E CALCOLO.

Sulla forza refrattiva di diversi fluidi. Firenze 1793.

Sur les Alcazzaras d'Espagne. Paris 1799.

Nuovo metodo delle decisioni alla pluralità dei voti. Firenze 1801.

$a(\pm n)^{m} + b(\pm n)^{m-1}$ +ecc. ecc.+φ, come deducesi dal Capo III.° §.° 34. altra volta citato. Quindi è che sono questi i *coefficienti* due estremi, cioè della prima parte a, e di tutte insieme accumulate le parti $a + b + c + d + e +$ .... $+ \varphi$ di tutta l' intiera somma, tra i quali estremi hanno da *interpolarsi* o inserirsi i valori q, r, s, t, ecc. di numero $m - 1$, che saranno nascenti, come vedremo, da più o men mutilate altre somme. Tutto è co' i due soli estremi nel primo grado $ax^1 + b$, giacchè diviene si per la ragione indicata sì mercè l'Equazione $ax + b = p\,(x - 1\,) + q$ di prim' ordine $= a(x - 1\,) + (a + b)$ senza niun altro intermedio. Seguendo la medesima indicazione pe' *Polinomj* di secondo e terz' ordine vediamo se apparisce adesso la *legge*, da applicarsi dipoi *per analogia* agli altri innumerevoli casi, e quindi la Regola *generale* esposta da *Budan*. A questo intento propongansi i due casi speciali dell' esponente $m = 2$, $m = 3$: le due Equazioni vengono ad essere, ripetuta per paragone ancora la prima, le scritte quì sotto coi loro soliti *coefficienti*.

$$ax^1 + b = p(x^1 - 1) + q,\ p = a,\ q = a + b$$

$$x^2 + bx^1 + c = p(x^2 - 1)^2 + q(x^1 - 1) + ,rp = a,\ q = \frac{2}{1}a + b, r = 2\ \frac{(2-1)}{1.2}\,a$$

$$+ \frac{2-1}{1}\,b + c = a + b + c$$

$$2x^3 + bx^2 + cx^1 + d = p(x^1 - 1)^3 + q(x^1 - 1)^2 + r(x^1 - 1) + s$$

$$p = a, q = \frac{3}{1}\,a + b,\ r = \frac{3(3-1)}{1.2}\,a + \frac{(13-)}{1}\,b + c\ ,$$

$$s = \frac{3(3-1)(3-2)}{1.2.3}\,a + \frac{(3-1)(3-2)}{1.2}\,b + \frac{(3-2)}{1}\,c + d = a + b + c + d;$$

i quali *coefficienti* (sempre di numero $m + 1$) tutti *indeterminati* si *determinano* alla foggia dei Cartesiani nella Teoria delle *Serie* mediante Equazioni *razionali* di primo grado, e parimente di num.° $m + 1$, e comparando i termini dove son e *potenze* eguali di x, precedenti dal disviluppamento di quelle, che al *Binomio* $x^1 - 1$ appartengono.

Dietro a questo primo saggio otterrebbesi pe'l grado quarto

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx^1+e=a(x^1-1)^4+\left(\frac{4}{1}a+b\right)(x^1-1)^3+$$

$$\left(\frac{4(4-1)}{1.2}a+\frac{(4-1)}{1}b+c\right)(x'-1)^2+\left(\frac{4(4-1)(4-2)}{1.2.3}a+\frac{(4-1)(4-2)}{1.2}b\right.$$

$$\left.+\frac{(4-2)}{1}c+d\right)(x'-1)^1+1\ \frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{1.2.3.4}a+\frac{(4-1)(4-2)(4-3)}{1.2.3}b$$

$+\frac{(4-2)(4-3)}{1.2}c+\frac{(4-3)}{1}d+e=a+b+c+d+e$: e generalmente per $ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+dx^{m-3}+ex^{m-4}+fx^{m-5}+\ldots\ldots+\phi$ $=p(x-1)^m+q(x-1)^{m-1}+r(x-1)^{m-2}+s(x-1)^{m-3}+t(x-1)^{m-4}$ $+v(x-1)^{m-5}+\ldots+\omega$, si ha $p=a$, $q=\left(\frac{m}{1}\right)a+b$, $r=\left(\frac{m.m-1}{1.2}\right)a$ $+\left(\frac{m-1}{1}\right)b+c$, $s=\left(\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\right)a+\left(\frac{m-1.m-2}{1.2}\right)b+\left(\frac{m-2}{1}\right)c+d$,

$$t=\left(\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}\right)a+\left(\frac{m-1.m-2.m-3}{1.2.3}\right)b+\left(\frac{m-2.m-3}{1.2}\right)c$$

$+\left(\frac{m-3}{1}\right)d+e$, $v=\left(\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5}\right)a+\left(\frac{m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.}\right)b$

$$+\left(\frac{m-2.m-3\ m-4}{1.2.3}\right)c+\left(\frac{m-3.m-4}{1.2}\right)d+\left(\frac{m-4}{1}\right)e+f$$

. . . .

$\omega=a+b+c+d+e+f+\ldots..+\phi$. Nè conseguenza sì fatta ed *universale* proviene a mio senso in sola forza di *analogia*. Conciossiachè unico è lo x^m da paragonarsi nei supposti *identici* Polinomj, due x^{m-1} del secondo da conguagliarsi con uno del primo, tre x^{m-2} del secondo, quattro x^{m-3}, cinque x^{m-4}, ecc., $(m+1)x^{m-m}$ da pareggiarli ad uno solo del primo, coi *coefficienti* di legge cognita e rigorosamente convalidata dagli Analisti nell'inalzamento a *potenze* di $(x-1)$, e con $m+1$ Equazioni semplicissime del prim'ordine per *determi-*

Diasiacrometro portatile, ossia Istrumento meteorologico per misurare la densità, e refrazione maggiore o minore dell' aria.

Dell' agricoltura del Popolo Ebreo.

MEMORIE DI MATEMATICA

LA TEORIA DELLE FUNZIONI ANALITICHE CONSIDERATA NEI SUOI PRINCIPJ E NELLA SUA APPLICAZIONE

DI PIETRO FERRONI

Ricevuta adì 28. Novembre 1823.

Al primo apparire della sublime Analisi degli Infiniti, elevata in aggiunta su i fondamenti medesimi dell'Algebra dei Finiti dal Matematico sommo Lagrange, cessarono incontinente tutte quelle dubbiezze, che intorno alla così detta Metafisica del nuovo Calcolo *differenziale* e *integrale* s' eran promosse sino dal suo nascimento, o imaginando ch' egli sorgesse e prendesse vita da evanescenti, infinitamente-piccoli, zeri, flussioni, o dai limiti di rapporti come a un dipresso gli concepirono mediante il metodo appellato *di esaustione* (1) gli antichi Geometri Greci, e sopra tutti il sottile Archimede. Quella nuova Teoria per ben due volte stampata risguardante alle *Funzioni Analitiche*, dalle quali ebbe nome (2), e di altre importanti osservazioni fornita quando l'Autore sedeva nelle Scuole Normali di Francia (3), fu oltracciò ripetuta in un Corso ordinato di *Lezioni* scolastiche, dettate ad uso d' insegnamento nelle Università e ne' Licei, la cui ristampa (4) ha riunito anche il Calcolo delle *Variazioni* deducendolo dall' origine stessa, mentre nelle prime *Memorie* di Scienze esatte negli Atti dell' Accademia di Torino (5) l' aveva esposto come una semplice diramazione del solito *Algoritmo* infinitesimale sotto diversa *caratteristica* avanti di lasciare l' Italia. Di queste *Lezioni* vuolsi ora dare appunto alcun cenno ponderandone pochi passi, rischiarandone altri, pochissimi tipografici difetti senz' emenda lasciando, ed instituendo qualche breve confronto coi miei anteriori divisamenti pubblicati nel *Prodromo* sopra il *Trattato di Calcolo Integrale* del Condorcet, e nell' Opera concernente alle *Esponenziali* e *Logaritmiche* Quantità *trascendenti*.

---

(1) Vedasi Lezione IX.ª a pag.ª 105-6, ove fa parola di Φi tra $F i$ e $f i$, cioè intermedia ai due estremi.

(2) *Théorie des Fonctions Analitiques* (prima Edizione dell'Anno V.° (1797); seconda del 1813.)

(3) *Séances des Ecoles Normales*, nuova Edizione in XIV. Tomi compresone uno di Tavole ossia d' incise Figure.

Onde disviluppare qualunque siasi *Funzione* di una *variabile* quando questa s' accresca o si scemi d' una grandezza omogenea finita e indeterminata, e disvilupparla in *Serie* secondo l'ordine delle *Potenze* ascendenti di quella grandezza, o aggiunta o sottratta, mediante le *Funzioni* derivate dalla primaria, derivate di derivate sempre coll' invariabile medesima legge, basta la sola Formula classica del *Binomio* di Newton. Imperocchè a giudizio chiarissimo di Lagrange, e in ispirito e in lettera, *si può sempre riguardare una espressione in Serie come il disviluppamento d' una espressione finita* o funzione; ed altrove soggiugnesi avvalorando l' istessa Massima universale, *quantunque queste equazioni siano in Serie, non ne sono perciò meno esatte le conseguenze, che se ne posson dedurre rispetto alle prime equazioni* (6) finite. Comecchè poi il profondo Analista medesimo siasi giovato col mezzo della Teorica generale ordinaria delle *Funzioni* adattata all'indole particolare delle *Potenze*, di dimostrar vera per tutti in genere gli *esponenti*, ed irrazionali o sordi in ispecie, la Formula Newtoniana, nulladimeno gli è stato indispensabile di ricorrere all' ajuto dell' *Analogia*, sempre dubbia e di prova non piena, quando vuole che il Principio innegabile, perchè pienamente provato a riguardo degli esponenti *razionali* ,, $a^m \times a^n = a^{m+n}$ sia l' unico sopra il qua- ,, le riposa, ed in cui possa dirsi che consista l'*essenza* delle ,, *Potenze*, qualunque valore si abbiano le quantità a, m, n, ,, nè potendo in numeri esprimersi gli *esponenti* ,, poichè *irrazionali*, *interscendenti*, *trascendenti*, ed *inesprimibili* giusta il vocabolo d' Euler. Difatto, posto il caso dell' esponente *sordo*, aveva poc' innanzi Lagrange prevenuto il Lettore con avvisarlo ,, che siccome ogni numero *irrazionale* può conte- ,, nere tra limiti tanto ristretti quanto si voglia mai, viene ,, a concludersi tutta di seguito la verità (della Formula ,, del *Binomio*) rispetto al valore di *m irrazionale*, poten- ,, dosene sempre a talento ristrignere o ravvicinare i limiti ,, *razionali*, e del resultamento sempre più diminuire l' er- ,, rore (7). ,, Aggiungasi che dopo d' avere quel gran Geometra stabilita l' assurdità di supporre assolutamente nulli i *differenziali* ,, poichè il loro rapporto riducendosi a *zero* diviso per *zero* non appresenta nessuna idea netta ,, scende a dire ,, che quelli Algebristi, i quali andando dietro ad ,, Euler concepirono e concepiscono come veri *zeri* i *diffe-* ,, *renziali*, e per conseguente il loro rapporto pari a quello ,, di *zero* a *zero*, stanno anzi in tutto il rigor dell' Analisi, ,, poichè una *Funzione* soddisfacente in genere alle condi- ,, zioni di un dato Quesito, qualora cangi di *forma* per un ,, caso particolare, non può cangiar questa giammai fuorchè ,, passando mediante lo stato di $\frac{0}{0}$; ciò comprovandosi da ,, più esempj ,, e specialmente nel passaggio dalle differenze

---

(4) *Leçons sur le Calcul des Fonctions* (Edizione seconda del 1806.)

(5) *Mélanges de Mathématique & de Physique de la Société Royale de Turin* Volume II.° 1760-61, edito nel 1762. L' argomento è ripreso nel IV. consecutivo a fin di respingere nominatamente gli attacchi di Fontaine tra le *Memorie* del 1767. dell' Accademia delle Scienze residente in Parigi.

(6) Lezione XII.$^{\text{me}}$ nelle pag.$^{\text{e}}$ 162-64-65 magistralmente.

---

(7) Così nella Lezione III.ª alle pag.ᵉ 16 e 17 discorre l' Autore.

finite reali alle *infinitesime* imaginate (8), su che appunto si regge „ la base del Calcolo *Differenziale* „ e le eccezioni o limitazioni appellerebbero unicamente ad un cangiamento di forma (9). Ed in ultimo luogo erasi espresso fin dal cominciamento del suo eccellente Trattato (10) facendo parola dei *limiti* delle grandezze, e d' Archimede, Dalembert, e Maclaurin a questo proposito, che una considerazione di tal natura, attinta in ispecie ai fonti della Geometria (peggio l' altra di Newton ricavata dalla Meccanica) parevagli „ Metafisica, se non contraria, almanco estrania allo spirito „ dell'*Analisi*, il quale non ne deve aver altra fuori di quella „ unica, che consiste nei *primi* principj e nelle prime operazio- „ ni fondamentali del Calcolo „ laddove poscia (11) invoca per le *Funzioni* del Circolo *derivate* la Geometrica *Sintesi* ed i Teoremi relativi al Cerchio prodotti dal Geometra di Siracusa.

In tale stato di cose, e queste premesse Massime ferme stanti, la derivazione delle Funzioni *secondarie* da sustituire agl' infinitamente-piccoli d' ogni grado, ed il *ritorno* alle *primitive* col mezzo inverso, dovrebbe a buon diritto retrotrarsi di qualche passo se mettesse conto determinare la vera Epoca della Scoperta. Computando difatti l' ordine cronologico all' istesso modo dell' egregio Scrittore della „ *Teoria delle Funzioni Analitiche* „ mentre gli piacque rivendicare l'Anno MDCCLV. a favore del proprio *Calcolo delle Variazioni*, di cui in vece sua Leseur e Jacquier avevano data ad Ender la prima pubblicazione (12) nei loro „ Elementi di Calcolo Integrale ,, dettati al Duca di Parma, dirci che nel MDCCLXXXII. (quindici anni innante della ,, Teoria delle Funzioni ,, predetta) all'effetto d'estendere il dominio del *Binomio* di Newton, ed accomunarlo con gli *Esponenziali* sotto l' istessa generazione, m' attenni al ragionamento medesimo di quei *limiti*, in fra i quali sempre più stretti (13) possiamo supporre indefinitamente un *esponente irrazionale* racchiuso : ed eccone le parole di Latino in Volgare trascritte dal Capitolo I.^{mo} (14) dell'Opera, il cui titolo *Magnitudinum Exponentialium, Logarithmorum, et Trigonometriae sublimis Theoria, nova methodo pertractata.* ,, Per ciò è manifesto dalla natura delle ,, Funzioni *continue* che differiscano ancora $(1\pm z)^{y\pm\omega}$, $(1\pm z)^{y}$,, tra di loro per un numero *inassegnabilmente piccolo*, ovvero ,, $(1+z)^{y'}$ da $(1+z)^{y}$, posti y, y' numeri razionali prossimamen- ,, te minore e maggiore d'un numero intermedio x, *irraziona-* ,, *le o trascendente* che sia. ,, Della qual'Opera, renduta anche notissima mercè dell' estratto spontaneo fattone dal Canovai nel Tomo L. (p.^{a} 147.) e LI. (p.^{a} 163). (An. 1783.) del ,, Giornale de' Letterati ,, che prima del MDCCC. stampavasi in Pisa, tutto il Capo II.^{o} ed il III.^{o} avanti d'ogni altro Libro o Commentario di Analisi algebrica sciolsero in *Serie* colla sola e consueta Formula del *Binomio* e direttamente ed inversamente gli *Esponenziali* di qualunque foggia, ed i *Logaritmi* d' ogni modulo o sistema che fossero, disviluppandoli di tal sorte che il preparativo scritto a pag. 17. nella III.^{a}

---

(8) Leggansi insieme i due squarci delle Lezioni I.^{ma} a pag.^{a} 1, e XVIII.^{ma} a pag.^{a} 318.

(9) Pag.^{e} 92-93 della IX.^{a} Lezione, ed altrove.

(10) Si veda alla pag.^{a} 2. la prima o preliminare Lezione.

(11) Pe'i *Seni*, *Coseni*, ecc. Lezione V.^{a} pag. 39 „...*on a ainsi les fonctions an-* „ *gulaires...*, *dont la propriété générale tirée de la nature du Cercle*, *est qu' etc.* „ Ed ivi alla pag.^{a} 42. „ *D'un autre côté. il est démontré rigoureusement par les Theoremes d' Archimede etc. etc.*

(12) Tanto racconta la *Histoire de Mathématiques* di Montucla alla pag.^{a} 354. Parte V^{a} .L. I.^{o} §. XXXIV. del Tomo III.^{o} stampato nel MDCCCII. Riscontrisi in fonte la lagnanza di Lagrange nel IV.^{o} Vol. delle precitate Torinesi *Mélanges*.

---

(13) Un' Opera di Apollonio a testimonianza d' Eutocio aveva per titolo Ωκυτόβοον, del qual Vocabolo non si sapea la significanza, (Nota (a) pag. 329. del Tomo VII.^{o}).
Il Problema XXXVI. delle *Quistioni Greche* parmi che illumini quella Voce — *Cur Eleorum mulieres Bacchum in sacro carmine hortantur ut* bubulo *pede ad ipsas accedat? — An quia....,* *aut* bubulo *dicunt pro magno? sicut* boopin *poeta dixit magnis praeditam oculis? etc.* Il significato si è dunque *Magna* (*maxima*), la *più stretta*, più accosta approssimazione, o serie *più presto* (Ωκυς) o più convergente (rispetto all' area del Cerchio, ch' era il tema dell' Opera Apolloniana).

(14) Numeri 8, 9, 10, e pagine 4, 5, 6. concordanti.

Lezione di Lagrange, e tutte le *Serie* inserite su tal subjetto nella IV. consecutiva (15), non che le deduzioni, hanno apparenza di copie tratte ciascuna dai due divisati Capitoli. Consimile è parimente l'accordo della splendida origine dei *Logaritmi*, cioè che ,, rispondano alle *Potenze frazionarie*, delle quali sia *infinitesimo* l'esponente, donde derivi che *infinito* novero di Logaritmi ad un istesso Numero non disconvenga (16) ,, perchè importa il medesimo della mia Formula $\left(1+\frac{x}{\infty}\right)^{\infty}=y$ ossia Num.° $=\left(1+\frac{\text{Log.}}{\infty}\right)^{\infty}$, e per ogni *modulo* Num.° $=\left(1+\frac{\text{Log.}}{\text{Mod.}\infty}\right)^{\infty}$, cioè $\frac{\text{Log.}}{\text{Mod.}\infty}=\sqrt[\infty]{\text{Num.}}-1$, diffusamente esposta e applicata (17), e nel Capitolo VIII.° eziandio ripetuta per passare dall' Algebra alla Geometria delle Curve (18). Il regresso delle due *Serie* dipendenti da $a^{x}=y$ è sì semplice, sì spontaneo, sì naturale che i passaggi dall' una all'altra Funzione (VII.ª delle c^{e}. *Lezioni*) non differiscono nell' una ed altr' Opera fuorchè in riguardo alle frasi. Senza uscir punto nè allontanarsi dal Newtoniano *Binomio*, l'istessa scorta conduce sola nella prima Opera divulgata delle due precitate a tutte le *Serie* diritte e rovescie della Trigonometria *Circolare*, ed anco dell'*Iperbolica* analoga di Moivre, e di Cotes innanzi di lui (19), nè si rivolge in niun conto a partire da Teoremi geometrici cambiando principii, ma all' incontro come altrettanti Corollarj qualificati, per applicarli alla risoluzione dei Triangoli sì rettilinei che sferici, gli tragge dal seno e dalle viscere dell' Analisi.

---

(15) Può farsi il confronto col gittar sulle pag.ᵉ 25, 26, 27, 28, e 29. un fugacissimo sguardo.

(16) Tanto dice nella pag.ª 73. l'ottava ,, Lezione ,, e si ripete il già detto più latamente a pag.ᵉ 34. e 35. nella IV.ª ,, Lezione. ,,

(17) Precitato Capo II.° Num. 60. a pag.ª 63., e *passim* nel prossimo susseguente.

(18) Sotto la forma di $v^{\infty}=y$ si legga nella pag.ª 509, e num.° 345.°

(19) È destinato a ciò il Capo V.°, che comincia dalla pag.ª 192. Num.° 151., e dee specialmente leggersi a pag.ª 197. Num.ⁱ 154-155, ed a pag.ª 266. Num.° 202. e successivi, ed oltre ai luoghi testè citati il Num.° 383. (pag.ª 575) del Capo IX.° o penultimo, dove campeggia e figura ancora di più la fecondità dell' istesso *Binomio*.

Dall' altra banda se pongasi mente all' equivalenza testè stabilita a tutti gli effetti d' ogni qualunque imaginabil *Funzione* a una *Serie*, il disvilupparla in questa, ed assegnare la legge delle *derivate* dalle *primitive Funzioni*, e indicarne le anomalie e per certi casi le fallacie e i difetti, divengono speculazioni analitiche, le quali immediatamente conseguitano dalle elementari proprietà del *Binomio*, non meno che i disviluppamenti delle *Equazioni*, perchè seguono questi l'istesso andamento delle *Funzioni* ricavandone le *derivate parziali* delle respettive *variabili*, supposte ad una per una le altre *costanti*. Quindi ne viene che l' edificio nuovo del *Calcolo delle Funzioni* si connetta tosto coll'Algebra dandogli solo, quando si voglia, per fondamento la *Formula delle Potenze*. E vaglia il vero, una *Funzione* $F(x)$ esposta in *Serie* (o finita o infinita) $ax^m + bx^n + cx^p + dx^q + ex^r + \text{ec.}$ e cambiata in $F(x+i)$, disviluppasi (per ottenerne il decremento od aumento $F(x+i) - F(x)$) in $ax^m + bx^n + cx^p + dx^q + ex^r + \text{ec.}$

$$+ (amx^{m-1} + bnx^{n-1} + cpx^{p-1} + dqx^{q-1} + erx^{r-1} + \text{ec.})\, i$$

$$+ \left(\frac{am(m-1)}{2} x^{m-2} + \frac{bn(n-1)}{2} x^{n-2} + \frac{cp(p-1)}{2} x^{p-2} + \frac{dq(q-1)}{2} x^{q-2} + \frac{er(r-1)}{2} x^{r-2} + \text{ec.}\right) i^2 + \left(\frac{am(m-1)(m-2)}{2.3} x^{m-3} + \frac{bn(n-1)(n-2)}{2.3} x^{n-3} + \frac{cp(p-1)(p-2)}{2.3} x^{p-3} + \frac{dq(q-1)(q-2)}{2.3} x^{q-3} + \frac{er(r-1)(r-2)}{2.3} x^{r-3} + \text{ec.}\right) i^3 +$$

$$\left(\frac{am(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4} x^{m-4} + \frac{bn(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} x^{n-4} + \frac{cp(p-1)(p-2)(p-3)}{2.3.4} x^{p-4} + \frac{dq(q-1)(q-2)(q-3)}{2.3.4} x^{q-4} + \frac{er(r-1)(r-2)(r-3)}{2.3.4} x^{r-4} + \text{ec.}\right) i^4 + \text{ecc.} + \text{ecc.}$$

vale a dire $F'(x+i) = F(x)$ (Funzione *primitiva*), $+ F'(x)i$ (essendo $F'(x)$ la prima *derivata* di $F(x)$), $+ F''(x)\frac{i^2}{2}$ (essendo

$F''(x)$ la prima derivata di $F'(x)$ e seconda di $F(x)$), $+ F'''(x) \frac{i^3}{2.3}$ (essendo $F'''(x)$ prima *derivata* di $F''(x)$ seconda di $F'(x)$ e terza di $F(x)$), $+ F''''(x) \frac{i^4}{2.3.4}$ (essendo $F''''(x)$ prima *derivata* di $F'''(x)$ seconda di $F''(x)$ terza di $F'(x)$ e quarta di $F(x)$), + ecc. ecc. e così proseguendo: il che torna in generale l'istesso di $F(x+i)=F(x)+F'(x)\frac{i}{1}+F''(x).\frac{i^2}{1.2}+F'''(x).\frac{i^3}{1.2.3}+F''''(x).\frac{i^4}{1.2.3.4}$ + ec. ec. colla medesima forma, disposizione, dependenza o avvicendamento uniforme, segni e termini da Lagrange adoprati, o coi simboli *equivalenti* del *Calcolo differenziale* innanzi di lui significati da Taylor. Questa concatenazione scambievole e classica di *derivate* consecutive, le quali, perchè sempre soggette alla medesima legge, tutte unicamente dipendono dalla prima, giova osservare che riguardo al conoscerla potrebbe con tutta ragion riportarsi al tempo di Wallis, e poscia sino a quando si seppe che le *circolari* Funzioni, le *iperboliche* o logaritmiche ed altrettali *trascendenti* scioglievansi in *Serie* (e dirette ed inverse), infinite pe 'l numero dei lor termini e composte di tali di questi, che contenessero o fosser capaci di esser ridotti a contenere *Coefficienti* costanti e *Potenze* della variabile. Sta poi e dee stare per essenzial' indole sua sempre ferma quella discendenza mirabile, e di tanta chiarezza delle *generate* Funzioni, caso chè ancora nè si conoscessero *in effettivo* le grandezze de' *Coefficienti* nè l' ordine o grado del progredimento delle *Potenze*. E colla massima evidenza si scorgono posti facilmente a contatto i due estremi di quella elegante e ad un tempo utilissima catena analitica nelle più astruse investigazioni dell'Algebra sì pura come applicata: imperocchè nell' ipotesi di $i=0$ manifestissima cosa è aversi la $F(x)$ data Funzione *primitiva*, da cui si parte, e viceversa nella supposizione contraria di $x=0$ consegue lo disvilupparsi di $F(i)$ in $F(i)+F'(i)\frac{i}{1}+F''(i)\frac{i^2}{1.2}+F'''(i)\frac{i^3}{1.2.3}+F''''(i)\frac{i^4}{1.2.3.4}$ + ecc., dove nella *primitiva* e nelle *derivate* tutte F, F', F'', F''', F'''', ecc. facciasi $i=0$ (come sarebbe per la stessa ragione di F(x) mutato i in x e nelle *Funzioni* singole fattosi $x=0$): tipo universale della conversione in *Serie* delle *Funzioni* per mezzo delle *Potenze* della variabile, di cui son quelle composte (20). Riesce agevole averne tosto l'esperimento adattando la Formula generale, in ragion d'esempio, o al Trinomio $a+bx^m+cx^n$ (supposto l'*esponente* $m<n$), o al Rotto $\frac{a}{b+x}$: nel primo caso facendo quanto alla *Funzione primitiva* e sue *derivate* sempre $x=0$, s'annullerebbero tutti i termini intermedj delle *Serie*, e non si otterrebbe che l'identico ritorno del dato *Trinomio*, come parimente egli è chiaro in ogni altro *Polinomio* ben guardando i termini disviluppati, quali sono nel superiore ed universale contemplato poc'anzi, ove restano i soli effettivi $ai^m+bi^n+ci^p+di^q+ei^r+$ ecc., vale a dire la *Serie* già data per le *potenze* di x rappresentato adesso da i: nell'altro caso genererebbesi la consueta *Serie infinita*. Appariscono gli stessi numeri, le istesse leggi, le *derivate* medesime sin dalla cuna e dai familiari Elementi del Calcolo *Differenziale* e *Integrale* (21) palesandolo apertamente le *Serie* conosciutissime $\int Xdx = X\frac{x}{1} - X'\frac{x^2}{1.2} + X''\frac{x^3}{1.2.3} - X'''\frac{x^4}{1.2.3.4} +$ ecc. e tanto la diretta quanto l'inversa

$$\int ydx = C + y\frac{x}{1} - y'\frac{x^2}{1.2} + y''\frac{x^3}{1.2.3} - y'''\frac{x^4}{1.2.3.4} + y''''\frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{ecc.}$$

$$\int xdy = C + x\frac{y}{1} - x'\frac{y^2}{1.2} + x''\frac{y^3}{1.2.3} - x'''\frac{y^4}{1.2.3.4} + x''''\frac{y^5}{1.2.3.4.5} - \text{ecc.}$$

---

(20) Maestrevolmente in ugual modo dai suoi principj lo conclude Lagrange. (Lezione IX.ª pag. 104, XV.ª pag.ª 223., ed insieme col *limite* Lez.ᵉ IX.ª c.ª pag.ª 105, Lezione XII.ª a 160, ed altrove.)

(21) Si consultino *Leçons élémentaires de Mathématiques par Lacaille*, *nouvelle Édition par Marie etc.*, 1770. alla pag.ª 374. N.° 917., e 387. N.° 948. Fig.ª LVI.

ove splendono come *perpetui* i numeri e i simboli dell' elevazione a Potenze.

Quanto appunto il *Binomio di Newton*, ancora a parere del cospicuo Scrittore medesimo della *Teoria delle Funzioni Analitiche*, poteva essere senz' altra prova il Principio unico, su cui fondare il disviluppamento generico delle *Funzioni*, altrettanto sino dal tempo che toccò l' Italia il ,, Trattato di Calcolo Integrale ,, del Condorcet, stampato nel MDCCLXV. a Parigi, m' eccitò immantinénte l' idea che le *Equazioni* così dette *di condizione* dell' *integrabilità*, quelle dei *Massimi* e *Minimi* o del Problema degl' *Isoperimetri* preso nella maggiore estensione, ed il Calcolo stesso delle *Variazioni* sì celebre riconoscer dovessero per prima origine loro la gran mente di Leibnitz, e soprattutto il ,, Commercio Epistolare ,, tra lui e Giovanni Bernoulli. Questa proposizione avanzai, appoggiata ad irrefragabili documenti, nel *Prodromo* pubblicato nel V.° Volume degli ,, Atti e Memorie della Società Italiana delle Scienze ,, coi tipi di Verona e colla data del MDCCXCI. (22), del qual *Prodromo* diede sollecita e puntuale contezza il Pessuti nel Num.° XIV.° delle ,, Efemeridi Letterarie di Roma ,, dell' istess' Anno. Ma rimanevano a farsi alcune poche Osservazioni più storiche che analitiche, le quali erano prevedute, promesse, e guarentite nel titolo o vocabolo PRODROMO delle prime; e queste si richiamano adesso dall' affinità dell' argomento, intorno a cui si aggirano le due ultime *Lezioni* di Lagrange vigesima prima e seconda, ch' ei dice (23) notevolmente schiarite, simplificate, e accresciute dopo della stampa anteriore, contuttochè è non abbia riempiuto il vuoto di citazione nel rammentare pe' i *Maxima & Minima* Apollonio di Perge, che ricordava il risorto e più fornito per avventura V.^{o} Libro delle *Coniche* Greche sotto la penna Latina del *Geometra Fiorentino* Vincenzio Viviani (24).

---

(22) Tanto il *Testo* quanto le *Note* comprendon le pagine da 130. a 162. della stampa.

(23) ,, Dans cette nouvelle Édition on ,, a retouché plusieurs endroits pour y ,, mettre plus de clarté et de simplicité, et on a inséré differentes additions dont les principales se trouvent dans les *Leçons* dix-huitième, ,, vingt-unième et vingt-deuxième ,,.

In aggiunta all' ultima delle tre divisate diramazioni d' Analisi veramente suprema non doveva tacersi, che i fondamenti ancora della sottile Teoria delle Equazioni chiamate *singolari* o Soluzioni *particolari* nel Calcolo Integrale, come pure le differenze nominate *parziali* ebbero dopo il Saggio del MDCXCIV. negli „ Atti degli Eruditi di Lipsia „ (25) il vero lor nascimento nel MDCXCVII., ove le Pistole da Leibnitz indiritte a Bernoulli favellano del *parametro* variabile *De Curva in Curvam*, che appunto è il subjetto delle sagacissime indagini di Lagrange nelle XIV.^{a} XV.^{a} e XVII.^{a} dell' aureo Corso delle dettate *Lezioni*.

L'algoritmo *De Curva in Curvam* lo appresentavano espressamente queste quattro Voci Latine: e' non era se non che il calcolo stesso degl' infinitamente-piccoli, distinto dall' ordinario vertente *intorno ad una medesima Curva* col delta δ minuscolo, invece del *d* corsivo Romano; e tanto ciò si manifesta esser vero quantochè in leggendo il modo, col quale Lagrange nella XXII.^{da} ed ultima delle *Lezioni* a confronto della XXI.^{ma} (26) rende ragione dell' *uniformità* della Formola ricavata in Equazione per mezzo della caratteristica *d* Leibnitiana all' uopo di stabilire le *condizioni d' integrabilità*, e dell' altra dedotta col segno δ onde determinare i *Massimi* e *Minimi*, lo avverte in termini puntuali. Io avevà scritto nel *Prodromo* del MDCCXCI. (27) l' Equazioni „ (procedenti dal *differenziare* o *variare* $\int V = \int\int dV$), cioè

---

(24) Pag.^{a} 424. Lezione XXI.^{ma} — *Divinatio in quintum Conicorum etc. Florentiae* MDCLVIII.

(25) Vedasi a pag.^{a} 263. la *Lezione* XVII.^{ma}.

(26) Sono insieme portate le Prove a pag. 449-50 d'Euler, Condorcet, e Lagrange (onorevolissimo triumvirato nei Fasti delle Facoltà Matematiche!)

(27) Articolo III. §. 4. pag.^{a} 158.

„ $$d\iint \begin{matrix} \mathrm{N}dx+\mathrm{P}\,dp+\mathrm{Q}\,dq+\mathrm{R}\,dr+\text{ecc.} \\ +\mathrm{N}'dy+\mathrm{P}'dp'+\mathrm{Q}'dq'+\mathrm{R}'dr'+\text{ecc.} \end{matrix} = 0,$$

$$\delta\iint \begin{matrix} \mathrm{N}\,dx+\mathrm{P}\,dp+\mathrm{Q}\,dq+\mathrm{R}\,dr+\text{ecc.} \\ +\mathrm{N}'dy+\mathrm{P}'dp'+\mathrm{Q}'dq'+\mathrm{R}'dr'+\text{ecc.} \end{matrix} = 0$$

„ hanno da essere le medesime e della medesima forma tanto „ nel caso che ∫V sia integrabile (determinata), quanto nell' „ altro che non lo sia; perchè nella risoluzione generale del „ Problema del *massimo* o *minimo* l' Analisi non risguarda, „ nè deve mai risguardare se ∫V sia Funzione integrale de„terminata o piuttosto un integrale indefinito (indetermina„to) „ o indicante la relazione tra le variabili, nel quale secondo caso l'Equazione (come avvertii nella *Nota* (*a*)) *ne doit être identique* a pari del primo giusta la frase anfibologica di Condorcet. Si esprimeva della maniera seguente Lagrange (l. c.) nel MDCCCVI. dopo interi tre lustri „ L' É„quation générale $\mathrm{N} - \mathrm{P}' + \mathrm{Q}'' - \mathrm{R}''' + \text{ecc.} = 0$ que nous „ venons de trouver pour le *maximum* ou *minimum* de la „ fonction primitive de V est, comme on voit dans la Le„çon précédente, la même que celle que nous avons trou„vée pour l'existence de cette fonction, indépendamment „ d'aucune rélation entre les variables. On voit maintenant „ la raison de cette *identité* des formules *par la conformité „ des operations analytiques dans les deux cas* „ ma l' Equazione fuori del caso del *massimo* o *minimo* „ ne doit „ plus donner de rélation entre *x*, *y*, et par conséquent „ doit se vérifier d'elle même „ come sopra.

Oltre a questa coincidenza perfetta di forma, ma di senso e sostanza affatto diversa, o poco avanti o poco dipoi (28) che Lagrange avesse tra le *Memorie* dell' Accademia di Torino *trouvé* (son le sue stesse parole (29)) *la maniere de plier le calcul différentiel à ce genre de problêmes, qui sont essentiellement de son ressort* (intende dell' ardue indagini in replica alle disfide scambievoli, che si facevano a gara *per sola onoranza* i Geometri e gli Algebristi verso la fine del Secolo XVII.^{mo}, fra le quali un dei primi PROBLEMI (nel MDCXCIII.) apparì il Bernoulliano della Linea *oligocrona* o *brachistocrona* (30)) m' avvenne d' imbattermi in un resultamento di Calcolo, che giudicarono alcuni aver sembianza di *paradosso*, altri essere un vanitoso giuochetto, od abbaglio. In sul terminare del *Prodromo* supponendo un Grave, il qual dalla quiete scendesse da punto a punto determinato nel vuoto, sì nell' ipotesi della gravità costante, sì in quella del Baliani o qualunque altra che mai si fosse, accomodai il Calcolo solito e la *caratteristica* data da Leibnitz alla inversion della Linea, in cui si farebbe la più pronta discesa; e salvo la differenza del *segno* trovai l' arco della Cicloide ordinaria nel primo caso, e del Circolo nel secondo. Dell' esito di questo *saggio*, che in vece di sciogliere il Problema, come dovevasi, per mezzo del *δ de Curva in Curvam*, ingenerava col d, ma col *segno* contrario, la medesima *brachistocrona*, mi nacque pensiero di rintracciare sì del *diritto* che del *rovescio* il motivo *analitico* colla comparazion dei due metodi conducenti a ± la stessa espressione. Protestava però nel periodo *penultimo* esservi la contrarietà dei due *segni*. — ,, La sola diversità, che si trovi, consiste nell' essere il secondo membro ,, dell' equazione *positivo* in un caso, e *negativo* nell' altro ,, ,, e di più ,, lo che appare ancora dal paragone del *Cor-* ,, *raggio* trovato in questo §.° coll' altro trovato nel §.° an- ,, tecedente ,, —. A malgrado di tutta questa chiarissima e raddoppiata avvertenza surse rumore non solamente tra Scrittori anonimi per l' Italia, che presto finirono col riprodurre a stampa l' *omesso* periodo (31), ma ancora fra quei pusilli, i quali nulla sapendo d' Algebra, nemmeno sapevano il nome o titolo della quistione nè cosa fossero *Isoperimetri* maneggiati nell' Algebra *superiore*.

---

(28) *Annotazione* (C) Art.° 6. pag.ª 159. del PRODROMO.

(29) *Il restait donc etc.* pag.ª 437. della XXI.ᵐᵃ „ Lezione „.

---

(30) Giova credere che, sebbene non corretto, sia corso error tipografico nella Parola *bracristocrone* a 489. della ,, Lezione ,, finale dell'esimia *Théorie* suddivisa in Lezioni ad uso di Scuola.

(31) Memoria diretta agli Amatori del Vero ecc. ,, MDCCXCI. senza data di luogo (Lucca), ove questo Fatto si legge a pag.^{a} 20. nell' Articolo XII.

Del resto nella mia analisi *comparata* partiva dalla formula elementare (32) $\frac{m}{n}y=\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$, che posto dx costante (o viceversa mutato y in x), se $n=1$, $m=2$, appartiene alla Cicloide, e se $m=1$, s' aspetta al Cerchio. E la spiegazione agevole della concordanza d' amendue le *litterali* combinazioni derivava dal *differenziale* impostato col d in un caso $d\left(\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{x}}\right)=0$, $d\left(\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{x}\right)=0$ nell' altro; laddove il *differenziale* col δ di Lagrange nel primo $\delta\left(\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{dx^2+dy^2}}\right)=0$, $\delta\left(\frac{1}{x.\sqrt{dx^2+dy^2}}\right)=0$ in riguardo al secondo, esposti da lui (33) col simbolo o accento delle *derivate* Funzioni $\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{x}}=C$, e così l'analogo $\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}.x}=C$, equivalente l'ultimo a $\frac{1}{\sqrt{dx^2+dy^2}.x}$, perchè non x' ma y' diventa 1 quando y' si vuol fare come sopra costante o termine di rapporto, ed a $\frac{1}{\sqrt{dx^2+dy^2}.\sqrt{x}}$ il precedente in virtù dell' istessa ragione.

Galileo con tutto il senno avvisava i Grammatici ed i Filologi nel suo SAGGIATORE (34) che il grandissimo Libro dell' Universo era „ scritto in Lingua matematica, i cui caratteri son triangoli, cerchj, et altre figure geometriche, senza i „ quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola „. Tuttavia non conoscendone l' Alfabeto si attentano gli Eruditi sovente, e per fin gl' idioti di entrare in lizza o far eco ove parlisi di Scienze esatte (che non son già Archeologia) balbettando in quel divino Idioma. Corrono allora l' istessa sorte di chi traducendo un dei morali Opuscoli di Plutarco, pieni d' antica Aritmetica e Geometria, quello, a causa d'esempio, intitolato *D' Iside e Osiride,* recasse in Volgare il passo relativo all' ortogonio Triangolo Pitagorico, del quale fa motto Platone nella *Repubblica* Πολιτεία, cioè, τριῶν τὴν πρὸς ὀρθίαν, καὶ τεττάρων τὴν βάσιν, καὶ πεντε τὴν ὑποτείνουσαν ἴσον ταῖς περιεχούσαις δυναμένην (da δυνάμις *potestas*, *potentia*) — *È di altezza come tre*, *di base come quattro*, *di lato adjacente*, uguale a' due lati del rettangolo „ (rett' angolo) *come cinque* „ —. Or quì il bravo *cinque* pareggia il *quattro* insieme col *tre*; mentre il Greco Verbo δυνάμενην non istà ozioso nè fa pleonasmo nel Cheronese, e da esso discendendo *Dynamica* porta al pareggio del *Quadrato* (Τετράγωνον) di 5 ai due Quadrati di 3 e 4 riuniti. Senza lo studio della XLVII.^{ma} del Libro I.^{mo} d' Euclide vanno i fanciulli e i giumenti sempre a diritto da punto a punto pe 'l più breve cammino, nè mai pe' i due lati dell' angolo. *Potenza*, Potere, *Posse*, in sostantivo, verbo, e verbale è il Vocabolo usato da Euclide trattando d' *ipotenusa*, ed altri argomenti geometrici o numerici di simil fatta, da Diofanto ragionando dell' Algebra, e dai Matematici posteriori, in senso più esteso ed in tutti i Linguaggi. Facciam dunque voto che vadan sempre congiunte o associate le Discipline severe all' amena ma critica Letteratura. Anche i Fisici non matematici alcuna fiata cadono in falso cimentandosi al medesimo aringo: le *velocità virtuali*, come oggi si scrive (35) non furono in prima un concetto felice di Galileo, nè si presentò avanti d' ogni altro nel MDCCCIII. alla sagacità di Garnier (36) la maniera di svolgere $(1+x)^m$ nella *Serie* rappresentata dalle potenze di m e lor coefficienti, d' onde nasca $1+Am+Bm^2+Cm^3+$ ecc., ed A sia $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+$ ecc., mentre questo svolgimento di L$(1+x)$ con tal mezzo erasi di già nel MDCCLXXXII. pubblicato. Il pensiere delle *virtuali* celerità è poi molto più antico, cioè tanto, quanto le *Questioni Meccaniche* reputatesi di Aristotile da taluni, e da altri Critici accordate per procedute di certo dalla prisca Scuola Peripatetica, e non mai come *Principio* dinamico, ma come *Teorema* da dimostrarsi con altro vero ed inconcusso *Principio*, simile in somma al *Postulato* famoso di Euclide concernente alle *parallele*.

---

(32) *Lezioni* di *Lacaille* soprannotate, pag.ª 397. N.° 969. Probl. V. Fig.ª 176. della Tavola VIII.ª

(33) Abbiasi ricorso alla pag.ª 492. della *Lezione* ventiduesima.

(34) È riportato il suo memorando *Apoftegma* nella pagina 19. del Volume secondo delle sue Opere, edizion principe del MDCLV. coi torchi del Dozza in Bologna.

---

(35) G.^{i} Aldini nel *Fascicolo primo di Fisica*, citando in *Nota* il Venturi, alla pag.^{a} 223. del XIX.^{o} Volume. Havvene il parallelo confrontando le pag.^{e} 483-97 e 604. del Volume X.^{o} Parte II.^{a}

---

(36) *Élémens d'Algèbre à l'usage des Aspirans à l'École Polytechnique. Première Sectión.* An XII. (Vedasi più di tutto la pag.ª 123. Num.° 214. Capitolo V.°, e la pag.ª prossima susseguente per la prova *indiretta.*)

GIUNTA FACILE

A COMPIMENTO DELLA TEORICA

DEL NUOVO METODO DI BUDAN

PER LA RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI NUMERICHE

D' OGNI GRADO

DI PIETRO FERRONI

Ricevuta adì 28. *Novembre* 1823.

Dopochè i sommi tra i moderni Analisti, Euler specialmente e Lagrange (MDCCLXVII-XCV-XCVIII.) avevano esposte e viepiù facilitate per le Scienze Fisico-matematiche nella loro applicazione alla pratica le maniere ingegnose ad un tempo e sublimi di risolvere in genere le Equazioni a *coefficienti* tutti numerici di qualunque grado esse fossero, uscì alla pubblica luce nel MDCCCVII. un' Opera scritta in Francese su quest' istesso argomento, di picciol volume, ma suddivisa in VI. corti Capi, dei quali i tre primi sono altrettanti Preliminari desunti dalla storia, nozioni, ed altri sussidj ricavatisi dalle dottrine ordinarie dell' Algebra, gli ultimi contengono le III. Parti del nuovo *Algoritmo* proposto a tal uopo dal Sig. *Budan*, e che rispetto alla I.^{a} Parte, come l' Autore medesimo lo asserisce (pag.^{a} 1. e 2. dell' *Avant-propos*), nel MDCCCIII. (23. Maggio in prima, poscia 31. d' Ottobre) fu approvato dalla Classe Matematica dell' Istituto di Francia. Sì fatta invenzione appoggiavasi ad una Proposta, ch' era appunto il subjetto del secondo Capitolo, e verteva intorno alla *trasformazione* dei Polinomj a *coefficienti* numerici in altrettali *identici* sebben diversi di forma o sembianza; la quale *trasformazione* per mezzo di sole addizioni agevolissime e sottrazioni sembra che si faccia dipendere da due Teoremi fondamentali (pag.^{a} 13. §. 20), che richiamano ai Numeri *figurati*. Lo Scrittore insigne (Legendre) del *Rapporto* appresentatone all' Istituto predetto riguardò come non nuove quelle due Proposizioni preparatorie, o per dir meglio Teoremi Analitici, notandoli come se fossero proprietà de' Numeri ormai conosciute (*Notes sur le Chapitre* II. a pag.^{a} 52.), senza peraltro citare Libro alcuno di Elementi o Trattato dov' elle si trovassero a stampa, non che dedotte e fornite di prova, almen rammentate. Dietro ad un' autorità così riguardevole atteso la nominanza del Relatore, cui dagli Accademici Parigini della Facoltà delle Scienze esatte era stato commesso principalmente l' esame del ritrovato, si protestò sciolto *Budan* dall' attener la promessa (pag.^{a} 12. in fine del c.° §.) di somministrare al Lettore le dimostrazioni dell' una e dell' altra Proposizione (*pour leur démonstration voyez ci-après les* NOTES), conciossiachè sarebbero quelle rimase *inutili* a chi d' altronde sapevale o le avea pubblicate, con far tuttavia trasparire sotto velame d' ironica frase ch' ei coprisse il mistero a guisa d'Oracolo, sfidando l' Edipo quando ch' ei fosse, che indovinasselo, ed alzandolo al cielo ET ERIS MIHI MAGNUS APOLLO!

Sedici anni pressochè interi, o in quel torno, sono scorsi a quest' ora, e nessuna ristampa è venuta a luce (o non giunta almanco in Italia) dopo la prima edizion di Parigi dell' Opera testè divisata un anno avanti della seconda impressione (MDCCCVIII.) della *Résolution dés Équations numeriques de tous les degrès* di Lagrange, nè procuratasi dall' Autore, nè tampoco da altri che sia; veruno Analista ha quindi preso pensiere, e molto meno l' assunto di supplire alla *Prova* mancata, o di citare segnatamente in qual Libro o comune o raro essa fosse; *Budan* è restato in silenzio perpetuo; da lì in poi nulla leggesi nei Giornali scientifici e letterarj, che a questa particolarità si riporti per quanto io sappia, dopo d' avere più fiate rivolta colla guida degl' *Indici* relativi a quel periódo di tempo la Biblioteca Britannica.

Ma innanzi di tutto fa di mestiere avvertire che l'Inventore aveva di per se convenuto appunto come sentiva Legendre (l. c. a pag.ª 52.), cioè, che amendue le Proposizioni (quantunque incognite secondo lui sino al MDCCCIII.) tuttavia *sont des conséquences si faciles à déduire des principes déja reçus, qu'il peut paroître étonnant qu'on ne s'en soit pas avisé plus tôt:* espressione naturale e spontanea dell'estrema facilità in rinvenirne la genuina e spedita derivazione; lo che a mio parere è stato causa per avventura di non curare altrimente, come suol farsi per cosa di poco o niun peso e valore, quel Supplimento, che sin d'allora all'Autore non piacque di suggerire.

Nulladimeno comunque ciò sia, anco a risico d'esser forse secondo ad occuparmi di tal ricerca, o correndo pericolo a motivo della di lei leggerezza d'essere adesso creduto di pargoleggiare in Analisi, non mi dispiace di render pubblico il modo, mercè di cui mi è riuscito dimostrare con chiarezza e semplicità superiore alla speme concepitane innanzi le due Proposizioni seguenti mediante le Formole delle Serie pertinenti a quei Numeri, i quali si vedono ognora ripetuti nel Calcolo universale delle Probabilità, nel valutar le diverse combinazioni di più Grandezze, nell'elevazione dei Binomj a Potenze indeterminate, l'eleganza e fecondità delle quali Funzioni o Progressioni numeriche rimonta all'epoca di Pascal (MDCLIII-LXV.), e vale a dire del suo Triangolo per antonomasia chiamato *aritmetico*, come *rettangolo* il Pitagorico cotanto più antico, poichè a conjettura degli Eruditi risale al Secolo sesto (DXL.) avanti dell'Era Volgare. E mi giova l'aver fiducia nell'indulgenza dei Matematici, mentrechè all'occasione servendo di investigare le Prove omesse da *Budan*, che scaturiscono limpide ed abbondevoli da notissimo fonte, aggiungerò come in appendice alcun chè di rischiaramento a questo o quel passo dello Scrittore dell'Opera dove siami apparito bisognevole di qualche lume, massimamente quanto torna ad interpretare la famigeratissima

Regola di Cartesio sulla *permanenza* e *varietà* dei *segni* nel primo Membro d' una Equazione ordinata; Scoperta algebrica di prima classe quando si consideri il tempo del di lei trovamento avvenuto nel MDCXXXVII., che vale lo spazio di circa a due Secoli addietro, e forse oggi a torto obliata nella sua applicazione, quantunque la encomiasse quel Grande, che dir soleva ,, Se non era Cartesio, non sarei stato Newton ,, come per altra ragione ripetevalo soventemente del divin Galileo.

Ecco dunque parola per parola e in termini puntuali volgarizzate ambedue le PROPOSIZIONI, che danno materia alla brevissima discussione consecutiva da ristretti limiti circoscritta.

PRIMO TEOREMA.

,, La Somma m^{sima} dei primi n termini di una Serie qua-
,, lunque s' uguaglia alla Somma di questi termini moltipli-
,, cati respettivamente ciascuno, ma con ordine inverso, pe'
,, i primi n numeri *figurati* del grado m, vale a dire della
,, Serie aritmetica principiante da 1, nascente da 1, 1, 1,
,, ecc., e di cui m sia il termin secondo, a differenza dei nu-
,, meri così detti *poligoni*, i quali nascono dalla Serie delle
,, cifre numeriche *naturali*, e dalle consecutive aritmetiche
,, Progressioni.

,, A causa d' esempio, in questa Serie presa ad arbitrio
,, si verifica sempre la detta generale uguaglianza tra

$$,,\quad A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + \ldots\ldots + A_{n-1} \qquad \text{e}$$

$$,\ A_{n-1} + \frac{m}{1} A_{n-2} + \frac{m'm+1)}{1.2} A_{n-3} + \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3.} A_{n-4} + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3.4.} A_{n-5}$$

$$,,\ + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{1.2.3.4.5.} A_{n-6} + \ldots\ldots + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(\ldots\ldots)(m+n-2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,\ldots\ldots\,n-1} A_0,$$

,, qualunque si siano le Grandezze a talento prescelte, sebbene
,, rappresentate dalla *Sigla* medesima A, e comunque
,, differenti di *segno* ,,.

SECONDO TEOREMA.

,, Un Polinomio qualunque siasi, il quale proceda in or-
,, dine delle potenze d'*esponente* intero e positivo di x con-
dotte dal grado m sino a o, si trasforma in un altro *identi-*
,, *co* Polinomio ordinato a seconda delle istesse potenze del
,, binomio $(x-1)$, i *coefficienti* dei cui termini respetti-
,, vi in ordine inverso sono la Somma 1.ma di tutti i *coeffi-*
,, *cienti* de' termini del Polinomio dato, la Somma 2.da de' *coef-*
,, *ficienti* medesimi eccetto l' ultimo, la Somma 3.za eccetto
,, i due ultimi, la 4.ta ad eccezion dei tre ultimi, e così
,, discorrendo, sempre *a scaletta* rovescia, qualunque s' ab-
,, biano *coefficienti*, e comunque positivi o negativi si siano ,,.

,, In grazia d' esempio

$$2x^3-3x^2+5x-3=2(x-1)^3+3(x-1)^2+5(x-1)+1$$

Somma I.ª

$$2-1+4+1$$

II.ª

$$2+1+5$$

III.ª

$$2+3$$

IV.ª

$$2$$

,, (io soggiungo) sì com'è facile sperimentarlo a tutt' agio, egualmente che il primo *Teorema* e in numeri e in lettere o *specie*.

Tutta la parte didascalica della nuova maniera di giugnere alla notizia delle *radici* vere o vicinissime al vero si sostiene sul Paragrafo 34. (pag.ª 23.) del Capo III.°, dove l' Autore stabilisce in massima la conseguenza del *processo* delle particolari sue *trasformate*. Ei ne tace la *Prova*, ma col di lui modo di *trasformare* per *identità* mediante le *potenze* $(x-n)^m$ e seguenti, ovvero $(x+n)^m$ e segg., nella prima ipotesi quando facciasi $x = n$ e nella seconda $= -n$, riducesi il *Polinomio*, trasformato o secondario al solo ultimo termine tutto cognito, cioè al *Binomio* primario, nel quale si facesse x in sustituzione uguale a $\pm n$; donde si rivela il segreto.

Il numero d' *indice* del posto dei *termini* della *Serie*, segnata nell' enunciato del 1.^{mo} *Teorema*, incominciando da *zero* a destra, ma sotto della prima Lettera dell' Alfabeto o *Sigla* Romana, sia a maggior lume della distinzione, da aversi sempre presente, della quantità e qualità (positiva o negativa) di ciascuno dei *termini* istessi, accompagnato parimente a diritta, ma sopra, dai soliti *accenti*, od altri simboli che si volessero, fossero anche colori diversi primigenj o misti e screziati, conforme Castel distingueva i toni e semitoni e quarti enarmonici dell'Ottica Musicale tempo fa da lui immaginata.

Ciò premesso, tostochè volgasi l' occhio su Paralellogrammo dei Numeri *figurati*, ripetuti sempre in *base* ed *altezza*, talquale (v. gr.) il dispose Giacomo Bernoulli nella sua Opera classica *Ars conjectandi* (Parte II. Cap. V. pag.^{a} 114. Ediz. di Basilea MDCCXIII.) e si ponga mente al modo, col quale abbian parte o concorrano alla generazion di quei Numeri le singole *Unità*, senza niuna caratteristica, in fronte alla Tavola 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 accentandole nelle superiori caselle 1°, $1'$, $1''$, $1'''$, $1^{'v}$, 1^{v}, $1^{v'}$, $1^{v''}$, $1^{v'''}$, $1^{'x}$, 1^{x}, $1^{x'}$, $1^{x''}$, evidente egli è ed a chicchessia manifesto, che in riguardo alla prima *Somma* o Serie corrispondente a quella de' Numeri *naturali*, che suppone $m = 2$, acquisterebbe tal forma

$$1^{\circ},\ 1^{\circ}+1',\ 1^{\circ}+1'+1'',\ 1^{\circ}+1'+1''+1''',\ 1^{\circ}+1'+1''+1'''+1^{'v},$$
$$1^{\circ}+1'+1''+1'''+1^{'v}+1^{v}\ldots,1^{\circ}+1'+1''+1'''+1^{iv}+1^{v}+1^{v'}+\ldots+1^{n-1}$$

o disposta in Triangolo a maggior comodo, e renduta così più acconcia a misurarsi col Compasso visuale, viene a dir colle Seste negli occhj com' esprimevasi Michelangiolo nel suo Volgare.

1°

$1^{\circ}+1^{\prime}$

$1^{\circ}+1^{\prime}+1^{\prime\prime}$

$1^{\circ}+1^{\prime}+1^{\prime\prime}+1^{\prime\prime\prime}$

$1^{\circ}+1^{\prime}+1^{\prime\prime}+1^{\prime\prime\prime}+1^{\prime v}$

$1^{\circ}+1^{\prime}+1^{\prime\prime}+1^{\prime\prime\prime}+1^{\prime v}+1^{v}$

$1^{\circ}+1^{\prime}+1^{\prime\prime}+1^{\prime\prime\prime}+1^{\prime v}+1^{v}+1^{v\prime}$

ecc. ecc.

$1^{\circ}+1^{\prime}+1^{\prime\prime}+1^{\prime\prime\prime}+1^{\prime v}+1^{v}+1^{v\prime}+\ldots\ldots+1^{n-1}$;

di maniera tale ch'è la *Somma* di n termini (invertendo l'ordine o incominciando dall'ultimo, e tenuto fermo $m=2$)

$$= 1.\,1^{n-1} + 2.\,1^{n-2} + 3.\,1^{n-3} + 4.\,1^{n-4} + \ldots\ldots$$
$$+ (n-3)\,1^{\prime\prime\prime} + (n-2).1^{\prime\prime} + (n-1).1^{\prime} + n.\,1^{\circ},$$

cioè, sino al termine $\frac{m.(m+1)\ldots(m+n-2)}{1.2.3\ldots(n-1)}.\,1^{\circ}$, ovvero $\frac{2.3.4.5\ldots n}{1.2.3.4\ldots(n-1)}=n$, come sopra, i numeri *naturali* essendone i *coefficienti*.

Rispetto alla seconda *Somma* (dove $m=3$) resulta la distribuzione seguente in Triangoli, che infilano co' lati obliqui verso sinistra i termini *identici*, ma graduati o da scala di maggior pianta, adatti all'esercizio o pratica della *Riga* di Newton illustrata dal Cramer

1°

$1^{\circ}+1^{\circ}+1^{\prime}$

$1^{\circ}+1^{\circ}+1^{\circ}+1^{\prime}+1^{\prime}+1^{\prime\prime}$

$1^{\circ}+1^{\circ}+1^{\circ}+1^{\circ}+1^{\prime}+1^{\prime}+1^{\prime}+1^{\prime\prime}+1^{\prime\prime}+1^{\prime\prime\prime}$

$1^{\circ}+1^{\circ}+1^{\circ}+1^{\circ}+1^{\circ}+1^{\prime}+1^{\prime}+1^{\prime}+1^{\prime}+1^{\prime\prime}+1^{\prime\prime}+1^{\prime\prime}+^{\prime\prime\prime}+1^{\prime\prime\prime}+1^{\prime v}$

$1^{\circ}+1^{\circ}+1^{\circ}+1^{\circ}+1^{\circ}+1^{\circ}+1^{\prime}+1^{\prime}+1^{\prime}+1^{\prime}+1^{\prime}+1^{\prime\prime}+1^{\prime\prime}+1^{\prime\prime}+1^{\prime\prime}+1^{\prime\prime\prime}$
$+1^{\prime\prime\prime}+1^{\prime\prime\prime}+1^{\prime v}+1^{\prime v}+1^{v}$

$1^{\circ}+1^{\circ}+1^{\circ}+1^{\circ}+1^{\circ}+1^{\circ}+1^{\circ}+1^{\prime}+1^{\prime}+1^{\prime}+1^{\prime}+.^{\prime}+1^{\prime}+1^{\prime\prime}+1^{\prime\prime}+1^{\prime\prime}+$
$1^{\prime\prime}+1^{\prime\prime}+1^{\prime\prime\prime}+1^{\prime\prime\prime}+1^{\prime\prime\prime}+1^{\prime\prime\prime}+1^{\prime v}+^{\prime v}+^{\prime v}+1^{v}+1^{v}+^{v\prime}$

ecc. ecc. ecc.

$$n.\,1^{\circ}+(n-1)\,1^{\prime}+(n-2)\,1^{\prime\prime}+(n-3)\,1^{\prime\prime\prime}+(n-4)\,1^{\prime v}+(n-5)\,1^{v}$$
$$+(n-6)\,1^{v\prime}+(n-7)\,1^{v\prime\prime}+\ldots\ldots+1.\,1^{n-1}$$

(col solito ordine inverso)

$=1.1^{n-1}+3.1^{n-2}+6.1^{n-3}+10.1^{n-4}+\ldots+\frac{n(n-1)}{1.2}.1'+\frac{(n+1)n}{1.2}.1^{\circ}$, ovvero $+\frac{m\ldots(m+n-2)}{1\ldots(n-1)}\,1^{\circ}$, come di sopra, cioè $\frac{3.4.5\ldots.(n+1)}{1.2.3\ldots.(n-1)}.\,1^{\circ}=\frac{n(n+1)}{1.2}.\,1^{\circ}$, essendone *coefficienti* i numeri *triangolari* ossiano i termini della Somma dei *coefficienti* della prima Somma, i quali, per conservarsi l'*analogia*, lo sono delle *unità* parimente, o della *Serie* che si appellò *parallela*, intorno a cui speculando Lagrange nelle *Sessioni delle Scuole Normali* discoperse assai nuove eleganze e bellezze ricavate dal fondo del suo penetrantissimo ingegno.

Quantunque volte col metodo istesso s' appresentassero all'occhio in filari tracciati e riuniti coll'ordine a ciascuna suo proprio, altrettante la *Somma* terza, la *Somma* quarta, ecc. ecc., in generale la *Somma* m^{sima} prenderebber l' aspetto di

$$1.1^{n-1}+4.1^{n-2}+10.1^{n-3}+20.1^{n-4}+\ldots\ldots+\frac{(n-1)(n(n+1)}{1.2.3}.\,1'$$
$$+\frac{(n)(n+1)(n+2)}{1.2.3}.\,1^{\circ}$$

ossia (fatto $m=4$) $\frac{4.5.6\ldots.(n+2)}{1.2.3\ldots.(n-1)}.\,1^{\circ}$, ovvero $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}.\,1^{\circ}$ coi *coefficienti* piramidali; e così procedendo al caso di $m=5$, riuscirebbe la *Somma* quarta a tutta prova dell' occhio (equivalente all'evidenza della *soprapposizione* in astratto a proposito della Geometria *figurata*) nell' andamento inverso dei numeri triangolo-piramidali

$1.1^{n-1}+5.1^{n-2}+15.1^{n-3}+35.1^{n-4}+\ldots+\frac{m\ldots.(m+n-2)}{1\ldots(n-1)}.\,1^{\circ}$, ossia $\frac{5.6\ldots\ldots(n+3)}{1.2.3.4\ldots(n-1)}.\,1^{\circ}$, vale a dire $+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4.}.\,1^{\circ}$.

Di quì n'avverrebbero per le *Somme* consecutive i *coefficienti*, ordinati a rovescio, e presi dalla *Serie* dei piramido-piramidali, dove m secondo termine $=6$ ed il termine *generale* $\frac{m\ldots\ldots.(m+n-2)}{1.2\ldots(n-1)}=\frac{6.7\ldots.(n+4)}{1.2\ldots\ldots(n-1)}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4.5}$; la qual *Fun-*

zione di *n* (numero de' termini) per ogni Somma m^{sima} desiderata determinasi col sostituire a *m* il numero competente al secondo termine delle *Serie* dei *figurati* (alla cit.^{a} pag.^{a} 13. *Budan* sul principio) nella Formula universale sin da prima trascritta.

A malgrado però di questa immanchevole splendidezza della Dimostrazione *concreta* per mezzo del simetrico e regolare spartimento e scrittura dei *Membri* più o meno o non mai reiterati di quelle *Somme*, e contuttochè simile disviluppamento mi procacciasse digià (innanzi Lagrange) la conversione diretta della Formula Newtoniana delle Potenze in *Quantità esponenziali*, d' onde poi ne veniva l' espressione dei Logaritmi di qualsisia *Modulo* (*a*), un agevolissimo e nulla elaborato concepimento *analitico astrattamente* conduce alla medesima meta senza mendicarne dai precedenti *Quadri* l' ajuto, come taluna volta nell' insegnamento familiare degli *Elementi* Geometrici invocava Clairaut il materiale sguardo dei suoi discepoli, ed Ozanam, e con più copia e dottrina Guyot nelle *Ricreazioni di Matematica* istruirono, maravigliarono insieme, e sul far dei buoni giuocolatori bamboleggiarono in brio coi loro allievi, sollazzandone la fantasia, a risparmio dannevole dell' intelletto. E che sia 'l vero, all' effetto di non tacciar d'*indiretta* e *non piena* (poichè la *legge* analitica prosegue per modo d' *analogia* come di lunga durata mercè di questa rimase *imperfetto* dal lato medesimo il *Binomio* di Newton) la Prova difficultosa taciuta da *Budan*, basta porre avanti alla mente quelle stesse *Unità* della prima *traversa* della Tavola Bernoulliana. Ora, in cambio d'accentarle, s'immagini accanto a ciascuna, non altrimente contrassegnata, una Serie di *Grandezze* qualunque, rappresentate dalle lettere $\pm g$, $\pm k$, $\pm p$, $\pm r$, $\pm s$, $\pm t$, ecc. a uso dei Corsi Elementali, ma non si scordi che al fianco d' ognuna ci

---

(*a*) *Magnitudinum Exponentialium Logarithmorum &c. Theoria &c.* MDCCLXXXII. Capo II.° a pag.° 40, e Capo III. consecutivo.

sta 1 o espresso, o sottinteso ed occulto. Fatte le *Somme*, e *Somme delle Somme* successive come in passato, si combineranno, ripeterannosi, *figureranno* egualmente nella generazion delle *Serie* quelle *Grandezze* a piacimento poste e indeterminate, come le scritte o ideatesi laterali *Unità*; lo che vuol dire, che i Numeri *figurati* (la Teoria de' quali è assicurata *generalmente* da *pienissima* Prova) resteran tali quali ed accompagneranno in qualità di *coefficienti* o multipli le respettive lettere rappresentatrici delle *Grandezze* co' i proprj *segni*. Imperciocchè il giro, e numero, e qualità delle *combinazioni* son matematicamente e con tutta evidenza dell' istesso tenore; così chè, se piacesse averne un esempio patente di paragone, lo somministrerebbe di subito qualunque Giuoco di Carte o di Lotteria *figurata*, dove, datasi la Regola, a calcolar le *combinazioni* e le probabilità servirebbe di norma non la material Carta, non la Scheda, non la Figura, ma il vario incontro, componimento, e ripetizione dell' *Un* sottinteso.

Tolto in sostanza ogni dubbio alla I.^{ma} *Proposizione* in virtù delle generazioni, e generazioni di generazioni senza limite o all' infinito dei Numeri, cotanto semplici e aperte quanto purtroppo elle sono e dirette e retrograde spogliandole del velo mistico o metafisico delle Scuole di Pitagora e di Platone, e loro seguaci, a differenza della fecondazione nascosa d' occulti embrioni di Vegetabili ed Animali, che non si rivelano ancora nè al raffinamento de'sensi, nè all' acutezza degli istrumenti, nè alla forza di raziocinio dei Naturalisti e Fisiologi, passiamo alla *Prova* della *Proposizione* seconda.

Se la I.^{ma} è in astratto e in concreto decifrata quant' era mestiere colla massima agevolezza, quasi spontanea discopresi la II.^{da} in grazia delle ovvie *combinazioni* dell' union di più Lettere, ad ambi, terni, quaderne, cinquine, ecc., ecc., le quali ricorrono nell' elevazione dei *Binomj* a potenze. Anzi discopresi con avvantaggio: imperocchè dal considerarsi in genere un *Polinomio*, ch' è l' argomento della detta *Proposi-*

zione, scaturisce non solo la conseguenza immediata della *Prova* intera d'un *Predicato* dell'Autore senza quella annunciato per vero (Vedasi le pag.^{e} 27. in calce §. 41 —, 31 — 32 — 33 — 34. §§. 46, 47, 48. del Capitolo IV.°), ma vi si riconosce oltracciò già dimostrato il medesimo avanti di lui dai Compilatori d'Elementi d'Algebra per le Scuole Minori, omesso il favellare dell'Opere destinate ai Licei, Università, ed Accademie, come eziandio dei Trattati profondi, i quali vertano intorno alla natura ed indole delle Equazioni

Vuolsi adunque tal *Polinomio* $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + ex^{m-4} + \ldots\ldots + \phi$ (sì diretto che reciproco o *collaterale* ponendo $z = \frac{1}{x}$), in cui m sia *esponente* indeterminato, ma sempre *positivo* e numero *intero*, com'è il primo *Membro* d'una *Equazione razionale* ordinata, salvo a quivi 1, ed i *coefficienti* $a, b, c, d, e, f, \ldots\ldots, \phi$ siano *negativi positivi*, o comunque varii tra loro di *segno*, ridurre ad un altro *Polinomio* equivalente (*d'égale valeur* (pag.^{a} 13. secondo il Testo, *identico* in fatto) $p(x-1)^m + q(x-1)^{m-1} + r(x-1)^{m-2} + s(x-1)^{m-3} + t(x-1)^{m-4} + \ldots\ldots + \omega$, *determinandone* i *coefficienti* coi consueti mezzi dell'Algebra de' finiti.

Quanto s'aspetta alla ricerca del primo e dell'ultimo *coefficiente* havvi appena luogo a pensarlo, e perderebbesi opera e tempo richiamando in serio la cosa da lunge. Difatto, siccome in ciascuno dei due *Polinomj* abbiamo un sol termine ax^m a parallelo di px^m di questo grado più alto, bisogna porre $p = a$ necessariamente; ed essendochè l'*equivalenza* od *identità* deve sempre verificarsi dato a x qualunque valore, ne segue che $\omega = a + b + c + d + e + \ldots\ldots + \phi$ perchè tale diventa supposto $x = 1$; ed in generale, se la *trasformata* fosse per mezzo delle *Potenze* $p(x \mp n)^m + q(x \mp n)^{m-1}$ + ecc. ecc. $+ \omega$, l'ultimo suo termine sarebbe il *Polinomio*

$a(\pm n)^{m} + b(\pm n)^{m-1}$ + ecc. ecc. $+\varphi$, come deducesi dal Capo III.° §.° 34. altra volta citato. Quindi è che sono questi i *coefficienti* due estremi, cioè della prima parte a, e di tutte insieme accumulate le parti $a + b + c + d + e + \ldots\ldots\ldots + \varphi$ di tutta l'intiera somma, tra i quali estremi hanno da *interpolarsi* o inserirsi i valori q, r, s, t, ecc. di numero $m - 1$, che saranno nascenti, come vedremo, da più o men mutilate altre somme. Tutto è co' i due soli estremi nel primo grado $ax^1 + b$, giacchè diviene si per la ragione indicata sì mercè l'Equazione $ax + b = p\,(x - 1) + q$ di prim' ordine $= a(x - 1) + (a + b)$ senza niun altro intermedio. Seguendo la medesima indicazione pe' *Polinomj* di secondo e terz' ordine vediamo se apparisce adesso la *legge*, da applicarsi dipoi *per analogia* agli altri innumerevoli casi, e quindi la Regola *generale* esposta da *Budan*. A questo intento propongansi i due casi speciali dell' esponente $m = 2$, $m = 3$: le due Equazioni vengono ad essere, ripetuta per paragone ancora la prima, le scritte quì sotto coi loro soliti *coefficienti*.

$$ax^1 + b = p(x^1 - 1) + q,\ p = a,\ q = a + b$$

$$x^2 + bx^1 + c = p(x^2 - 1)^2 + q(x^1 - 1) + ,rp = a,\ q = \frac{2}{1}a + b, r = 2\ \frac{(2-1)}{1.2}\,a$$

$$+\ \frac{2-1}{1}\,b + c = a + b + c$$

$$2x^3 + bx^2 + cx^1 + d = p(x^1 - 1)^3 + q(x^1 - 1)^2 + r(x^1 - 1) + s$$

$$p = a, q = \frac{3}{1}\,a + b,\ r = \frac{3(3-1)}{1.2}\,a + \frac{(13-)}{1}\,b + c\ ,$$

$$s = \frac{3(3-1)(3-2)}{1.2.3}\,a + \frac{(3-1)(3-2)}{1.2}\,b + \frac{(3-2)}{1}\,c + d = a + b + c + d;$$

i quali *coefficienti* (sempre di numero $m + 1$) tutti *indeterminati* si *determinano* alla foggia dei Cartesiani nella Teoria delle *Serie* mediante Equazioni *razionali* di primo grado, e parimente di num.° $m + 1$, e comparando i termini dove son e *potenze* eguali di x, precedenti dal disviluppamento di quelle, che al *Binomio* $x^1 - 1$ appartengono.

Dietro a questo primo saggio otterrebbesi pe'l grado quarto

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx^1+e=a(x^1-1)^4+\left(\frac{4}{1}a+b\right)(x^1-1)^3+$$
$$\left(\frac{4(4-1)}{1.2}a+\frac{(4-1)}{1}b+c\right)(x'-1)^2+\left(\frac{4(4-1)(4-2)}{1.2.3}a+\frac{(4-1)(4-2)}{1.2}b\right.$$
$$\left.+\frac{(4-2)}{1}c+d\right)(x'-1)^1+1\ \frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{1.2.3.4}a+\frac{(4-1)(4-2)(4-3)}{1.2.3}b$$
$$+\frac{(4-2)(4-3)}{1.2}c+\frac{(4-3)}{1}d+e=a+b+c+d+e:$$

e generalmente per $ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+dx^{m-3}+ex^{m-4}+fx^{m-5}+\ldots\ldots+\phi$

$$=p(x-1)^m+q(x-1)^{m-1}+r(x-1)^{m-2}+s(x-1)^{m-3}+t(x-1)^{m-4}$$
$$+v(x-1)^{m-5}+\ldots+\omega,$$

si ha $p=a$, $q=\left(\frac{m}{1}\right)a+b$, $r=\left(\frac{m.m-1}{1.2}\right)a+\left(\frac{m-1}{1}\right)b+c$, $s=\left(\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\right)a+\left(\frac{m-1.m-2}{1.2}\right)b+\left(\frac{m-2}{1}\right)c+d$,

$$t=\left(\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}\right)a+\left(\frac{m-1.m-2.m-3}{1.2.3}\right)b+\left(\frac{m-2.m-3}{1.2}\right)c$$
$$+\left(\frac{m-3}{1}\right)d+e,\ v=\left(\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5}\right)a+\left(\frac{m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.}\right)b$$
$$+\left(\frac{m-2.m-3\ m-4}{1.2.3}\right)c+\left(\frac{m-3.m-4}{1.2}\right)d+\left(\frac{m-4}{1}\right)e+f$$

. . . .

$\omega=a+b+c+d+e+f+\ldots..+\phi$. Nè conseguenza sì fatta ed *universale* proviene a mio senso in sola forza di *analogia*. Conciossiachè unico è lo x^m da paragonarsi nei supposti *identici* Polinomj, due x^{m-1} del secondo da conguagliarsi con uno del primo, tre x^{m-2} del secondo, quattro x^{m-3}, cinque x^{m-4}, ecc., $(m+1)x^{m-m}$ da pareggiarli ad uno solo del primo, coi *coefficienti* di legge cognita e rigorosamente convalidata dagli Analisti nell'inalzamento a *potenze* di $(x-1)$, e con $m+1$ Equazioni semplicissime del prim'ordine per *determi-*

nare gli $m+1$ *coefficienti* p, q, r, s, t, v, ecc., ω mediante gli $m+1$ già dati a, b, c, d, e, f, ecc., ϕ *del Polinomio*, che imprendasi a trasformare.

Disposti adesso in *Somme* di *Somme* prossime successive gli ottenuti resultamenti, questi appalesano il seguente *perpetuo* andamento in proposito de' *Coefficienti* correspettivi accosto alle *Sigle* segnati

Grado 1.^{mo}

	a,b(C.^{ti})
q	$a,a+b$
p	a

2.^{do}

	a,b,c (C.^{ti})
r	$a,a+b,a+b+c$
q	$a,2a+b$
p	a

3.^{zo}

	a,b,c,d (C.^{ti})
r	$a,a+b,a+b+c,a+b+c+d$
s	$a,2a+b,3a+2b+c$
q	$a,3a+b$
p	a

4.^{to}

	a, b, c, d, e (C.^{ti})
t	$a,a+b,a+b+c,a+b+c+d,a+b+c+d+e$
s	$a,2a+b,3a+2b+c,4a+3b+2c+d$
r	$a,3a+b,6a+3b+c$
q	$a,4a+b$
p	a.

Diceva *perpetuo* andamento, poichè alla stessa disposizione si uniformano tutti i gradi ulteriori m del *Polinomio*, a seconda delle preordinate Formule generali o *Funzioni* di m, che moltiplicano i *Coefficienti* dei termini del *Polinomio*, e dan luogo a *Somme* prime, seconde, terze, quarte, ecc. m^{me} troncate *a scaletta*, viavia mancanti perciò dell' ultimo termine, dei due ultimi, dei tre ultimi, ecc., ed indicanti i valori dei singoli *Coefficienti* del *Polinomio* trasformato, seguitando la diagonale del Parallelogrammo rettangolo, o dalla punta del Triangolo ortogonio rovesciato l' *ipotenusa* all' in sù, ed al contrario contando per primo il più basso, e 'l più alto per l' ultimo. Tanto è puntualmente quanto nel dar contezza ed intavolare esemplari del suo divisato *algoritmo* ha prescritto *Budan* senza nessun' ombra di Prova.

Sono nelle Scienze *esatte* gli Sperimenti o le Prove e Riprove di fatto rassomigliate a quelle, che i Dialettici chiamano *a posteriori*, e non finiscono mai di contentare da senno, ed acquietar l' animo dei Cultori delle medesime, ed al più servon loro di mossa, di stimolo, e scorta per dimostrare *a priori* la verità, ricavandola dalle altre verità conosciute. Cammin facendo negli *Esercizj* del Calcolo si parano non di rado all' Algebrista davanti nuove proprietà non attese delle Grandezze, come quando mi riuscì di restituire alla Famiglia delle Parabole la Logaritmica (*b*). Doppia è in sequela di ciò la ricerca indiritta al conseguimento di quella compiuta Dimostrazione: o la dee somministrare co' i suoi *membretti* il Newtoniano *Binomio*, o la seconda Proposizione è talmente collegata con la prima (ormai dimostratasi) da esserne un di lei *derivato*. È par di certo che debba essere così strettamente connessa quando l' Autore la osserva mentre scrive (*Note sur le Chapitre* II. a. 52. (C)) che dalle due *Proposizioni* insieme *dépend l' Algorithme;* quale essendo il puntualissimo impiego effettivo della seconda vuol significare in sostanza, che la *Prova* di questa seconda, cioè il nuovo e spedito strumento Aritmetico onde risolvere le Equazioni *numeriche* coll' opera di mero *Abbachista*, dee desumersi, o scaturir di per se dalla prima.

Primieramente rifletto alla forma e concatenazione di tutti quei *Coefficienti*, che richiamano a Progressioni di Numeri *figurati* accanto ad $a, b, c, d, e, f, \ldots\ldots, \phi$, il primo dei quali p, all' effetto di conservare la *forma*, dovrebbe scriversi $(1)a$, o l' ultimo ω così appresentarsi

---

(*b*) *Magnitudinum Exponentialium &c.* Opera menzionata, Capo VIII. ai §§. 344, 345.

$$\left(\frac{m.m-1.m-2.m-3\ m-4\ldots\ldots\ldots m-(m-1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5\ldots\ldots m}\right) a +$$

$$\left(\frac{m-1.m-2\ m-3\ m-4\ldots\ldots .m-(m-1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ldots .m-1}\right) b +$$

$$\left(\frac{m-2.m-3.m-4\ldots\ldots m-(m-1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ldots\ldots m-2}\right) c +$$

$$\left(\frac{m-3.m-4\ldots\ldots\ldots m-(m-1)}{1\ .\ 2\ldots\ldots m-3}\right) d +$$

$$\left(\frac{m-4\ldots\ldots\ldots m-(m-1)}{1\ldots\ldots m-4}\right) e +$$

$$\left(\frac{m-5\ldots\ldots\ldots m-(m-1)}{1\ldots\ldots m-5}\right) f +$$

$$\left(\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}\right) + \left(\frac{m-(m-1)}{1}\right) \vec{\varphi}$$

sembianti tutti e singoli d' individui dell' istessa famiglia „ . . . . *facies non omnibus una - Nec diversa tamen qualem decet esse sororum* „ in altro subjetto Ovidio cantava. E la sentenza del Sulmonese accennavane come in lontano prospetto di qual *genere* e *specie* nate fossero quelle *Serie,* in cui consisteva lo scioglimento del nodo. Conciossiacosachè all'aspetto loro ravvisai subito che le *Funzioni* di *m* da me calcolate per la rappresentazione di quei *coefficienti* sono precisamente le stesse delle Bernoulliane nel *Corollario* del quarto *Lemma* del Capitolo III.° della Parte II.^{a} dell' *Ars conjectandi*, della quale ho testè fatta parola. Ma vi leggeva nel passo notato dell' Opera ancora più oltre, ed era la letterale applicazione di quelle Formule al caso simile di Quantità date ad arbitrio e di numero e di grandezza, sommate, di nuovo sommate, ecc., ecc., e dopo del primo esclusi a *scaletta* gli ultimi, penultimi, antepenultimi, ecc., ecc., termini, e per dirlo in breve l' *Algoritmo* patente medesimo di *Budan*, in rapporto al quale erasi espresso Legendre (pag.^{a} c.^{a} 52.) che le *Proposizioni*, pretese nuove, fossero, non che facili deduzioni, *l'énoncé de proprietés déjà connues*, senza citarne i Nomi e le Opere di questo o quel Matematico. Tutto l'artificio dell' *Algoritmo* è appieno manifestato, unitamente al *salto* dei termini estremi all' indietro, dalle due Tavole combinate dei Numeri *figurati* (rettangolare a 114, triangolare a 87) colla giunta nel *Consectarium* cit.° della generalità di porre in testa della seconda accanto della linea traversa, ed accanto ad ogni unità (*Monadi*) le g, h, i, l, p, ecc. ecc. , nella qual' generalità restano per conseguente compresi i *Coefficienti* tutti o positivi o negativi delle Equazioni *numeriche*, mutando la n del Bernoulli seniore (alle pagine 94. 95) nella m di Newton; e non poteva non essere, poichè sono i *figurati* medesimi tutti i Numeri, che *figurano* di lunga pezza nel famoso Newtoniano *Binomio*, ed innanzi destavano maraviglia tra le speculazioni di Wallis, di Mercatore, e dei due Calcolatori di Ulma rammentati nello *Scolio* (pag.ª 95) da Giacomo Bernoulli come parte istorica del tema da lui trattatosi in augumento dell' Opera *De ratiociniis in Ludo aleae* del celebre Ugenio.

Giova in secondo luogo non omettere di far palese la circostanza che dalle Tavole e dal discorso del Bernoulli sulle medesime sorge altresì chiarissimo l' avvertimento del subentrare alla *moltiplicazione* la *somma* (ed in senso opposto la *differenza*). . . . . *tam quod illi* (numeri figurati) *additione hae* (potestates) *multiplicatione generantur* (pag. 96), ch'è la gradita e reciproca Scoperta di *Budan*, impressa sino nel Titolo o Frontespizio della sua Stampa. Basta a convincersi di tutto questo rivoltar sotto l' occhio del Riguardante il Triangolo *Tavolare* (pag.ª 87) di tal maniera che la lista delle *Monadi* sotto il Numero Romano I. faccia un quarto di rivoluzione, come suol dirsi, sopra la carta, e di verticale ch' ella è per chi legga, venga ad essere orizzontale, ed il Triangolo appoggisi in forma di mensola sull' ultima punta o *Monade* Araba 1, che sotto sta al XII., e alla colonna dei *zeri*. Così, a maniera d' Epilogo, fattosi $m = 5$, e puntato il 6 sopra stante alla colonna delle *Monadi*, accanto al quale i sei *coefficienti* $(m+1)$ della *potenza* d' un *Binomio* di quinto grado (poichè la Tavola incomincia da 1 ovvero al *Monomio*), e sottintese le Lettere a, b, c, d, e, f accosto alle sei *Unità* nella loro colonna, e *sommando* dalla parte o lato opposto alla punta, si avranno altrettante *Somme* prima, seconda, terza, quarta, quinta, e sesta in quest' ordine quanto è il numero dei *Coefficenti*.

SOMMA I:^{a} $a, a+b, a+b+c, a+b+c+d, a+b+c+d+e,$
$a+b+c+d+e+f$
II.^{a} $a, 2a+b, 3a+2b+c, 4a+3b+2c+d, 5a+4b+3c+$
$2d+e, 6a+5b+4c+3d+2e+f$
III.^{a} $a, 3a+b, 6a+3b+c, 10a+6b+3c+d, 15a+10b$
$+6c+3d+e, 21a+15b+10c+6d+3e+f$
IV.^{a} $a, 4a+b, 10a+4b+c, 20a+10b+4c+d, 35a+20b$
$+10c+4d+e, 56a+35b+20c+10d+4e+f$
V.^{a} $a, 5a+b, 15a+5b+c, 35a+15b+5c+d, 70a+35b$
$+15c+5d+e, 126a+70b+35c+15d+5e+f$
VI.^{a} $a, 6a+b, 21a+6b+c, 56a+21b+6c+d, 126a+56b$
$+21c+6d+e, 252a+126b+56c+21d+6e+f$

Preso dalla prima l'ultimo termine . . $a+b+c+d+e+f$,
dalla seconda il penultimo . . . . . $5a+4b+3c+2d+e$,
dalla terza l'antepenultimo . . . . . $10a+6b+3c+d$,
dalla quarta (cioè a *scala* capovoltata
il primo addietro dell'antepenultimo) . $10a+4b+c$,
dalla quinta il secondo addietro . . . $5a+b$,
dalla sesta finalmente l'ultimo addietro . a,

comparisce il *misterioso* Triangolo de' *Coefficienti*, che va mentalmente in pratica raddrizzato per andar con ordine naturale dei *Coefficienti* de' termini del *Polinomio* o primo membro dell' Equazion' trasformata. Questo Triangolo coll' eguaglianza o ripetizione dei numeri stessi equidistanti dagli estremi o dal mezzo, e colla forma delle da me innante annotate *Funzioni* di *m*, fa manifesta l' origine sua dal *Binomio*, o dalle *Combinazioni* a due, a tre, a quattro, a cinque, ecc. di più Cose diverse senza ripeterne alcuna; e coll' aggiunta semplice delle Lettere il Rettangolo intero fa incontanente vedere d' aver in sè anco la 1.ma *Proposizione* di *Budan*, la quale nulla ha perciò di necessario legame colla seconda, che può star bene senza di lei, vale a dire esser la *Somma*, in ragion d' esempio, *quinta* (m^{sima}) di a, b, c, d, e, f uguale (con ordine inverso) ($m = 5$, $n = 6$) all'*exanomio* $f+5e+15d+35c+70b+126a$, come accade appuntino stando alla Dottrina del MDCCXIII. nel MDCCCVII. creduta novissima.

Poco più di Comento richiede il resto dell' Opera, salvo in alcuni punti non abbastanza a mio giudizio dilucidati, infra i quali non merita glossa la *Nota* (F); giacchè ognun vede, che conosciuto il *limite* inferiore della Radice più piccola tra 0 e 1, l' altro *limite* superiore alla Radice più grande tra 0 ed 1 (l' inferiore essendo sempre una vera frazione) si ha adopratane l' Equazione trasformata in $(x-1)$, cambiatesi le *positive* in *negative* radici, e rintracciando ancor quì il *limite* più vicino a 0 tra 0, e -1, ch' è il maggior *limite* (come fa appunto l' Autore); d' onde si ottiene per conseguente il secondo maggior *limite* (fattosi *positivo*), e rispetto all' unità complemento del primo. Parimente l' altra *Annotazione* (G) (a pag.ª 56) è di sua natura provata in virtù delle Dimostrazioni premesse, e le altre (H) (V*h*) non contengono che un lamento sul paragone di metodo più o meno sicuro e sollecito in esercitarsi *meccanicamente* da praticanti Abbachisti.

Avviene, nè sempre di rado, che aspirando a far numero tra gl' Inventori cospicui in ogni maniera di Facoltà o non s' imbatta l'umano intelletto, preoccupato dalla gloria della contemplata futura invenzione, nella via più semplice, più splendida, e più diretta, che vi conduca, o non abbia tutta presente l'Istoria delle già fatte puntuali od affini scoperte. Intorno a chè mi rammento, senza uscire della provincia delle Matematiche Discipline, come Bossut (che nel suo *Essai* di Matematici Annali faceva nascere Luca Paccioli, invece di San Sepolcro sul Tevere appiè dell' Appennino o Monte della Luna, in Borgo San Stefano presso a Luni, Sarzana, e nel Monte Bardone) annunciasse dentro al Volume II.° delle ,, Memorie dell' Instituto delle Scienze ed Arti di Francia ,, la Prova d' un Teorema nuovo (secondo lui) risguardante ad una porzione di Sfera geometricamente *cubabile*, al quale era giunto per mezzo d' un doppio Integrale complicatissimo *definito*, in addizione alle altre eleganze veramente mirabili della Volta-a-vela Fiorentina o Vivianèa del MDCXCII, laddove con facilissima Sintesi e più copiosi frutti di leggieri potea dimostrarsi ad onore della Scuola di Galileo (*c*). Avventura consimile di storica dimenticanza si è quella di *Budan* quando egli scrive, quasi chè nè veduto nè mai dimostrato si fosse (Cap. II. §. 23. p. 16. , indi in più luoghi, cioè C. IV. §. 41. a 27, §. 46. a 29, 30, 31. C. V. §. 54, a 37, 38, 39, §. 56. sul principio — *L'uniformité des signes* ecc. ,, Nota (L) a 59) ,, *Il est aisé d' observer que par ces transformations, on finit par avoir des coefficiens qui tous sont de même signe* — In tutti i Corsi o Rudimenti dell' Analisi dei Finiti ragionandosi delle *Serie*, e tra queste delle facili Algebriche segnatamente, si dice e si prova in genere che il primo Membro di un'Equazione ordinata del grado *m* rappresenta sempre il *Termine generale* d' una tal *Serie*, che fattevi le solite sustituzioni per l' incognita di 0, 1, 2, 3, 4, 5, ecc., le *differenze* m^{sime} dei *resultamenti* s' uguagliano, e perciò da lì in poi seguitan sempre e seguitar debbono col medesimo segno *più* o *meno*, e nel senso opposto (§.27) con tutte *variazioni* e niuna *permanenza* di segno (*d*).

Non ha tampoco bisogno di scolio ne' chiosa il cenno

(*c*) Tomo X. Parte II. delle ,, Memorie della Società Italiana delle Scienze ,, — *Pensieri Geometrici* - alla pag.^{i} 653. e successive.

(*d*) A motivo di non tralasciare le citazioni (*Note* .C) §. *Peut être du moins ecc.*) vedasi l' Edizione Fiorentina delle ,, Lezioni Elementari di Matematiche di Marie MDCCCIII. a ,, pag.^{a} 103. §. 282. , dove il Testo in ,, assoluto decide ,, ... e poichè ,, quì i termini dell' ultima colonna ,, son tutti *positivi*, lo saranno anche ,, quelli delle colonne seguenti, e *i re-* ,, *sultati non varieranno di segno.* ,, E si avvisa in termini terminanti l' uso datosi dall' Autore (Capo II.° §. 26. pag.^{a} 19.) sul tramutarsi delle *Somme* in *Differenze* dei *Coefficienti* surrogando a x nel *Polinomio* $x+1$, ecc. ecc., nè l' altro magistrale suo asserto al termine del Capitolo IV.° (§. 48. pagg. 33 - 34), taciuta la Prova. Imperciocchè, quanto al primo, essendo il proposto caso l' istesso che retrocedere da $x-1$ a x, e torna al medesimo che riunite una dopo dell' altra le grandezze omogenee sciogliere poi queste unioni con ordine inverso, e restituirle sciolte sì come eran da prima, e vale a dire distruggere colle Sottrazioni o *Differenze* le *Somme* fatte, e ciò con opera (fermi stanti i *segni*) diametralmente contraria. Pongo a maggior convinzione un esempio parlante nel Quinquepartito o *Grado* quarto del *Polinomio*; al qual fine copio la prima fattura relativa a $(x-1)$ (Ved.^{si} cinque §§. indietro).

$$\begin{array}{ll}
 & \underline{\quad a,\ b,\ c,\ d,\ e\quad} \\
 & a, a+b, a+b+c, a+b+c+a, a+b+c+d+e \\
\text{Somme} & a, 2a+b, 3a+2b, +c, 4a+3b+2c+d \\
\text{o} & a, 3a+b, 6a+3b+c \\
\text{Addizioni} & a, 4a+b \\
 & a
\end{array}$$

e so che in linea dell'*ipotenusa*, cominciando dalla punta a per il primo termine sino all'ultimo $a+b+c+d+e$, ricorrono nel *Polinomio* di $(x-1)$ i suoi *Coefficienti*. Dò addietro colla seconda fattura nel verso opposto di *Somme* ossia per mezzo di

$$\begin{array}{ll}
 & \underline{a, 4a+b, 6a+3b+c, 4a+3b+3c+d, a+b+c+d+e} \\
 & a, 3a+b, 3a+2b+c, a+b+c+d, e \\
\text{Sottrazioni} & a, 2a+b, a+b+c, d \\
\text{o} & a, a+b, c \\
\text{Differenze} & a, b \\
 & a
\end{array}$$

---

da farsene nel modo stesso di *Budan* — „ Giova questa dottrina a risolvere „ l' Equazioni (numeriche) per ap„ prossimazione, come vedremo „. Ripetesi l' uso (§. 346. a pag.^{a} 132.) in congiuntura delle Equazioni, le quali si nominano *irriducibili*.

la cui *ipotenusa* infila i *Coefficienti* da *a* sino in *e* primo ed ultimo del *Polinomio identico* in *x*, e ricalca all' indietro la medesima via col numero istesso di passi retrogradi. Tale e tanta è la fecondità e la vaghezza dei Numeri *figurati*, che dal possedere appien la notizia delle loro singolari proprietà ed affezioni, rendonsi incontinente patentissimi con pienezza di Prova al Calcolatore quei pochi articoli ancora dall' Autore gettati di passaggio nell' Opera per abbreviazione del Calcolo *manuale* o quasi meccanico (*e*), com' egli chiama (a pag.^{a} 77. *Nota* (*g*) sul VI.° Capitolo od ultimo) tenendo silenzio assoluto intorno al modo di dimostrarli, e confidando nell' intelligenza del Leggitore. I Paragrafi, per esempio, 23 e 26 del II.^{do} Capitolo lasciano indovinare (pag.^{e} 16. e 20) quanto possa accorciare opera e tempo il Calcolatore dato chè senza il generale *algoritmo* ami d' incamminarsi per una strada più corta a conoscere in una Equazione *cubica* le sue *radici*. Siano i quattro *Coefficienti* a, b, c, d; quei della *trasformata* nei posti omologhi sono $p, q, r, s,$ così dedotti dietro alla sola oculare ispezione dei primi, $p=a$, $q=3a+b$ (tre volte il primo insiem col secondo), $r=3a+2b+c$ (tre volte il primo con due il secondo col terzo una volta) $s=$ alla somma di tutti (frasi da ben ritenersi a memoria). Le riportate di sopra Equazioni *numeriche* come modelli di cotanta facilità si trasformano immantinente alla sola veduta de' lor *Coefficienti*, perchè il primo essendo sempre 1, ed il secondo 0, viene ad essere $3a+b=3$, $3a+2b+c=3$ col terzo *Coefficiente*, mentre l' ultimo equivale alla *somma* dei quattro dati *Coefficienti* della Equazion' *primitiva*. Così negli Esempj di pratica, i quali precedono, sonovi i *Coefficienti* 2, —3, 5, —3 .... 1, 0, —7, 7 .... 1, 0, —2, —5 .... ecc. ecc., e si hanno ad un tratto, ed a facil' memoria locale per la semplicità massima della Regola, 2, 3, 5, 1 .... 1, 3, —4, 1 .... 1, 3, 1, —6 *mentalmente* trovati.

Tra le difficoltà, che *Budan* prevedeva potersi objettare

(*e*) Nel Capo IV.° §. 40. pag.^{e} 27. leggesi *mécanisme*.

dagli Analisti, ed indisporli talmente da astenersi dall' uso del suo nuovo *Algoritmo* per la soperchia lunghezza di esso, accenna particolarmente quella dei casi che sian di più cifre le Radici dei numeri; e la risolve (§.° 48. a pag. 33. e *Nota* (H) alla pag.ª 56) in sul finire del IV.° Capitolo senza somministrarne la Prova. L'indagarla costa di certo men pena e parole che darne altrui sminuzzata comunicazione in iscritto. Il numero delle *trasformazioni* non può difatti mai oltrepassare quel delle *cifre* della *Radice* unito all' altro del valor cumulato delle medesime considerate come *unità* dell'infima specie. Manifesta cosa ella è nelle Equazioni numeriche di qualunque grado, tanto complesse quanto incomplesse, sì perfette come imperfette, e segnatamente a comodo di trovar le *Radici* di qualunque *ordine* (m^{sime}) da un gran *Numero* dato, in cambio delle comuni, ordinarie e fastidiose Operazioni Aritmetiche. Ed in vero il nuovo Metodo insegna (loco c.) che se il *limite* della *Radice* massima *positiva* (e della *negativa* col cambiamento noto di $+x$ in $-x$) facile a determinarsi mediante il massimo *coefficiente* negativo positivamente preso e cresciuto d' una *unità*, fosse composto di quattro *cifre*, come, v. gr., sarebbe 7346, le *trasformate* si comporrebbero allora considerando *unità* semplici le migliaja, indi le centinaja, poi le diecine, e le vere o scempie unità finalmente; donde deriva che ci vorrebbero quattro cambiamenti consecutivi x' in $x'-1$ (fattosi $x=1000x'$) x'' in $x''-1$ (fattosi $x=100x'$), x''' in $x'''-1$ (fattosi $x=10x'$), ed in ultimo x'''' in $x''''-1$ (fattosi $x''''=x$) cioè lasciato tal quale il primo Membro dell' Equazione propostasi, ed eseguiti i sette tentativi od esperimenti per le *Unità* superiori, tre per le seconde, quattro per le terze, sei per l' estreme inferiori s' arriverebbe all' intento di conoscere i *limiti* della Radice. La mutazione dei *Coefficienti* nelle *trasformate* s' effettua subito ferme le stesse *cifre*, e collocando a batter d' occhio la *virgola* nel suo posto, che separa gl' *interi* dai *decimali*. All' Equazione *numerica*

$x^4 \pm 531 x^3 \pm 796 x^2 \pm 405 x \pm 891 = 0$ subentrerebbero adunque
$x'^4 \pm 0{,}531 x'^3 \pm 0{,}796 x'^2 \pm 0{,}405 x' \pm 0{,}891 = 0$
$x''^4 \pm 5{,}31 x''^3 \pm 7{,}96 x''^2 \pm 4{,}05 x'' \pm 8{,}91 = 0$
$x'''^4 \pm 53{,}1 x'''^3 \pm 79{,}6 x'''^2 \pm 40{,}5 x''' \pm 89{,}1 = 0$ (*f*).

Or noverandosi tutte insieme le Operazioni, son tre i cambiamenti agevoli del primo Membro e quattro con esso da *trasformarsi*, casochè di quattro *cifre* composta sia la *Radice;* altrettanti esperimenti dipoi quante sono le *Unità* di Migliaja unite a quelle di Centinaja, di Decine, e Unità dell'istessa *Radice*. „ *Par exemple pour avoir le nombre* 812. *le nombre des tranformées seroit* 3 + 8 + 1 + 2 = 14 „: così termina il precitato Paragrafo nell' ipotesi dell' Equazione di terzo grado.

Non è nuovo applicare alla risoluzione delle Equazioni *numeriche* il serpeggiamento delle Curve di *Genere Parabolico* come nella Nota (U) ed (a) al VI.° Capitolo (pag.^{e} 65-66) il ridetto *Budan* si sarebbe prefisso. Egli è ben antico il suggerimento di rappresentare un *Polinomio* o primo Membro d' una Equazione in x (ascissa) con y (ordinata corrispondente), e mediante una *scala di proporzione* assegnare in numeri o veri o approssimanti i valori delle *radici* reali, dalla origine loro contando le ascisse sino ai punti d' intersezione o di contatto coll' asse del tortuoso perimetro della Curva. Su questo argomento si fonda il *Methodus differentialis* di Newton, illustrato dipoi da Stirling, e divenuto ancor fondamento della Dottrina delle *interpolazioni* d' ogni maniera; di quì nacque l' applicazione del *Polinomio*, come *Termine generale* alle Serie algebriche per differenze; queste differenze m^{sime} eguali in

$$\underset{0}{A}\,x^{m} + \underset{1}{A}\,x^{m-1} + \ldots\ldots + \underset{m-1}{A}\,x' + \underset{m}{A}\,x^{0}$$

dovevano condur presto ad immaginar l' *Algoritmo* o Aritmetico

---

(*f*) Guardisi l' *Exemple* consimile a pag.^{a} 24. §.° 35.° nel Capo III.°

Processo di *Budan;* e De Gua si compiacque d'illuminare con quest' istesso indirizzo la Teorica universale delle Equazioni, soprattutto la Regola famosissima Cartesiana. Non altrimenti da poche linee scritte nelle Opere di Pascal sulla misura di Superficie d' un Cilindro obliquo o scaleno, e dall' ingegnosa assegnatavi dimensione del contorno di tutte le *secondarie* Cicloidi eguagliato al perimetro di determinate Elissi coniche Apolloniane, mi venne in mente di annettere a quel solo filo (g) la Dottrina intiera degli Integrali, insegnata avanti di tutti dal Dalembert, dipendenti in genere dalla *rettificazione* delle Sezioni del Cono.

Tornando a dire della Regola di Descartes, prodotta alla pubblica luce la prima volta nel MDCXXXVII., un quadriennio dopo, cioè, della sua *Geometria*, la quale avrebbe più propriamente dovuto appellarsi Algebra applicata alle Linee, nell' Operetta di *Budan*, che ancora ho sott' occhio, sembra da alcuni squarci della medesima (§. 18. p.^{a} 10. *Nota* (B) al Testo p.^{a} 51. ove avvisa del plagio di *Harriot*, asserendolo sulla testimonianza di *Prestet* (MDCLXXXIX.) e di *Hudde* più indietro, *Nota* (L) p.^{e} 58 - 59, ed altrove), che lo Scrittore supponga non essere stata la *permanenza* e *varietà* dei *Segni* nelle Equazioni Algebraiche tenuta dai Geometri posteriori in quel grado di onoranza e valenza, che meritava, e più presto dimenticatasi che ricevuta ed accarezzata secondo il dovere. „ *Si dans cette esquisse des travaux* „ *de deux Siècles, concernant la resolution des Équations numeriques, l'immortel Descartes semble avoir été oublié, c'est* „ *que nous nous sommes réservé d'en parler ailleurs. Comment* „ *aurions-nous pu oublier* sa fameuse règle des variations et „ des permanences de signes . . . . . *qui longtemps negligèe,* „ *reçoit dans notre méthode une application nouvelle, et, en* „ *quelque sort, une nouvelle existence* „? Puntuali parole son queste di *Budan* alla fine del §.° 18.^{mo} del I.^{mo} Capo, o Storica Introduzione, che si raggira sul conciso racconto delle maniere varie di giungere al discoprimento delle *Radici* dell'Equazioni, e nominatamente *numeriche*, dall'età in cui fioriva Vieta sino al Secolo decimonono. Letto e tornato a rileggere i passi, dov' ei bramerebbe, che s' avesse avuto e si avesse dagli Algebristi più in pregio, e si rammemorasse con maggior lode quel ritrovato dell' esimio Francese Geometra, non è in riguardo alla Regola Cartesiana, nè alle prerogative inerenti alla natura e composizione delle Equazioni, andato più innanzi degli altri Trattatisti l' Autore nel profittarne a miglioramento del suo nuovo *algoritmo* per l' investigazione delle *Radici* sì *positive* che *negative*. Quella Regola didascalica è ripetuta come appunto Descartes la dettò il primo, ed è applicata come sapevasi nel Paragrafo 38.^{mo} alle diverse particolarità delle Equazioni ordinate. Solamente poteva aggiungersi, senza deviare dall'argomento, che in generale facendo sparire qualunque dei termini d' una Equazione (fuori dell'ultimo), risolvendo a quest' uopo Equazioni di *grado* inferiore, si moltiplicherebbe il *criterio* per riconoscere in maggior numero l'esistenza delle Radici *imaginarie* o impossibili, le quali non mancano di menomare il vantaggio, che proverrebbe dal contarsi le *permanenze* e le *varietà* dei *segni* indicanti il numero e qualità delle *Radici reali.*

(g) *De Calculo Integralium Exercitatio Mathematica* (MDCCXCII.) Sezioni I.^{a} e II.^{a}

Avrebbe *Budan* proceduto a dir vero più oltre in questa importantissima branca dell' Algebra se mai si verificasse il breve periodo finale del III.° Capitolo (§. 39. pag.^{a} 26), ove darebbe speranza somma di giugnere a dimostrare (*Nous avons même de fortes raisons de croire que la seconde proposition est applicable à une Équation quelconque*), che (2°) un' Equazione algebrica in x non può mai avere una, due, ..., n Radici comprese tra *zero* e p se la sua trasformata in $(x-p)$ non abbia in correspettività una, due, ..., n permanenze di segno di più dell' Equazione in x assegnata, posto ancora che questa *non avesse tutte Radici reali.* Il numero 1.°

o *diretto* ha in se stesso la *Prova*, che dipende dal percepire come supposto m numero delle *Radici tutte reali* in una data Equazione del *grado* m^{simo}, di cui l' incognita sia x, e le *positive* siano n, e perciò $m - n$ le *negative*, qualora la *trasformata* o *secondaria*, dove l' incognita sia $x - p$, abbia di più t *permanenze di segni* della prima, ch' è quanto dire t radici *negative* di più, non posson non esservi tra o e p altrettante *positive radici*; poichè $(m-n) + t + (n-t) = m$, numero fermo e invariabile. La probabilità di quel secondo Principio, il quale è l' *inverso* del primo, che verrebbe ad essere *universale* subito chè non debbano farci eccezione le *imaginarie* Radici, era inoltrata nella mente dell' Autore quando scriveva nel MDCCCVII. a tal segno chè rivenendo nel Paragrafo 52.^{mo} (pag.^{a} 30-37) del Capitolo V.° fa creder nel chiuderlo, prima degli Esempj che seguono, d' averne già rintracciata ed ormai possederne la Prova (*h*). Svanisce questa Prova a suo dire nella Nota (T) illustratrice del precitato Capitolo; ma l' Autore confortasi mercè d' uno, due, o tre in quattro errori di calcolo, il primo commesso da Newton, *Note* (V) *c*, p.^{a} 71, gli altri da Lagrange — *Note* (V) *d*, pag.^{a} 75 — *Note* (X) p.^{a} 81., e pag.^{a} 74 da Daniello Bernoulli, afferrando a sua difesa quell' Egida di Fontenelle che nelle severe Facoltà Matematiche si concepiscono Principj eccellenti più facilmente ed in maggior copia di quel che se ne trovino chiare, precise, e persuasive, cioè convincenti le Prove; tra i quali Principj può stare in compagnia di tanti altri anco la *Regola di Cartesio* considerata *universale*, ossia non soggetta a restrizione veruna: lo che vuole in sostanza significare non essergli mancato coraggio di far conquista della Dimostrazione sperata, la quale avrebbe immensamente accresciuta la supellettile delle Equazioni proposte a risolver-

---

(*h*) ,, *Comme nous n'apporterons point ici de preuves de la généralité de ce principe ecc.* ,, si o *letterali* o *numeriche*, quasi volesse egli dire coll' Epico Mantovano (*i*)

„ . . . . *si Pergama dextra*
„ *Defendi possent, etiam hac defensa fuissent* „

Il cimento è più forte; perocchè quì non si può andar del pari (sulla parola di Labus) colla certezza (anzi *evidenza*) della Dottrina *antiquaria*, dove si vuole in Istoria eroica e Mitologia (*k*) che l'interpretazione dei Monumenti *figurati* sia in ultima analisi „ lo scoprire un' incognita per mezzo d' altre, che digià sian manifeste „ !

(*i*) Lib. II. vv. 291-92 dell'ENEIDE.

(*k*) Tomo IX. Num.° XXVII. Marzo 1823. pag.ᵉ 86, 87 dell' **ANTOLOGIA** di Firenze.

RIFLESSIONI ANALITICHE

SULLA RIDUZIONE DEGLI ARCHI CIRCOLARI
AI LOGARITMI IMMAGINARJ

MEMORIA

DEL SIGNOR GIUSEPPE CALANDRELLI

Ricevuta adì 1. *Marzo* 1825.

1. All'occasione di una controversia nata tra i due chiarissimi analisti Conte Vincenzo Riccati, e Gioacchino Pessuti pubblicai già nel 1778. una Memoria sulla riduzione degli archi circolari ai logaritmi immaginarj. Tenni in seguito una letteraria corrispondenza coi celebri analisti d' Alembert, Conte Giordano Riccati, e Canterzani. Ora dunque, che mi si presentano ulteriori riflessioni sullo stesso argomento atte a togliere qualunque questione, queste tanto più volontieri manifesto, poichè derivate sono da' medesimi principj, che il grande Eulero propose già nel Cap. VII., ed VIII. della sua introduzione all' analisi degli infiniti.

2. Essendo a la base logaritmica, ed ω un numero infinitamente piccolo, onde soltanto non sia uguale a zero, al num. (114) stabilisce Eulero essere $a^{\omega} = 1 + \psi$; essendo anche ψ un numero infinitamente piccolo. Siccome poi può essere $\psi = \omega$; $\psi > \omega$; o finalmente $\psi < \omega$; dipendendo il valore di ψ dal valore di a; quindi pone $\psi = k\omega$, onde ne venga $a^{\omega} = 1 + k\omega$. Essendo poi a la base logaritmica, sarà $\omega = \mathrm{L}.(1 + k\omega)$.

3. Nel sistema de' logaritmi tabulari si pone $a = 10$, ed al numero (114) trova $k = 2,30258$; $\omega = 0,000000043429$. Al

numero (122) si riflette, che può prendersi a piacere la base logaritmica a; ma volendola prendere, onde sia $k = 1$, si trova la base logaritmica iperbolica compresa da 2,71828182845904523536028. Chiamando dunque e questa base, sarà $e^{\omega} = 1 + \omega$, e $\mathrm{L}.e^{\omega} = \omega = \mathrm{L}.(1 + \omega)$.

4. A norma del num. (115) essendo $e^{\omega} = 1 + \omega$ sarà $e^{i\omega} = (1 + \omega)^{i} = 1 + \frac{i\omega}{1} + \frac{i.(i-1)}{2}\omega^{2} + \frac{i.(i-1)\ (i-2)}{1.2.3}\omega^{3} + f$. Quando i rappresenti l'infinito, potrà farsi $\omega = \frac{z}{i}$ rappresentando z un numero qualunque finito, onde $\frac{z}{i}$ una frazione infinitesima, equivalente ad ω. In luogo di ω si sostituisca $\frac{z}{i}$, e sarà $e^{z} = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^{i}$ $= 1 + \frac{z}{i} + \frac{i.(i-1)}{1.2}\frac{z^{2}}{i^{2}} + \frac{i.(i-1)(i-2)}{1.2.3}\frac{z^{3}}{i^{3}} + \frac{i.(i-1)(i-2)(i-3)}{1.2.3.4}\frac{z^{4}}{i^{4}} + f$. Ma essendo i infinito, i fattori $i-1$; $i-2$; $i-3$; $i-4$; f; possono prendersi tutti pel medesimo fattore i; onde sostituendo sarà $e^{z} = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^{i} = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^{2}}{1.2} + \frac{z^{3}}{1.2.3} + \frac{z^{4}}{1.2.3.4} + \frac{z^{5}}{1.2.3\,4.5}$ $+ f$. Questa serie evidentemente, secondo il diverso valore di z, può rappresentare un diverso qualunque numero finito $1 + x$. Quindi secondo il numero (119) sarà $e^{z} = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^{i}$ $= 1 + x$, e perciò $(1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1 = \frac{z}{i}$, e $z = i\,(1+x)^{\frac{1}{i}} - i$.

Ma essendo $e^{z} = 1 + x$, sarà $z = \mathrm{L}\,(1+x) = i\,(1+x)^{\frac{1}{i}} - i$.

Si trova poi $(1+x)^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{1}{i}x - \frac{1.(i-1)}{i.2i}x^{2} + \frac{1.(i-1)\ (2i-1)}{i.2i.3i}x^{3}$ $- \frac{1.(i-1).(2i-1).(3i-1)}{i.2i.3i.4i}x^{4} + \frac{1.(i-1).(2i-1).)(3i-1)\ (4i-1)}{i.2i.3i.4i.5i}x^{5} - f$, ed essendo infinito il valore di i sarà $\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}$; $\frac{2i-1}{3i} = \frac{2}{3}$; $\frac{3i-1}{4i} = \frac{3}{4}$; $\frac{4i-1}{5i} = \frac{4}{5}\,f$.

Sostituendo dunque questi valori, sarà $(1+x)^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{x}{1} -$

$-\frac{x^2}{2i}+\frac{x^3}{3i}-\frac{x^4}{4i}+\frac{x^5}{5i}-f$. Dunque $i(1+x)^{\frac{1}{i}}-i=\text{L}.(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-f$. Con questo metodo, se in luogo di x fosse data $\sqrt{-1}$, si trova $\text{L}.(1+\sqrt{-1})=\frac{\sqrt{-1}}{1}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{-1}}{3}-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{-1}}{5}+\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{-1}}{7}-\frac{1}{8}+f$, come si vedrà (10).

5. Su di tutto ciò non ha luogo difficoltà alcuna, superando anche l' x il valore di 1 di quanto mai si voglia. Vuole dunque esaminarsi, se lo stesso possa dirsi, divenendo l' esponente della base e negativo, ossia uguale a $-\frac{z}{i}$, ed in secondo luogo essendo positivo, o negativo, ma nel tempo stesso immaginario l' esponente, supponendolo $\pm z\frac{\sqrt{-1}}{i}$. Primieramente data $e^{-\frac{z}{i}}$, sarà anche $e^{-\frac{z}{i}}=1-\frac{z}{i}$. Ciò può rilevarsi dall' essere $\frac{1}{1+\frac{z}{i}}=1-\frac{z}{i}$, poichè multiplicando per $1+\frac{z}{i}$ si trova $1=1-\frac{z^2}{i^2}$; equazione, che può aver luogo essendo $\frac{z^2}{i^2}$ infinitesimo di secondo ordine. Ma $e^{-\frac{z}{i}}=\frac{1}{e^{\frac{z}{i}}}=\frac{1}{1+\frac{z}{i}}$. Dunque può anche stabilirsi $e^{-\frac{z}{i}}=1-\frac{z}{i}$, e quindi $e^{-z}=(1-\frac{z}{i})^{i}$. Nella serie ora stabilita (4) in luogo di $+\frac{z}{i}$ sostituendo $-\frac{z}{i}$, sarà $e^{-z}=(1-\frac{z}{i})^{i}=1-\frac{z}{1}+\frac{z^3}{1.2}-\frac{z^3}{1.2.3}+\frac{z^4}{1.2.3.4}-\frac{z^5}{1.2.3.4.5}+f$. Questa serie può evidentemente rappresentarsi per $1-y$, dipendendo il valore di y dal valore di z. Sarà dunque $e^{-z}=(1-\frac{z}{i})^{i}=1-y$, onde $1-\frac{z}{i}=(1-y)^{\frac{1}{i}}$, $e^{-z}=i(1-y)^{\frac{1}{i}}-i$.

Ma $-z = \mathrm{L}.e^{-z} = \mathrm{L}.(1-y)^{i}$. Dunque stando alla serie dimostrata (4), sarà $\mathrm{L}.(1-y) = -\frac{y}{1} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5} - f$. Quando in luogo di $-y$ si sostituisca $-\sqrt{-1}$, sarà pur anche $\mathrm{L}.(1-\sqrt{-1}) = -\frac{\sqrt{-1}}{1} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-1}}{3} - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{-1}}{5} + \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{-1}}{7} - f$; come si vedrà in seguito (10). Quì opportunamente può rilevarsi, che nella dedotta equazione l' y non può mai superare l' unità, ma bensì dee essere sempre minore di 1. In fatti essendo $e^{-z} = 1 - y = \frac{1}{e^{z}}$, si comprende, che per quanto voglia immaginarsi grande il valore di e^{z}, e supponendolo anche infinito, darebbe $\frac{1}{e^{z}}$ uguale ad un infinitesimo, onde anche infinitesimo il valore di $1 - y$, e perciò y minore sempre di 1.

6. Si consideri ora l' esponente immaginario $+\frac{z\sqrt{-1}}{i}$, onde dato sia $e^{\frac{z\sqrt{-1}}{i}}$. Posto ciò, e posto anche $1^{\sqrt{-1}} = 1$, dico che sarà anche data l' equazione $e^{\frac{z\sqrt{-1}}{i}} = 1 + \frac{z\sqrt{-1}}{i}$. Si è già veduto (4) essere $e^{\frac{z}{i}} = 1 + \frac{z}{i}$, onde sarà ancora $e^{\frac{z\sqrt{-1}}{i}}$ $= (1 + \frac{z}{i})^{\sqrt{-1}} = 1 + \frac{\sqrt{-1}}{1}\,\frac{z}{i} - \frac{1+\sqrt{-1}}{1.2}\,\frac{z^2}{i^2} + \frac{3+\sqrt{-1}}{1.2.3}\,\frac{z^3}{i^3} - \frac{10}{1.2.3.4}\,\frac{z^4}{i^4} + \frac{40-10\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5.}\,\frac{z^5}{i^5} - \frac{190-90\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5.6}\,\frac{z^6}{i^6} + f$. Volendo continuare questa serie, si rileva sempre, che i termini dopo il primo 1, e secondo $\frac{z\sqrt{-1}}{1.i}$ sono reali, ed immaginarj, ma i reali sono tutti di un valore infinitesimo di secondo, terzo, quarto f grado, onde negligentabili rispetto al primo termine 1.

Gli immaginarj poi sono similmente tutti di un valore immaginario, ed infinitesimo di secondo, terzo, quarto f grado, e perciò negligentabili rispetto al secondo termine immaginario $\frac{z\sqrt{-1}}{1.i}$. Sarà dunque $e^{\frac{z\sqrt{-1}}{i}} = (1+\frac{z}{i})^{\sqrt{-1}} = 1+\frac{z\sqrt{-1}}{i}$.

7. Posta l' equazione $e^{\frac{z\sqrt{-1}}{i}} = 1 + \frac{z\sqrt{-1}}{i}$, e paragonata colla consimile $e^{\frac{z}{i}} = 1 + \frac{z}{i}$ (4), sarà ancora $e^{z\sqrt{-1}} = (1 + \frac{z\sqrt{-1}}{i})^i$ consimile ad $e^z = (1 + \frac{z}{i})^i$. Nella serie dunque la quale esprime il valore di $(1 + \frac{z}{i})^i$ (4) in luogo delle diverse potenze di $\frac{z}{i}$ si sostituiscano quelle di $\frac{z\sqrt{-1}}{i}$, e sarà $e^{z\sqrt{-1}} = (1 + \frac{z\sqrt{-1}}{i})^i = 1 + \frac{z\sqrt{-1}}{1} - \frac{z^2}{1.2} - \frac{z^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5.} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6.} - f = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} + f + \frac{z\sqrt{-1}}{1} - \frac{z^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{z^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - f = \cos. z + \mathrm{sen}. z\sqrt{-1}$; come anche può rilevarsi dallo stesso Eulero Cap. VIII. num. (134).

8. Sarà quindi $e^{z\sqrt{-1}} = (1 + \frac{z\sqrt{-1}}{i})^i = \cos. z + \mathrm{sen}. z\sqrt{-1}$, e perciò $1 + \frac{z\sqrt{-1}}{i} = (\cos. z + \mathrm{sen}. z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$, e $\frac{z\sqrt{-1}}{i} = (\cos. z + \mathrm{sen}. z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} - 1$, e finalmente $z\sqrt{-1} = i(\cos. z + \mathrm{sen}. z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} - i$. Ma $\mathrm{L}.e^{\frac{z\sqrt{-1}}{i}} = \frac{z\sqrt{-1}}{i} = \mathrm{L}.(1 + \frac{z\sqrt{-1}}{i}) = \mathrm{L}.(\cos. z + \mathrm{sen}. z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$. Dunque $z\sqrt{-1} = i\mathrm{L}(\cos. z + \mathrm{sen}. z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$. Di un' arco perciò qualunque z due sono i valori, cioè potrà

farsi $z = \frac{1}{\sqrt{-1}}(i(\cos.z + \text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} - i)$, e potrà anche essere $z = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, i\, \text{L}.(\cos.z + \text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$.

9. Come si è fatto al numero (6. e 7) si prenda a considerare l'esponente immaginario $-\frac{z\sqrt{-1}}{i}$, e nel modo medesimo potrà stabilirsi l'equazione $e^{-\frac{z\sqrt{-1}}{i}} = 1 - \frac{z\sqrt{-1}}{i}$, e quindi similmente sarà $e^{-z\sqrt{-1}} = (1 - \frac{z\sqrt{-1}}{i})^{i} = 1 - \frac{z\sqrt{-1}}{1} - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} + f = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} + f - \frac{z\sqrt{-1}}{1} + \frac{z^3\sqrt{-1}}{1.2.3} - \frac{z^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} + f = \cos.z - \text{sen}.z\sqrt{-1}$. Sarà quindi similmente, come si è rilevato (8) $e^{-z\sqrt{-1}} = (1 - \frac{z\sqrt{-1}}{i})^{i} = \cos.z - \text{sen}.z\sqrt{-1}$, e perciò $-\frac{z\sqrt{-1}}{i} = (\cos.z - \text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} - 1$; onde $z\sqrt{-1} = -i(\cos.z - \text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} + i$. Ma $\text{L}.e^{-\frac{z\sqrt{-1}}{i}} = -\frac{z\sqrt{-1}}{i} = \text{L}.(1 - \frac{z\sqrt{-1}}{i}) = \text{L}.(\cos.z - \text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$. Dunque $z\sqrt{-1} = -i\,\text{L}.(\cos.z - \text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$, e così saranno i due valori $z = -\frac{1}{\sqrt{-1}}(i(\cos.z - \text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} + i)$ o anche $z = \frac{1}{\sqrt{-1}}(-i\,\text{L}.(\cos.z - \text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}})$. Finalmente combi-

nando il valore di $z\sqrt{-1}$ già trovato (8) col presente, sarà $2.z\sqrt{-1} = i(\cos.z+\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} - i - i(\cos.z-\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} + i = i(\cos.z+\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} - i(\cos.z-\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$, o anche $2.z\sqrt{-1} = i\,\text{L}.(\cos.z+\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} - i\,\text{L}.(\cos.z-\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$. Generalmente poi parlando, si trova $\cos.z \times \tan.z = \text{sen}.z$. Dunque sarà ancora $2.z\sqrt{-1} = i\,\text{L}(\cos.z+\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} - i\,\text{L}.(\cos.z-\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} = i\,\text{L}.(1+\tan.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} + i\,\text{L}.(\cos.z)^{\frac{1}{i}} - i\,\text{L}.(\cos.z)^{\frac{1}{i}} - i\,\text{L}.(1-\tan.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} = i\,\text{L}.(1+\tan.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} - i\,\text{L}.(1-\tan.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} = \text{L}.(1+\tan.z\sqrt{-1}) - \text{L}.(1-\tan.z\sqrt{-1}) = \frac{\tan.z\sqrt{-1}}{1} + \frac{\tan.z^2}{2} - \frac{\tan.z^3\sqrt{-1}}{3} - \frac{\tan.z^4}{4} + \frac{\tan.z^5\sqrt{-1}}{5} + \frac{\tan.z^6}{6} - f(4) + \frac{\tan.z\sqrt{-1}}{1} - \frac{\tan.z^2}{2} - \frac{\tan.z^3\sqrt{-1}}{3} + \frac{\tan.z^4}{4} + \frac{\tan\,z^5\sqrt{-1}}{5} - \frac{\tan.z^6}{6} - f(5) = \frac{2\tan.z\sqrt{-1}}{1} - \frac{2\tan.z^3\sqrt{-1}}{3} + \frac{2\tan.z^5\sqrt{-1}}{5} - f$, onde per una pronta, e facile esattezza, e precisione, essendo $z=45°$, o anche minore, ovvero essendo la tangente 1, o minore ancora, sarà $z = \frac{\tan.z}{1} - \frac{\tan.z^3}{3} + \frac{\tan.z^5}{5} - \frac{\tan.z^7}{7} + f$.

10. Sia $z = 45°$, sarà $\cos.z = \cos.45° = \sqrt{\frac{1}{2}}$ e $\text{sen}.45° = \sqrt{\frac{1}{2}}$, essendo 1 il raggio, sarà poi (8) $z\sqrt{-1} = 45°\sqrt{-1} = i\sqrt{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{i}}(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} - i = i\,\text{L}.\sqrt{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{i}}(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$. Ma

$\sqrt{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{i}} = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2i}} = \frac{1}{(1+1)^{\frac{1}{2i}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2i}} = \frac{2i}{2i+1} = 1$. Può dunque dirsi $45^\circ\sqrt{-1} = i(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} - i = i\,\mathrm{L}.(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$. Si rileva poi $i(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} - i = i\mathrm{L}.(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} = \mathrm{L}.(1+\sqrt{-1})$ $= \frac{\sqrt{-1}}{1} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-1}}{3} - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{-1}}{5} + \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{-1}}{7} - \frac{1}{8} + f(4)$. Sarà dunque questa serie uguale a $45^\circ\sqrt{-1}$, onde $45^\circ =$ $1 + \frac{1}{2\sqrt{-1}} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4\sqrt{-1}} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6\sqrt{-1}} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8\sqrt{-1}} + f$; quantità immaginaria, la quale non può mai rappresentare l'arco di 45° rispetto al raggio 1. Si prenda ora il secondo valore di $z\sqrt{-1}$ già trovato (9), e sarà $z\sqrt{-1} = 45^\circ\sqrt{-1} =$ $-i(1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} + i = -i\mathrm{L}.(1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} = -\mathrm{L}.(1-\sqrt{-1})$ $= \frac{\sqrt{-1}}{1} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-1}}{3} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{-1}}{5} - \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{-1}}{7} + \frac{1}{8} + f$. Sarà dunque anche in questo caso ripresentato l'arco di 45° per una falsa serie immaginaria $1 - \frac{1}{2\sqrt{-1}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4\sqrt{-1}}$ $+ \frac{1}{5} - \frac{1}{6\sqrt{-1}} - \frac{1}{7} + f$. Per altro combinando le due serie, le quali esprimono il valore di $45^\circ\sqrt{-1}$ si trova $2.45^\circ\sqrt{-1}$ $= i(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} - i - i(1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} + i = i(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$ $- i(1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} = i\,\mathrm{L}.(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} - i\,\mathrm{L}.(1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$ $= \mathrm{L}.(1+\sqrt{-1}) - \mathrm{L}.(1-\sqrt{-1}) = \mathrm{L}\,\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} = \mathrm{L}.\sqrt{-1}$.

Quindi annientandosi l'immaginarietà si rileva L.$\sqrt{-1}=\frac{2\sqrt{-1}}{1}$ $-\frac{2\sqrt{-1}}{3}+\frac{2\sqrt{-1}}{5}-\frac{2\sqrt{-1}}{7}+\frac{2\sqrt{-1}}{9}-\frac{2\sqrt{-1}}{11}+f$; onde $45^\circ=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\frac{2\sqrt{-1}}{1}-\frac{2\sqrt{-1}}{3}+\frac{2\sqrt{-1}}{5}-\frac{2\sqrt{-1}}{7}+\frac{2\sqrt{-1}}{9}\right.$ $\left.-\frac{2\sqrt{-1}}{11}+f\right)=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+f$. Serie trovata dal Leibnitz rappresentante la vera, e reale lunghezza dell'arco di 45° rispetto al raggio 1. Come si trova $\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}=\sqrt{-1}$, così $\frac{1-\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}}=-\sqrt{-1}$. Dunque sarà L. $\frac{1-\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}}=$ L$-\sqrt{-1}=-\frac{2\sqrt{-1}}{1}+\frac{2\sqrt{-1}}{3}-\frac{2\sqrt{-1}}{5}+\frac{2\sqrt{-1}}{7}-\frac{2\sqrt{-1}}{9}$ $+\frac{2\sqrt{-1}}{11}-f$, e L.$\sqrt{-1}=-$L.$-\sqrt{-1}$. Se quindi si prenda un numero d qualunque positivo della serie aritmetica $+1$; $+5$; $+9$; $+13$; $+f$, sarà $+d45^\circ=\frac{1}{2\sqrt{-1}}d.\text{L}.\sqrt{-1}$ $=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\text{L}.\sqrt{-1}=\frac{d}{1}-\frac{d}{3}+\frac{d}{5}-f$. Se poi per $-d$ si prenda un numero negativo della serie medesima, ossia -1; -5; -9; $-f$, sarà $-d45^\circ=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(-d.\text{L}.\sqrt{-1}\right)=$ $\frac{1}{2\sqrt{-1}}\text{L}.-\sqrt{-1}=-\frac{d}{1}+\frac{d}{3}-\frac{d}{5}+\frac{d}{7}-f$.

11. Quando incontrasse difficoltà l'aver fatto $\sqrt{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{i}}=1$, allora il primo valore di $45^\circ\sqrt{-1}=i\text{L}.\sqrt{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{i}}\cdot(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$ potrà risolversi in $i\text{L}.(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}+i\,\text{L}.\sqrt{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{i}}=\text{L}.(1+\sqrt{-1})$

$+L.\sqrt{\frac{1}{2}}$. Ma $L.\sqrt{\frac{1}{2}} = L.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}L.\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}L.2 = -\frac{1}{2}L.(1+1) = -\frac{1}{2}L.(1+\tan.45°) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\tan.45°}{1} - \frac{(\tan.45°)^2}{2} + \frac{(\tan.45°)^3}{3} - \frac{(\tan 45°)^4}{4} + \frac{(\tan.45°)^5}{5} - \frac{(\tan.45°)^6}{6} + f\right)(4) = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + f\right)(4) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{12} - f.$ Si trova similmente $L.(1+\sqrt{-1}) = L.(1+\tan.45°\sqrt{-1}) = \frac{\tan.45°\sqrt{-1}}{1} + \frac{(\tan.45°)^2}{2} - \frac{(\tan 45°)^3\sqrt{-1}}{3} - \frac{(\tan.45°)^4}{4} + \frac{(\tan.45°)^5\sqrt{-1}}{5} + \frac{(\tan.45)^6}{6} - \frac{(\tan.45°)^7\sqrt{-1}}{7} - \frac{(\tan.45°)^8}{8} + f = \frac{\tan.45°\sqrt{-1}}{1} + \frac{1}{2} - \frac{(\tan.45°)^3\sqrt{-1}}{3} - \frac{1}{4} + \frac{(\tan.45°)^5\sqrt{-1}}{5} + \frac{1}{6} - \frac{(\tan.45°)^7\sqrt{-1}}{7} - \frac{1}{8} + f(4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + f + \frac{\tan.45°\sqrt{-1}}{1} - \frac{(\tan.45°)^3\sqrt{-1}}{3} + \frac{(\tan.45°)^5\sqrt{-1}}{5} - \frac{(\tan.45°)^7\sqrt{-1}}{7} + \frac{(\tan.45°)^9\sqrt{-1}}{9} - f.$ Dunque $L.(1+\tan.45°\sqrt{-1}) + L.\cos.45° = L.(1+\sqrt{-1}) + L.\sqrt{\frac{1}{2}} = L.(1+\sqrt{-1}) - \frac{1}{2}L.(1+1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + f + \frac{\tan 45°\sqrt{-1}}{1} - \frac{(\tan.45°)^3\sqrt{-1}}{3} + \frac{(\tan.45°)^5\sqrt{-1}}{5} - \frac{(\tan.45°)^7\sqrt{-1}}{7} + \frac{(\tan.45°)^9\sqrt{-1}}{9} - f - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{12} - f = \frac{\tan.45°\sqrt{-1}}{1} - \frac{(\tan.45°)^3\sqrt{-1}}{3} + \frac{(\tan.45°)^5\sqrt{-1}}{5} - \frac{(\tan.45°)^7\sqrt{-1}}{7} + \frac{(\tan.45°)^9\sqrt{-1}}{9} - f = \frac{\sqrt{-1}}{1} - \frac{\sqrt{-1}}{3} + \frac{\sqrt{-1}}{5} - \frac{\sqrt{-1}}{7} + \frac{\sqrt{-1}}{9} - f$, e perciò $45° = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + f$, valore vero, e reale. Questo medesimo metodo dà il secondo valore di $45°\sqrt{-1} = -L.(1-\sqrt{-1}) - L.\sqrt{\frac{1}{2}} = -L.(1-\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}L.(1+1) = -\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\frac{1}{12}-f+\frac{\sqrt{-1}}{1}-\frac{\sqrt{-1}}{3}+\frac{\sqrt{-1}}{5}-\frac{\sqrt{-1}}{7}+f(5)+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+f=\frac{\sqrt{-1}}{1}-\frac{\sqrt{-1}}{3}+\frac{\sqrt{-1}}{5}-\frac{\sqrt{-1}}{7}+f$. Sarà quindi anche il secondo valore di $45°=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+f$ vero e reale, e la già trovata equazione ritorna ancora, poichè si trova $2.45°\sqrt{-1}=L.(1+\sqrt{-1})+L.\sqrt{\frac{1}{2}}-L.\sqrt{\frac{1}{2}}-L.(1-\sqrt{-1})=L.\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}=L.\sqrt{-1}$. Questo facile ed evidente computo potea ben determinarsi, ed allora da questo medesimo computo, e da quanto si è rilevato (9) sarebbesi compreso, che $\frac{1}{\sqrt{-1}}L.(\cos.z+\text{sen}.z\sqrt{-1})$ uguaglia $\frac{1}{\sqrt{-1}}(L.(1+\tan.z\sqrt{-1})+L.\cos.z)$, quantità reale, benchè in apparenza sembri immaginaria. Quando dunque $L.(1+\tan.z\sqrt{-1})$ si possa risolvere in termini reali, ed immaginarj, sarà necessario che $L.\cos.z$ annienti tutti i termini reali. Da ciò dunque ne deriva un teorema non conosciuto, e questo è, che il logaritmo iperbolico, ossia $L.\cos.z$ debba uguagliare $-\frac{\tan z^2}{2}+\frac{\tan.z^4}{4}-\frac{\tan.z^6}{6}+f$. La dimostrazione di questo teorema dipende dal trovato valore dell' arco $z=45°$, al quale può ridursi un qualunque arco z. Sia dunque $z:45°=m:n$, onde $z=\frac{m}{n}45°$. Così per esempio l'arco z sia di 25°. 50'. 31''=93031''. Essendo 45° = 162000'', sarebbe $z:45°=m:n=93031:162000$, onde $z=\frac{93031}{162000}45°$. Da ciò dunque, e da quanto ora si è dimostrato, sarà $45°\sqrt{-1}=L.(1+\tan.45°\sqrt{-1})+L.\cos.45.°=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+f+\frac{\tan.45\sqrt{-1}}{1}-\frac{(\tan.45°)^3\sqrt{-1}}{3}+\frac{(\tan.45°)^5\sqrt{-1}}{5}-f$

$+ \mathrm{L.cos.}45^\circ$; ossia $-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\frac{1}{12}-f$. Dunque $z\sqrt{-1}=\frac{m}{n}45^\circ\sqrt{-1}=\frac{m}{n}\,\mathrm{L.}(1+\mathrm{tan.}\,45^\circ\sqrt{-1})+\frac{m}{n}\mathrm{L.cos.}45^\circ$ $=\frac{m}{n}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+f\right)+\frac{m}{n}\frac{\mathrm{tan.}45^\circ\sqrt{-1}}{1}-\frac{m}{n}\frac{(\mathrm{tan.}45^\circ)^3\sqrt{-1}}{3}$ $+\frac{m}{n}\frac{(\mathrm{tan.}45^\circ)^5\sqrt{-1}}{5}-f+\frac{m}{n}\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\frac{1}{12}-f\right)$. È evidente dunque, che il valore di $z\sqrt{-1}$ non può portare, che i soli termini immaginarj, poichè si annientano tutti gli altri reali. Ma la formola generale (9) porta $z\sqrt{-1}$ $=\mathrm{L.}(1+\mathrm{tan.}z\sqrt{-1})+\mathrm{L.cos.}z=\frac{\mathrm{tan.}z\sqrt{-1}}{1}+\frac{\mathrm{tan.}z^2}{2}-\frac{\mathrm{tan}\,z^3\sqrt{-1}}{3}$ $-\frac{\mathrm{tan.}z^4}{4}+\frac{\mathrm{tan.}z^5\sqrt{-1}}{5}+\frac{\mathrm{tan.}z^6}{6}-\frac{\mathrm{tan.}z^7\sqrt{-1}}{7}-f+\mathrm{L.cos.}\,z$. Dunque per la prima equazione non potendo portare il valore di $z\sqrt{-1}$, che i soli termini immaginarj, sarà in questa seconda equazione necessariamente $\mathrm{Lcos.}z=-\frac{\mathrm{tan}\,z^2}{2}+\frac{\mathrm{tan.}z^4}{4}-$ $\frac{\mathrm{tan.}z^6}{6}+f$; dovendo essere il valore reale di $z=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{\mathrm{tan.}45^\circ\sqrt{-1}}{1}\right.$ $\left.-\frac{m}{n}\cdot\frac{(\mathrm{tan.}45^\circ)^3\sqrt{-1}}{3}+\frac{m}{n}\frac{(\mathrm{tan.}45^\circ)^5\sqrt{-1}}{5}-f\right)=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{\mathrm{tan.}z\sqrt{-1}}{1}\right.$ $\left.-\frac{\mathrm{tan.}z^3\sqrt{-1}}{3}+\frac{\mathrm{tan.}z^5\sqrt{-1}}{5}-f\right)$ (9). Può anche assegnarsi una più semplice, e generale dimostrazione. Si è già dimostrato (9) essere $2z\sqrt{-1}=\frac{2\mathrm{tan.}z\sqrt{-1}}{1}-\frac{2\mathrm{tan.}z^3\sqrt{-1}}{3}+\frac{2\mathrm{tan.}z^5\sqrt{-1}}{5}-f$. Dunque sarà $z\sqrt{-1}=\frac{\mathrm{tan.}z\sqrt{-1}}{1}-\frac{\mathrm{tan.}z\,\sqrt{-1}}{3}+\frac{\mathrm{tan.}z^5\sqrt{-1}}{5}-f$. Ma $z\sqrt{-1}=\mathrm{L.}(\mathrm{cos.}z+\mathrm{sen.}z\sqrt{-1}\ =\mathrm{L.}(1+\mathrm{tan.}z\sqrt{-1})$ $+\mathrm{L.\ cos.}\ z$ (8. 9.) $=\frac{\mathrm{tan.}z\sqrt{-1}}{1}+\frac{\mathrm{tan.}z^2}{2}-\frac{\mathrm{tan.}z^3\sqrt{-1}}{3}-\frac{\mathrm{tan}\,z^4}{4}$ $+\frac{\mathrm{tan.}z^5\sqrt{-1}}{5}+\frac{\mathrm{tan.}z^6}{6}-f$ (4) $+\mathrm{L.cos.}z$. Dunque $\mathrm{L.cos.}z=-\frac{\mathrm{tan.}z^2}{2}$ $+\frac{\mathrm{tan}\,z^4}{4}-\frac{\mathrm{tan.}z^6}{6}+f$. Come si è fatto (9) per ottenere una pronta, e facile esattezza, e precisione, sia z non maggiore di 45.°, e per esempio si ponga $z = 25.° 50.' 31''$, la di cui tangente è 4843223, ed il coseno uguale a $.9000000 = \frac{9}{10}$. Sarà dunque $L.\cos.z = L.\frac{9}{10} = L.\left(1 - \frac{1}{10}\right) = -\frac{1}{10} - \frac{1}{200} - \frac{1}{3000} - \frac{1}{40000} - \frac{1}{500000} - f\ (5) = -.10000000 - .00500000 - .00033333 - .00002500 - .00000202 = -.10536033$. Sarà poi

$$-\frac{\tan.z^2}{2} + \frac{\tan.z^4}{4} - \frac{\tan.z^6}{6} + \frac{\tan.z^3}{8} - \frac{\tan.z^{10}}{10} + \frac{\tan.z^{12}}{12} - \frac{\tan.z^{14}}{14} + \frac{\tan.z^{16}}{16} - f$$

$$= -\frac{.23456809}{2} + \frac{.05502218}{4} - \frac{.01290644}{6} + \frac{.00302744}{8} - \frac{.00071014}{10}$$

$$+ \frac{.00016657}{12} - \frac{.00003907}{14} + \frac{.00000916}{16} - f = -.11728404 + .01375554$$

$-00215107 + .00037843 - .00007101 + .00001388 - .00000279 + .00000057 - f = -.10536050$. Rimane a conoscere come, anche nella supposizione di z non maggiore di 45°, i due valori di

$$z = \frac{1}{\sqrt{-1}}\left(i(\cos.z + \text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} - i\right) \text{ e } z = \frac{1}{\sqrt{-1}} L(\cos.z + \text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$$

(8), o anche gli altri due $z = -\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(i(\cos.z - \text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} + i\right)$

e $z = \frac{1}{\sqrt{-1}}\left(-i\ L.\ (\cos.\ z - \text{sen}.\ z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}\right)$ (9) possano dare un valore immaginario, come si è dimostrato nel caso di $z = 45°$, $\cos.\ z = \cos.\ 45° = \sqrt{\frac{1}{2}}$ (10). Si rifletta dunque essere $\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(i\ (\cos.\ z + \text{sen}.\ z\ \sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} - i\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}}\Big(i(1 + \tan.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} \times \cos.z^{\frac{1}{i}}\Big) - i\Big) = \frac{1}{\sqrt{-1}}\Big(\frac{\tan.z\sqrt{-1}}{1}$$

$+ \frac{\tan.z^2}{2} - \frac{\tan.z^3\sqrt{-1}}{3} - \frac{\tan.z^4}{4} + f(4)\Big) \times \cos.\, z^{\frac{1}{i}}$. Questa quantità è sempre immaginaria, qualunque sia il valore di $\cos.z^{\frac{1}{i}}$. Quando però $\cos.z$ porti un valore finito rispetto al raggio 1, potrà sempre esprimersi $\cos.z = \frac{1}{1+m}$; divenendo m un valore anche finito rispetto al raggio 1. Così per esempio se z fosse uguale a 65° sarebbe $\cos.z = .4227183 = \frac{1}{1+1.3656414}$. Dunque $\cos.z^{\frac{1}{i}} = \left(\frac{1}{1+m}\right)^{\frac{1}{i}} = 1 : \left(1 + \frac{m}{i} - \frac{m^2}{2i} + \frac{m^3}{3i} - \frac{m^4}{4i} + f\right) = 1$. Se quindi $\cos.z$ porti un valore finito rispetto al raggio, può generalmente dirsi con somma approssimazione $\cos.z^{\frac{1}{i}} = 1$, e questa quanto mai prossima uguaglianza può anche rilevarsi dall' essere $(1+m)^{\frac{1}{i}}$ maggiore di 1, ma minore di $1 + \frac{m}{i}$, poichè $\left(1 + \frac{m}{i}\right)^i$ supera $1 + m$. Ciò premesso venendo al secondo valore si trova $z = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, i\mathrm{L}.(\cos.z + \mathrm{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}}\, i\left(\mathrm{L}.\,(1 + \tan.\, z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} + \mathrm{L}.\,\cos.\, z^{\frac{1}{i}}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\, i\left(\mathrm{L}.(1 + \tan.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} + \mathrm{L}.\,1\right) = \mathrm{L}.\,(1 + \tan.\, z\sqrt{-1})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{\tan.z\sqrt{-1}}{1} + \frac{\tan.z^2}{2} - \frac{\tan.z^3\sqrt{-1}}{3} + \frac{\tan\, z^4}{4} + f(4)\right);$$

valore uguale all' immaginario ora trovato. Benchè però quanto mai prossimamente sia cos. $z^{\frac{1}{i}}=1$, quindi L.cos.$z^{\frac{1}{i}}=\mathrm{L.}1$; non con esattezza può dirsi iL. cos.$z^{\frac{1}{i}}=i\mathrm{L.}1=0$, ma bensì iL. cos.$z^{\frac{1}{i}}=$ L.cos.z. Calcolando dunque su di questo principio sarà $z=\frac{1}{\sqrt{-1}}\,i\,\mathrm{L.}(\cos.z+\mathrm{sen.}z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}=$

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}(i\mathrm{L.}(1+\tan.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}\times\cos.z^{\frac{1}{i}})=$$

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}(i\,\mathrm{L.}(1+\tan.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}+\mathrm{L.}\cos.z)^{\frac{1}{i}})=$$

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\,i\,(\mathrm{L.}(1+\tan.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}+i\,\mathrm{L.}\cos.z)^{\frac{1}{i}}=$$

$\frac{1}{\sqrt{-1}}(\mathrm{L.}(1+\tan.z\sqrt{-1})+\mathrm{L.}\cos.z)$; quantità dimostrata ora vera e reale. Quanto si è detto rispetto i due valori riferiti (8), lo stesso può dirsi degli altri due (9).

12. Date l' equazioni $2.45^\circ\sqrt{-1}=\mathrm{L.}\sqrt{-1}=\frac{2\sqrt{-1}}{1}-\frac{2\sqrt{-1}}{3}+\frac{2\sqrt{-1}}{5}-\frac{2\sqrt{-1}}{7}+\frac{2\sqrt{-1}}{9}-\frac{2\sqrt{-1}}{11}+f$, sarà ancora (I) $90^\circ\sqrt{-1}=\mathrm{L.}\sqrt{-1}$, e quindi $90^\circ=\frac{1}{\sqrt{-1}}\mathrm{L.}\sqrt{-1}=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{2\sqrt{-1}}{1}-\frac{2\sqrt{-1}}{3}+\frac{2\sqrt{-1}}{5}+f\right)=2-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-\frac{2}{7}+\frac{2}{9}-f$, serie esprimente la lunghezza dell' arco di 90° doppio di 45°. Dalla medesima equazione $90^\circ\sqrt{-1}=\mathrm{L.}\sqrt{-1}$ può dedursi $2.90\sqrt{-1}=2\mathrm{L.}\sqrt{-1}$, onde (II) $\mathrm{L.}-1=\frac{4\sqrt{-1}}{1}-\frac{4\sqrt{-1}}{3}+\frac{4\sqrt{-1}}{5}-\frac{4\sqrt{-1}}{7}+f$, e quindi anche (III)

$90^\circ = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\,\mathrm{L}.-1 = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \times \left(\frac{4\sqrt{-1}}{1} - \frac{4\sqrt{-1}}{3} + \frac{4\sqrt{-1}}{5} - \frac{4\sqrt{-1}}{7} + f \right) = 2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \frac{2}{9} - f$, serie, come sopra, doppia di 45°. Per *m* rappresentando un numero intero qualunque dispari positivo, o negativo, sarà sempre (IV) $\pm m.90^\circ = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(\pm m\mathrm{L}.-1) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\,\mathrm{L}.-1 = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\pm \frac{m.4\sqrt{-1}}{1} \mp \frac{m.4\sqrt{-1}}{3} \pm \frac{m.4\sqrt{-1}}{5} \mp \frac{m.4\sqrt{-1}}{7} \pm f\right)$. Essendo $2.90^\circ\sqrt{-1} = 180^\circ\sqrt{-1} = 2\,\mathrm{L}.\sqrt{-1}$, ne viene anche (V) $180^\circ = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\mathrm{L}.-1 = \frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{4\sqrt{-1}}{1} - \frac{4\sqrt{-1}}{3} + \frac{4\sqrt{-1}}{5} - \frac{4\sqrt{-1}}{7} + f\right) = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - f$, serie esprimente la lunghezza vera e reale dell'arco di 180°, quadruplo di 45°, e doppio di 90°. Essendo ora dimostrato $180^\circ = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\mathrm{L}.-1$, ovvero $180^\circ\sqrt{-1} = \mathrm{L}.-1$, sarà (VI) la lunghezza dell'arco di 180° al raggio 1, ossia la circonferenza al diametro come $\mathrm{L}.-1 : \sqrt{-1}$; come $\frac{4\sqrt{-1}}{1} - \frac{4\sqrt{-1}}{3} + \frac{4\sqrt{-1}}{5} - \frac{4\sqrt{-1}}{7} + \frac{4\sqrt{-1}}{9} - \frac{4\sqrt{-1}}{11} + f$ a $\sqrt{-1}$; come $4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + f : 1$. Questo è il teorema già proposto dal Bernoulli, il quale ha eccitate tante questioni tra i più profondi analisti, perchè mai proposto con questa evidenza, e precisione. Dalla dimostrata equazione $180^\circ = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\mathrm{L}.-1 = \frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{4\sqrt{-1}}{1} - \frac{4\sqrt{-1}}{3} + \frac{4\sqrt{-1}}{5} - \frac{4\sqrt{-1}}{7} + f\right)$ può anche dedursi $2.180^\circ = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,2.\mathrm{L}-1 = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\mathrm{L}.1 = \frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{8\sqrt{-1}}{1} - \frac{8\sqrt{-1}}{3} + \frac{8\sqrt{-1}}{5} - \frac{8\sqrt{-1}}{7} + f\right)$ onde (VII) $180^\circ = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\,\mathrm{L}.1 =$

$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\frac{8\sqrt{-1}}{1}-\frac{8\sqrt{-1}}{3}+\frac{8\sqrt{-1}}{5}-\frac{8\sqrt{-1}}{7}+f\right)$. Avendo in vista l'equazione $180^\circ=\frac{1}{\sqrt{-1}}\text{L.}-1$, e prendendo un numero qualunque intero disparo positivo, o negativo, come $\pm1;\pm3;\pm5;\pm7;\pm f$, e generalmente $\pm p$, ne verrà sempre (VIII) $\pm p.180^\circ=\frac{1}{\sqrt{-1}}(\mp p\text{L.}-1)=\frac{1}{\sqrt{-1}}\text{L.}-1=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\pm\frac{p.4\sqrt{-1}}{1}\mp\frac{p.4\sqrt{-1}}{3}\pm\frac{p.4\sqrt{-1}}{5}\mp\frac{p.4\sqrt{-1}}{7}\pm\frac{p.4\sqrt{-1}}{9}\mp f\right)$. Prendendo poi l'equazione $180^\circ=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\text{L.}1$, e posto che q rappresenti $\pm0;\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\pm f$, o generalmente zero, o qualunque numero intero positivo o negativo, paro o disparo, sarà sempre (IX) $\pm q.180^\circ=\frac{2}{2\sqrt{-1}}(\pm q\text{L.}1)=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\text{L.}1=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\pm\frac{q.8\sqrt{-1}}{1}\mp\frac{q.8\sqrt{-1}}{3}\pm\frac{q.8\sqrt{-1}}{5}\mp\frac{q.8\sqrt{-1}}{7}\pm\frac{q.8\sqrt{-1}}{9}\mp f\right)$. Tornando alla prima equazione $2.45^\circ\sqrt{-1}=\text{L.}\sqrt{-1}=\frac{2\sqrt{-1}}{1}-\frac{2\sqrt{-1}}{3}+\frac{2\sqrt{-1}}{5}-\frac{2\sqrt{-1}}{7}+\frac{2\sqrt{-1}}{9}-f$, potrà anche dedursi $4.2.45^\circ\sqrt{-1}=4\text{L.}\sqrt{-1}=\frac{8\sqrt{-1}}{1}-\frac{8\sqrt{-1}}{3}+\frac{8\sqrt{-1}}{5}-\frac{8\sqrt{-1}}{7}+\frac{8\sqrt{-1}}{9}-f$, onde $360^\circ\sqrt{-1}=4\text{L.}\sqrt{-1}=\text{L.}1$ e quindi (X) $360^\circ=\frac{1}{\sqrt{-1}}\text{L.}1=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{8\sqrt{-1}}{1}-\frac{8\sqrt{-1}}{3}+\frac{8\sqrt{-1}}{5}-\frac{8\sqrt{-1}}{7}+\frac{8\sqrt{-1}}{9}-f\right)=8-\frac{8}{3}+\frac{8}{5}-\frac{8}{7}+\frac{8}{9}-f$; serie rappresentante la vera, e reale lunghezza dell'intera circonferenza 360°, ottupla di 45°, quadrupla di 90°, e dupla di 180°. Ma $2.360^\circ=\frac{1}{\sqrt{-1}}2\text{L.}1=\frac{1}{\sqrt{-1}}\text{L.}1=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{16\sqrt{-1}}{1}-\frac{16\sqrt{-1}}{3}+\frac{16\sqrt{-1}}{5}-\frac{16\sqrt{-1}}{7}+\frac{16\sqrt{-1}}{9}-f\right)$. Dunque si potrà dire ancora (XI) $360^\circ=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\text{L.}1=$

$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\frac{16\sqrt{-1}}{1}-\frac{16\sqrt{-1}}{3}+\frac{16\sqrt{-1}}{5}-\frac{16\sqrt{-1}}{7}+\frac{16\sqrt{-1}}{9}-f\right)$ $=8-\frac{8}{3}+\frac{8}{5}-\frac{8}{7}+\frac{8}{9}-f$. Anche in questo caso dell' intera circonferenza, o di 360°, prendendo $\pm q$ nel senso già indicato, sempre si rileverà (XII) $\pm q.360^\circ=\frac{1}{\sqrt{-1}}(\pm q\text{L}.1)$ $=\frac{1}{\sqrt{-1}}\text{L}.1=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\pm\frac{q8\sqrt{-1}}{1}\mp\frac{q.8\sqrt{-1}}{3}\pm\frac{q.8\sqrt{-1}}{5}\mp\frac{q\,8\sqrt{-1}}{7}\pm\right.$ $\left.\frac{q.8\sqrt{-1}}{9}\mp f\right)$, o anche (XIII) $\pm q.360^\circ=\frac{1}{2\sqrt{-1}}(\pm q\text{L}.1)=$ $\frac{1}{2\sqrt{-1}}\text{L}.1=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\pm\frac{q.16\sqrt{-1}}{1}\mp\frac{q.16\sqrt{-1}}{3}\pm\frac{q.16\sqrt{-1}}{5}\mp\right.$ $\left.\frac{q.16\sqrt{-1}}{7}\pm\frac{q\,16\sqrt{-1}}{9}\mp f\right)$.

13. Sono state dedotte tutte queste verità dalle formole generali dell'arco z applicate all'arco di 45.° Possono però le medesime formole generali dell' arco z applicarsi all' arco di 90°; 180°; 360°, e così determinare la misura, o lunghezza de' medesimi archi. Sia dunque $z=90^\circ$, onde $\cos.z=\cos.90^\circ=0$, e $\text{sen}.z=\text{sen}.90^\circ=1$. Dalle formole generali dell'arco z (9) sarà $2.90^\circ\sqrt{-1}=i(\cos.z+\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}-i(\cos.z-\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$ $=i\text{L}.(\cos.z+\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}-i\,\text{L}.(\cos.z-\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}=$ $i\text{L}.(\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}-i\,\text{L}.(-\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}=\text{L}.\frac{\sqrt{-1}}{-\sqrt{-1}}$. Dunque $90^\circ=$ $\frac{1}{2\sqrt{-1}}\text{L}.-1=\frac{1}{\sqrt{-1}}\text{L}.(-1)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{-1}}\text{L}.\sqrt{-1}$; equazioni già dimostrate (12. III.) (12. I.). Sia ora l' arco di 180°, onde $\cos.180^\circ=-1$, e $\text{sen}.180^\circ=-0$. Sarà dunque dalle medesime formole generali per l' arco z (9), $2.180^\circ\sqrt{-1}=$ $i(\cos.180^\circ+\text{sen}.180^\circ\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}-i(\cos.180^\circ-\text{sen}.180^\circ\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$

$=iL.(\cos.180^\circ+\text{sen}.180^\circ\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}-iL.(\cos.180^\circ-\text{sen}.180^\circ\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$ $=iL.(-1)^{\frac{1}{i}}-iL.(-1)^{\frac{1}{i}}=L\frac{-1}{-1}=L.1$. Dunque $180^\circ=$ $\frac{1}{2\sqrt{-1}}L.1=\frac{1}{\sqrt{-1}}L.(1)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{-1}}L.-1$; equazioni dimostrate (12. VII.) (12. V.). Sia finalmente l'intera circonferenza 360°, e perciò $\cos.360^\circ=1$, e $\text{sen}.360^\circ=0$. Insistendo dunque sempre sulle formole generali per l'arco z (9), si rileverà $2.360^\circ\sqrt{-1}=i(\cos.360^\circ+\text{sen}.360^\circ\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$ $-i(\cos.360^\circ-\text{sen}.360\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}=iL.(\cos.360^\circ+\text{sen}.360^\circ\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$ $-iL.(\cos.360^\circ-\text{sen}.360^\circ\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}=iL.1^{\frac{1}{i}}-iL.1^{\frac{1}{i}}=L.1$. Dunque $360^\circ=\frac{1}{2\sqrt{-1}}L.1=\frac{1}{\sqrt{-1}}L.(1)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{-1}}L.1$; equazioni già dimostrate (12. XI.) (12. X.) Tutte queste equazioni $45^\circ=\frac{1}{2\sqrt{-1}}L.\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}L.\sqrt{-1}$; $2.45^\circ=90^\circ=$ $\frac{1}{2\sqrt{-1}}2L.\sqrt{-1}=\frac{1}{\sqrt{-1}}L.\sqrt{-1}$; $2.90^\circ=180^\circ=$ $\frac{1}{\sqrt{-1}}2L.\sqrt{-1}=\frac{1}{\sqrt{-1}}L.-1$; $2.180^\circ=360^\circ=$ $\frac{1}{\sqrt{-1}}2L.-1=\frac{1}{\sqrt{-1}}L.1$, si conoscevano già; ma ricoperte da una misteriosa oscurità hanno dato luogo a tante questioni. Io mi lusingo, che sì fatte questioni debbano terminare, poichè la verità delle medesime equazioni non rimane più occulta, ma bensì evidentemente dimostrata.

ESAME

dell' Osservazione del passaggio di Venere sul disco solare, fatta in Roma nel 1761. dal celebre Padre Audifredi Domenicano nel Convento di Santa Maria sopra Minerva

DEL SIG. ANDREA CONTI ASTRONOMO

Ricevuto adì 14: *Dicembre.* 1825.

La favorevole opinione, che vivente procacciossi il P. Audifredi Domenicano, (*a*) e che dopo la morte lo ha reso pur celebre nella repubblica delle lettere, non fu soltanto il frutto delle teologiche e bibliografiche sue cognizioni, le quali a dovizia possedeva; ma di quelle altresì moltiplici e non comuni, che si acquistò nello studio dell' Astronomia. Senza altro stimolo che di un particolar genio per questa scienza, vi si applicò indefessamente, ed oltre l' applicazione procurò a proprie spese di fornirsi di quei mezzi, senza de' quali poco si può progredire nella detta scienza. Fra gli altri, circa la metà del secolo passato preparossi, ad alimento della sua nobile passione, un conveniente Osservatorio nel Convento di S.ª Maria sopra Minerva, il quale fornì di

---

(*a*) Il Padre Andifredi nacque a Saorgio il dì 2. Febbrajo del 1714. entrò nell' ordine di S. Domenico nel 1730; e nel 1759. ottenne in Roma il posto di primo bibliotecario della Casanatense. Niuno al par di Lui meritava un posto sì onorevole per aver in se riunite con mirabile armonia molte cognizioni disparatissime, teologiche cioè, matematiche, astronomiche, antiquarie, di storia naturale, critiche, bibliografiche, e la profonda conoscenza delle lingue latina e greca. Quest'uomo raro, nato e vissuto alle lettere ed alla pietà, ai tanti varii suoi studii seppe unire una esatta osservanza del professato Istituto, fu sempre fervoroso negli atti del Divin culto; umile e tenerissimo verso i poveri. Morì l' Andifredi in Roma nel dì 3. Luglio del 1794, superato avendo di cinque mesi ed un giorno l' ottantesimo anno di sua età.

macchine opportune, onde con frutto occuparsi nella scienza degli astri. All' instancabile assiduità congiunse il nostro celebre Domenicano tutte quelle cautele, che la sua perizia gli suggeriva, per ottenere dalle sue occupazioni plausibili risultati; e gli Astronomi non tardarono a conoscere i frutti di tante di Lui fatiche nelle diverse interessanti raccolte di osservazioni pubblicate dal 1753. al 1770.

Fra queste osservazioni trovasi anche quella del passaggio di Venere sul disco solare accaduto nel 1761., che unita ai risultati che ne dedusse, pubblicò nel 1762. senza apporvi il suo nome (come comunemente solea praticare) in un opuscolo che porta il titolo *Transitus Veneris ante Solem observati Romae apud P. P. S. Mariae super Minervam VI. Junii* 1761. *Expositio Historico-Astronomica*.

Peraltro questa osservazione del passaggio di Venere non incontrò il favore del P. Pingré ch. Astronomo francese, il quale in una Memoria che ha per titolo *Observations Astronomiques pour la determination de la Parallaxe du Soleil* ... inserita fra quelle dell' Accademia di Parigi dell' anno 1761. alla pag. 474. parlando dell' osservazione fatta a Roma dal nostro Audifredi così si esprime = La longitude de Saint-Pier-
„ re de Rome est, selon la *Connoissance des temps*, de 40'
„ 37". orientale; mais cette ville est d'une grande étendue.
„ Est-ce a Saint-Pierre même, ou du moins sous le même
„ méridien, que le passage de Venus a été observé par un
„ Anonyme, qui fixe le commencement de la sortie a 21.^{or}
„ 9'. 36"? C'est dit-on au Couvent de Sainte-Marie sur la
„ Minerve. Je crois que l'eglise de Saint-Pierre est à une
„ extrémité de la ville . . . et que le Couvent de S. M. sur
„ la Minerve est vers le milieu de la ville . . . . . Pour faire
„ usage de l'observation Romaine il faudroit connoitre avec
„ precision cet intervalle en latitude, e surtout en longitu-
„ de =. In seguito in altra Memoria che porta il titolo *Nouvelle recherche sur la détermination de la Parallaxe du Soleil* . . . . . ec. che trovasi fra quelle dell' Accademia di

Parigi del 1765. alla pag. 15· così si esprime il Pingré. = L'observ- ,, vation de Rome est faite par un Anonyme; il est donc impos- ,, sible de juger quel est le degré de précision qu' on peut y ,, supposer: pour moi j'y présume au contraire de l' imper- ,, fection .... En comparant l'observation qui y a été faite avec ,, celle de Paris, telle qu' elle a été choisie par l'auteur, la ,, parallaxe du Soleil n'est que de 6".16; et si pour l'observation ,, de Paris on prend celle de M. Maraldi la parallaxe est re- ,, streinte a 2", 55; la même observation de Rome comparée ,, avec celle de Greenwich, donne pour parallaxe 5", 32. La ,, prudence auroit dû conseiller la suppression totale de cette ,, observation ,, .

Conviene osservare, che secondo Pingré la longitudine di S. Pietro rispetto all' Osservatorio di Parigi è di 40'. 37"; onde quella del Convento della Minerva sarebbe di 40'. 42". Il P. Audifredi poi alla pag. 33. dell'opuscolo sopra citato la pone di 40' 20"; ed in altro opuscolo pubblicato nel 1766. che ha per titolo *De Solis Parallaxi commentarius* alla pag. 54. la fissa di 40'. 16". Ci sia permesso fra queste longitudini produr anche quella che ottenemmo dai risultati di una triangolazione da noi eseguita, la quale ebbe per iscopo di fissare la posizione geografica de' principali luoghi di Roma. Tali risultati sono inseriti nell' ottavo tomo degli opuscoli Astronomici pubblicati nel 1824.

Posta la longitudine della Specola del Collegio Romano dal meridiano di Parigi di 40'. 33", come costa da un gran numero di osservazioni, e la latitudine geografica di 41.° 53'. 51", 9; la longitudine del Convento di S.ª M.ª sopra Minerva si trova (*a*) di 40'. 32", 5. dal meridiano dell'Osservatorio di Parigi, e la latitudine di 41.°. 53' 52". La longitudine dunque da noi trovata sensibilmente differisce da quella stabilita da Pingré, ed

---

(*a*) Opuscoli Astronomici di Giuseppe Calandrelli, Andrea Conti e Giacomo Ricchebach An. 1824. pag. 136.

anche da quella fissata dall' Audifredi. Quindi è che posta anche esatta l'osservazione del passaggio di Venere fatta dall' Audifredi, i calcoli ed i risultati fondati sopra un elemento essenziale, ma inesatto, non possono essere che erronei.

Giustamente riflette dunque il Sig. Barone di Zach nel tomo 2.° della corrispondenza astronomica pag. 376. trattando dei risultati non soddisfacenti che Pingré deduce dall' osservazione dell' Audifredi = . . . il m'est impossible de sup-
„ poser, *così si esprime il ch. Barone di Zach*, qu'un astrono-
„ me aussi sage, aussi intelligent que le P. Audifredi, ait
„ pu faire et produire une aussi mauvaise observation. La
„ longitude du Convent de la Minerve est-elle bien déter-
„ minée? Nous ne la connaissons pas; mais nous sommes per-
„ suadés, que lorsqu'on voudra recalculer cette observation
„ sur des élémens vérifiés, et rectifiés, on trouvera le preu-
„ ves qui confirmeront et augmenteront la juste réputation,
„ dont a toujours joui ce savant astronome, qui au reste a
„ bien d' autres titres encore à sa juste célébrité si bien ac-
„ quise et si bien méritée = .

Sottomettendo ad un esatto esame l'osservazione del passaggio di Venere fatta dall' Audifredi, introducendo ne'calcoli precisi elementi su' quali si può senza alcun dubbio fondarsi, mi lusingo di far conoscere in questo scritto, quanto mal si convenga a questa osservazione la taccia d' inesatta datale dal ch. Pingré. Che anzi si vedrà palesemente che dall' osservazione del nostro Audifredi, e precisamente da quella del secondo contatto interno de' lembi del Sole e di Venere, si ottengono plausibili risultati, e non diversi da quelli che gli astronomi han dedotti dal paragone delle osservazioni fatte nel passaggio di Venere del 1769.

Nel tomo 2° dell' Astronomia Teorico-pratica del ch. Delambre, alla pag. 473. si pone la congiunzione di Venere col Sole nel 1761. il dì 6. Giugno alle 5.^{or} 44'. 34''. tem. med. al meridiano di Parigi. Per questo istante ho trovata dalle tavole dello stesso Delambre la longitudine

del Sole di . . . . = 2^s.15° 36′ 30″.4;
onde longitudine della Terra . . . . . = 8^s.15°.36′.30″.4.
logaritmo del raggio vettore = log. R. = 0,0066604.
Moto orario del Sole . . . . = 2′. 23″. 38.
Semidiametro del Sole . . . . = 15. 46. 81.

Inoltre dalle tavole di Venere calcolate dal Sig. Reboul Sugli elementi del Sig. De Lindenav, pubblicate a Marsiglia nel 1811, ho tratto pel medesimo istante

Longitudine eliocentrica di Venere = $8.^s$ 15.° 36.′ 28.″ 7
Latitudine eliocentrica aus. . . . . = 3. 44, 2
Moto orario in longitudine eliocen. . = 3. 57, 91
Moto relativo . . . . = 1. 34, 53
Moto orario in latitud. eliocen. . . = 14, 10
Logaritmo del raggio vettore . . . = 9.8611401.
Log. della distanza accorciata = log. r = 9.8611399

Ora è evidente, che essendo la longitudine della Terra più grande della longitudine eliocentrica di Venere di 1″, 7, la congiunzione deve esser stata il dì 6. Giugno alle $5.^{or}$ 44′. 34″ + 1′. 4″, 7, ossia alle $5.^{or}$ 45′. 38″, 7. tem. med. al meridiano di Parigi; pel qual tempo si trova

Longitudine della Terra . . . . . = 8^s. 15°. 36′. 33″, 0
Longitudine eliocentrica di Venere = 8. 15. 36. 33, 0
Latitudine eliocentrica di Venere = 3. 44, 46.

Dunque la longitudine geocentrica del Sole e di Venere nel tempo della congiunzione sarà di $2.^s$ 15.° 36′. 33″. 0; e le longitudini affette dall' aberrazione per l' ora della congiunzione saranno per Venere . . . . . = $2.^s$ 15°. 36′. 36″, 74

Sole . . . . = 2. 15. 36. 13, 04
Diff. 23. 70

Inoltre col sussidio delle note formole si ha

Moto orario in latitudine geocen. di Venere = 0.′ 35.″ 42
Moto orario in longitudine geocentrica . = − 1. 34. 17
Moto relativo . . . . = − 3. 57. 55.

Ciò premesso, essendo la longitudine apparente di Venere maggiore di quella del Sole di 23.″ 70, riflettendo

che il moto geocentrico di Venere è retrogrado, la congiunzione apparente di Venere e del Sole sarà stata alle $5^{or}.45'.38'',7 + \frac{60'.23''.7}{237,55}$, cioè alle $5^{or}.\ 45'.\ 38'',7 + 5'.\ 59'',1 =$ $5^{or}.\ 51'.\ 37'',8$ tem. med. ovvero $5.^{or}\ 53'.\ 31'',2$ tempo vero al meridiano di Parigi pel quale istante si trova
Longitudine del Sole . . . . . . $= 2^{s}.\ 15^{\circ}.\ 36'.\ 27'',3$
Longitudine geocen. di Venere . . $= 2.\ 15.\ 36.\ 27,3$
Latitud. geocen. appar. in congiun. $=$ 9.25,92Aus.
Finalmente si ha
Moto orario sull' orbita relativa $=$ $240'',18$
Semidiametro di Venere . . . $=$ 28,52
Obbliquità dell' ecclittica . . . $=$ $23^{\circ}\ 28',16''$.

Premessi questi elementi, passiamo ora ad esporre la formola di cui ci siam serviti per calcolare l' effetto della parallasse nella distanza de' centri. Suppongasi dunque
La distanza vera de' centri di Venere e del Sole $= D$
La distanza apparente . . . . $= \Delta$
La parallasse orizzontale equatoriale del Sole alla distanza media dalla Terra . . . . $= \pi$
Il rapporto del raggio della Terra per una latitudine data al raggio dell' equatore . . . . $= \rho$.
Onde sarà
La parallasse orizzontale del Sole per una latitudine data nel tempo dell' osservazione . . . . . $= \frac{\pi}{R}\ \rho$
La parallasse orizzontale di Venere nel tempo dell' osservazione . . . . $= \frac{\pi}{R-r}\ \rho$
Inoltre sia
L' angolo fatto dal verticale del Sole coll' eclittica $= \zeta$
L' angolo fatto dall' eclittica, e dalla linea che unisce i centri del Sole e di Venere . . . . $= \sigma$
L' arco che unisce lo zenit vero dell' osservatore col centro del Sole . . . . $= f$

Si avrà l'effetto della parallasse nella distanza de' centri per mezzo dell'equazione seguente

$$D - \Delta = \Pi = \pi\,[(m-1)\rho\,\text{sen.}\,f\cos.(\zeta-\sigma) - m\rho\,\text{sen.}\,D.\cos.f$$

$$(\alpha) \qquad - \frac{(m-1)^2}{2}\,\frac{\pi}{\Delta}\,\text{sen.}^2 f\,\text{sen.}^2(\zeta-\sigma)$$

$$+ \frac{m^2-1}{2}\,\text{sen.}\,\pi\,\text{sen.}\,2f\cos.(\zeta-\sigma)\,]$$

nella quale π è la parallasse orizzontale equatoriale del Sole, ed $m\pi$ quella di Venere. Questa formola è stata proposta dal ch. Lexel nell'Effemeridi di Berlino per l'anno 1777. pag. 159. della quale in seguito Trembley ha data una elegante dimostrazione (*a*). Riducendo l' espressione di $D - \Delta$ al nostro caso si ottiene

$$D - \Delta = \Pi = \pi[2{,}4732.\rho\,\text{sen.}f\cos.(\zeta-\sigma) - 3{,}4580.\rho\,\text{sen.}\,D\cos.f$$

$$- 0{,}0288.\,\text{sen.}^2 f\,\text{sen.}^2(\zeta-\sigma)$$

$$+ 0{,}0002.\,\text{sen.}\,2f\cos.(\zeta-\sigma)\,].$$

Applichiamo questa formola all' osservazione del passaggio di Venere del 1761 fatta in Roma dal P. Audifredi.

Il contatto interno de' lembi nell' egresso fu osservato in Roma il dì 6. Giugno del 1761. alle $9.^{or}\ 9'.\ 36''$; qual tempo corrisponde a Parigi alle $8.^{or}\ 29'.\ 3'',5$. Dal tempo in cui fu osservato il secondo contatto interno, si deduce l' angolo orario $= O = 42^\circ.\ 36'.\ 0''$. Inoltre essendo la latitudine geografica del luogo dell'osservazione di $41^\circ.\ 53'.\ 52''$, si avrà la distanza dello zenit dal polo dell'equatore, corretta dall'angolo della verticale, di $48^\circ.\ 17'.\ 8''$. Si consideri ora un triangolo sferico, di cui i tre angoli sieno al polo dell' equatore, allo zenit, ed al centro del Sole. In questo triangolo essendo cognito l' angolo al polo $= O = 42^\circ.\ 36'.\ 0''$, il complemento alla latitudine geografica $= 48^\circ.\ 17'.\ 8''$, ed il complemento alla declinazione del Sole $= 67^\circ.\ 17'.\ 40''$, si trova colle note formole $f = 40^\circ.\ 12'.\ 15''$; e l'angolo al Sole fatto dal verticale e dal

---

(*a*) Essai de Trigonométrie Sphérique par Jean Trembley pag. 162.

circolo di declinazione di $51.^\circ\ 30'.\ 35'' = S$. Inoltre essendo la differenza fra il tempo dell' osservazione ridotto al meridiano di Parigi, ed il tempo della congiunzione, eguale ad $8.^{or}\ 29'.\ 3,''\ 5 - 5^{or},\ 53'.\ 31'',\ 2 = 2.^{or}\ 35'.\ 32'',3$; e la latitudine di Venere in congiunzione di $9'.\ 25'',\ 92$; sarà la latitudine nel tempo dell'osservazione $9',\ 25'',\ 92 + 1'.\ 31'',81 = 10'.\ 57'',73 = 657'',63 = L$. Similmente pel medesimo istante si troverà la differenza fra la longitudine di Venere e del Sole $= 615'',72 = E$; onde essendo $\text{tang.}\ \sigma = \frac{L}{E}$ si avrà $\sigma = 133^\circ.\ 6'.\ 40''$. Finalmente essendo l' angolo dell' eclittica col meridiano di $83^\circ.\ 50'.\ 25''$, si otterrà $\zeta - \sigma = 91^\circ.\ 32'.\ 20''$.

Cogniti dunque i valori di f, $\zeta - \sigma$, e ρ, di cui il logaritmo è 9,9993540, mediante la formola (α) di sopra esposta, si ottiene l' effetto della parallasse nella distanza de' centri

$$\Pi = -0{,}043.\pi - 0{,}012.\pi - 0{,}015.\pi = -0{,}070.\pi$$

trascurando l' ultimo termine perchè insensibile; e sommando il logaritmo del coefficiente di π con 1,2775971, si avrà l' effetto della parallasse nell' orbita ridotto in tempo, di $-1,\ 32.\pi$. Essendo dunque il momento dell'osservazione ridotto al meridiano di Parigi eguale a $8.^{or}\ 29'.\ 3'',\ 5$, si avrà il tempo del secondo contatto interno de' lembi ridotto al centro della Terra, ed al meridiano di Parigi eguale a

$$8^{or}.\ 29'.\ 3''.\ 5 + 1,\ 32.\pi$$

Con un metodo analogo all' esposto ho calcolate le osservazioni dei due contatti interni fatte a Cajanebourg, Stockholm, ed Upsal; ed inoltre le osservazioni del secondo contatto interno fatte a Parigi, Greenwich, ed al Capo di Buona Speranza. Dalla Memoria sopra indicata di Pingré, inserita fra quelle dell' Accademia di Parigi per l' anno 1765. pag. 30. ho tratte le osservazioni di questi contatti, e dalle conoscenze de' tempi pubblicate a Parigi per l' anno 1825, ho dedotte le posizioni geografiche dei luoghi delle osservazioni. I risultati che ho trovati sono i seguenti.

PARIGI

Contatto interno nell' egresso.

Il secondo contatto interno fu osservato a Parigi da diversi Astronomi. Di tutte le osservazioni, ridotte al meridiano dell' Osservatorio, ho preso un medio, da cui ho ottenuto $8.^{or}\, 28'\, 30''$. Gli elementi pel calcolo della parallasse sono $O = 52^\circ.\, 52'.\, 30''$; $f = 48^\circ.\, 53'.\, 0''$; $S = 44.^\circ.\, 22',\, 0''$; $\sigma = 133^\circ.\, 1'.40''$; $\zeta - \sigma = 98^\circ.\, 45'.\, 55''$, col sussidio de' quali ho dedotto l' istante del contatto geocentrico a Parigi

$$8^{or}.\, 28'.\, 30'' + 5,87.\pi.$$

GREENWICH

Contatto interno nell' egresso.

GREENWICH	PARIGI
$8.^{or}\ 19.'\, 0''$.	$8^{or}.\, 28'.\, 21''$.

Angolo orario $= O = 55^\circ.\, 15'.\, 0''$; $f = 50.^\circ\, 56'.\, 50''$ $S = 41^\circ.\, 25'.\, 25''$; $\sigma = 132^\circ.\, 59'.\, 55''$; $\zeta - \sigma = 101^\circ.\, 44'.\, 15''$; contatto geocentrico ridotto al meridiano di Parigi

$$8^{or},\, 28'.\, 21'' + 7,89.\pi$$

CAPO DI BUONA SPERANZA

Contatto interno nell' egresso

CAPO DI B. S.	PARIGI
$9^{ro}.\, 39'.\, 52''$	$8^{or}.\, 35'.\, 37''$

$O = 35^{\circ}.\ 2'.\ 0''$; $f = 65.^{\circ}\ 33'.\ 30''$; $S = 31^{\circ}.\ 37'.\ 33''$

$\sigma = 134^{\circ}.\ 7'.\ 45''$; $\zeta - \sigma = 6^{\circ}.\ 20'.\ 40''$

$8^{or}.\ 35'.\ 37'' - 42,\ 44.\pi.$

CAJANEBOURG

Primo contatto interno

Cajanebourg	Parigi
$4^{or}.\ 18'.\ 5''$	$2^{or}.\ 36'.\ 24''$

$O = 115^{\circ}.\ 28'.\ 45''$; $f = 80^{\circ}.\ 1'.\ 20''$; $S = 23^{\circ}.\ 37'.\ 30''$

$\sigma = 29^{\circ}.\ 56'.\ 45''$; $\zeta - \sigma = 137^{\circ}.\ 24'.\ 40''$

$2.^{or}\ 36.24 - 34,18.\pi.$

Secondo contatto interno

Cajanebourg	Parigi
$10^{or}.\ 7'.\ 59''$	$8^{or}.\ 26'.\ 18''$

$O = 28^{\circ}.\ 0'\ 15''$; $f = 45^{\circ}.\ 18'.\ 50''$; $S = 16^{\circ}.\ 46'.\ 55''$

$\sigma = 132^{\circ}.\ 40'.\ 35''$; $\zeta - \sigma = 126^{\circ}.\ 42'.\ 5''$

$8^{or}.\ 26'.\ 18'' + 20,\ 25.\pi$

STOKHOLM

Primo contatto interno.

Stokholm	Parigi
$3^{or}.\ 39'.\ 26''$	$2^{or}.\ 36'.\ 33''$

$O = 125^{\circ}.\ 8.'\ 30''$; $f = 86^{\circ}.\ 37'.\ 7''$; $S = 24^{\circ}.\ 49'.\ 10''$

$\sigma = 29^{\circ}.\ 57'.50''$; $\zeta - \sigma = 138^{\circ}.\ 37'.\ 25''$

$2^{or}.\ 36'.\ 33'' - 35.\ 28.\pi$

Secondo contatto interno

STOKHOLM	PARIGI
$9^{or}.\ 30'.\ 8''$	$8^{or}.\ 27'.\ 15''$

$$O = 37^\circ.\ 28',\ 0'';\ f = 45^\circ.\ 2'.\ 20'';\ \mathrm{S} = 26^\circ.\ 8'.\ 20''$$
$$\sigma = 132^\circ.\ 49'.\ 35'';\ \zeta - \sigma = 117^\circ.\ 11'.\ 40''$$
$$8^{or}.\ 27'.\ 15'' + 15,55.\pi$$

UPSAL

Primo contatto interno

UPSAL	PARIGI
$3^{or}.\ 37'.\ 43''$	$2^{or}.\ 36'.\ 28''$

$$O = 125^\circ.\ 34'.\ 15'';\ f = 86^\circ.\ 26'.\ 22'';\ \mathrm{S} = 24^\circ.\ 16'.\ 50''$$
$$\sigma = 29^\circ.\ 57'.\ 15'';\ \zeta - \sigma = 138^\circ.\ 4'.\ 30''$$
$$2^{or}.\ 36'.\ 28'' - 34,\ 97.\pi$$

Secondo contatto interno.

UPSAL	PARIGI
$9^{or}.\ 28'.\ 9''$	$8^{or}.\ 26'.\ 54''$

$$O = 37^\circ.\ 57'.\ 45'';\ f = 45^\circ.\ 33'.\ 20'';\ \mathrm{S} = 25^\circ.\ 46'.\ 10''$$
$$\varpi = 132^\circ.\ 46'.\ 20'';\ \zeta - \sigma = 117.^\circ\ 37.''\ 5.$$
$$8^{or}.\ 26'.\ 54'' + 15,80.\pi$$

Tutti i contatti geocentrici trovati, ridotti al meridiano di Parigi, sono dunque

Primo contatto interno.

CAJANEBOURG . .	$2.^{or}$ 36'. 24"	$-34,18.\pi$
STOKHOLM	2. 36. 33	$-35,28.\pi$
UPSAL	2. 36. 28	$-34,97.\pi$

Secondo contatto interno.

ROMA	8^{or}. 29'. 3",5	$+1,32.\pi$
PARIGI	8. 28 . 30	$+5,87.\pi$
GREENWICH . .	8. 28 . 21	$+7,89.\pi$
CAPO DI B. S. .	8. 35 . 37	$-42,44.\pi$
CAJANEBOURG . .	8. 26 . 18	$+20,25.\pi$
STOKHOLM	8. 27 . 15	$+15,55.\pi$
UPSAL	8. 26 . 54	$+15,80.\pi$.

Per altro è necessario riflettere, che il valore dell' angolo σ incluso nell' espressione della parallasse nella distanza de' centri, dipende come vedemmo, dalla latitudine e longitudine di Venere; quindi è, che se gli errori delle tavole fossero sensibili, l' angolo σ, e per conseguenza anche i coefficienti di π non si avrebbero con sufficiente esattezza. Per questa ragione dunque ho creduto conveniente dalle osservazioni complete di Cajanebourg, Stokholm, ed Upsal dedurre sei equazioni, onde ottenere gli errori delle tavole sì in longitudine che in latitudine geocentrica.

A questo fine pongasi come sopra, la differenza fra la longitudine geocentrica di Venere e quella del Sole $=$ E; e la latitudine geocentrica di Venere $=$ L; inoltre la correzione delle tavole in longitudine $= x$, ed in latitudine $= y$.

Essendo σ un angolo che ha per tangente $\frac{L}{E}$, la distanza vera de' centri del Sole e di Venere, che abbiamo espressa per D, sarà eguale ad $\frac{L}{\text{sen.}\sigma} = \frac{E}{\cos.\sigma} = \sqrt{(E^2 + L^2)}$; onde la correzione di D dipendente dagli errori x, ed y sarà

$$d.D = \frac{E}{D}x + \frac{L}{D}y = x\cos.\sigma + y\,\text{sen}.\sigma$$

Se dunque l' effetto della parallasse nella distanza de' centri si esprima per Π, l' equazione superiore (α) si ridurrà alla seguente

$$D + d.D - \Delta = \Pi$$

ovvero

$$\Delta - D + \Pi = x\cos.\sigma + y\,\text{sen}.\sigma$$

dalla quale ho dedotte le sei seguenti equazioni per ottenere le correzioni x, ed y.

Primo contatto interno.

CAJANEBOURG

$$-1{,}62 = 0{,}8665.x + 0{,}4992.y$$

STOKHOLM

$$-1{,}72 = 0{,}8663.x + 0{,}4995.y$$

UPSAL

$$-1{,}80 = 0{,}8664.x + 0{,}4993.y$$

Secondo contatto interno

CAJANEBOURG

$$+13{,}01 = -0{,}6779.x + 0{,}7352.y$$

STOKHOLM

$$+12{,}31 = -0{,}6798.x + 0{,}7334.y$$

UPSAL

$$+13.20 = -0{,}6791.x + 0{,}7341.y.$$

Dalla somma delle prime tre equazioni si ottiene

$$-5{,}14 = 2{,}5992.x + 1{,}4980.y$$

dalla somma delle tre ultime

$$+38{,}52 = -2{,}0368.x + 2{,}2027.y$$

onde

$$-1{,}9775 = x + 0{,}5763.y$$

$$+18{,}9120 = -x + 1{,}0815.y$$

per conseguenza

$$+16{,}9345 = 1{,}6578.y$$

e finalmente

$$y = +10''{,}22$$
$$x = -\ 7{,}86.$$

Dall' errore delle tavole in longitudine di — 7'',86 si deduce facilmente, che la congiunzione di Venere col Sole deve esser stata alle 5^{or} 49' 37'', 8 tem. med., ovvero alle 5^{or}. 51'. 31'',2 tempo vero al meridiano di Parigi (*a*).

(*a*) Corretta la longitudine di Venere e del Sole dall'aberrazione, e la longitudine di Venere dall' errore trovato delle tavole; si avrà la congiunzione alle 5^{or}. 43'. 38'', 7. tem. med. al meridiano di Parigi; e la longitudine del Sole in congiunzione $2.^{s}$ 15.° 36'. 28'', 2, e la latitudine eliocentrica 3'. 48''. 5. Onde posta l' inclinazione dell' Orbita di Venere all' eclitica di 3.° 23'. 35'', sarà l' arco eliocentrico fra il nodo e la congiunzione di 1.° 4.' 14,'' 5; e finalmente la longitudine del nodo ascendente di Venere $2.^{s}$ 14.° 32'. 14''.

Introducendo ora nel calcolo dell'angolo σ la longitudine e latitudine geocentrica di Venere corretta dagli errori trovati delle tavole, si avranno i seguenti contatti geocentrici corretti, e ridotti al meridiano di Parigi.

Primo contatto interno.

CAJANEBOURG	$2.^{or}36.24''-34,65.\pi$
STOKHOLM	$2.36.33-35,72.\pi$
UPSAL	$2.36.28-35,45.\pi$

Secondo contatto interno.

ROMA	$8.29.3,5+1,39.\pi$	I
PARIGI	$8.28.30+5,95.\pi$	II
GREENWICH	$8.28.21+7,97.\pi$	III
CAP. DI B. S.	$8.35.37-42,45.\pi$	IV
CAJANEB.	$8.26.18+20,31.\pi$	V
STOKHOLM	$8.27.15+15,62.\pi$	VI
UPSAL	$8.26.54+15,97.\pi$	VII.

Prendiamo in primo luogo a considerare le osservazioni del secondo contatto interno de' lembi fra le quali è inclusa l'osservazione romana.

È palese, che tutti i tempi dei secondi contatti geocentrici I, II, III. ec. devono essere fra loro eguali, prescindendo da qualche leggiera incertezza nelle longitudini geografiche, e dagli inevitabili errori delle osservazioni. Combinando dunque tra di loro l'espressioni superiori dei secondi contatti geocentrici, e specialmente con quella del Capo di Buona speranza, si avranno delle equazioni, dalle quali potrà dedursi il valore di π.

Dall' equazione dunque

IV = I si ottiene . . . $\pi = 8'', 98$

IV = VII . . . . $\pi = 8, 94$

IV = VI . . . . $\pi = 8, 65$

IV = V . . . . $\pi = 8, 91$

IV = II . . . . $\pi = 8, 82$

IV = III . . . . $\pi = 8, 64$

V = I . . . . $\pi = 8, 74$

VI = I . . . . $\pi = 7, 62$

VII = I . . . . $\pi = 8, 88$.

Escludendo i risultati che dipendono dall' osservazione romana, si ha il medio di $\pi = 8'', 79$; ed i soli risultati nei quali è inclusa l' osservazione fatta dall' Audifredi in Roma, danno per medio $\pi = 8'', 55$; e qualora si volesse escludere l' ottavo risultato, in cui l' osservazione romana è paragonata con quella di Stokholm si otterrebbe $\pi = 8'', 85$. Dal medio poi delle nove combinazioni si ha $\pi = 8'', 69$. Se si combinasse la I. colla II. si avrebbe $\pi = 7'', 35$, e minor valore di π si otterrebbe dalla combinazione della I. colla III. Ma a motivo dei piccoli coefficienti di π, ossia del poco sensibile effetto della parallasse nell' osservazione di Parigi e di Greenwich, e molto meno sensibile in quella di Roma, è palese, che le osservazioni dovrebbero godere di una estrema precisione per ottenere un plausibile valore di π. Ma come esser sicuri di tanta esattezza nelle osservazioni, quanta nel nostro caso se ne esigerebbe? È noto che per la lentezza del moto relativo di Venere è ben difficile cogliere il vero momento in cui i lembi del Sole e di Venere sono a perfetto contatto; Onde, è, che fra le osservazioni fatte da ch. Astronomi situati in un medesimo luogo, trovansi talvolta differenze di circa 15, ed anche 20 secondi, se trattasi di contatti interni, e differenze anche maggiori se trattasi di esterni.

Per giudicare in qualche modo della esattezza di quelle osservazioni le quali abbiamo sottomesse a calcolo, nelle espressioni dei secondi contatti geocentici I, II, III . . . . ec. ho sostituito in luogo di π il valor medio trovato di sopra, cioè 8$''$, 7, ed in questa ipotesi di parallasse ho trovato il tempo del secondo contatto geocentrico ridotto al meridiano di Parigi per

ROMA eguale ad	8.^{or}	29.$'$	15.$''$
PARIGI . . .	8.	29.	22
GREENWICH . .	8.	29.	30
CAPO DI B. S.	8.	29.	28
CAJANEBOURG .	8.	29.	15
STOKHOLM . .	8.	29.	31
UPSAL . . .	8.	29.	13.

L' osservazione romana combina dunque con quella di Cajanebourg, e differisce di soli 2$''$ da quella di Upsal. Quelle pel Capo di Buona Speranza, Stokholm, e Greenwich prossimamente combinano fra loro; e quella di Parigi è quasi la media di tutte le altre. Ma le osservazioni però presentano differenze di 17. ed anche 18. secondi; differenze che si notarono ancora nell'osservazione fatta a Parigi da esercitatissimi astronomi. Basterà solo indicare, che La Lande osservò il secondo contatto interno de' lembi alle $8^{or}. 28' 25''$, e Maraldi alle $8^{or}. 28'. 42''$, cioè $17''$. più tardi di Lalande.

Da tutto ciò rendesi dunque manifesto, che per ottenere un plausibile valore di π, è necessario mettere a confronto quelle osservazioni nelle quali la differenza fra i coefficienti di π è molto sensibile, onde supplire nella miglior maniera possibile agli inevitabili errori delle osservazioni. Non deve dunque far meraviglia, se dal confronto dell'osservazione romana con quella di Parigi, e di Greenwich non abbia il ch. Pingré ottenuti plausibili risultati; mentre oltre aver Egli supposta una longitudine geografica dell' Osservatorio del P. Audifredi di $11''$ maggiore della vera, ha inoltre paragonata l' osservazione romana, in cui la parallasse appena si manifesta, con quella di Parigi, e di Greenwich, nelle quali è anche poco sensibile l'effetto della parallasse. Ciò non ostante se Pingré ne' suoi calcoli avesse introdotta un' esatta longitudine geografica, e quindi fatto avesse il confronto dell' osservazione dell' Audifredi con quella del Lalande, avrebbe ottenuta una parallasse di $8'', 5$, che differisce appena di una o due decime di secondo da quella, che comunemente è adottata dagli Astronomi.

Vediamo ora qual parallasse del Sole risulti dall' osservazione dell'Audifredi, mettendo a calcolo la durata geocentrica. A questo fine dai contatti interni ridotti al centro ed al meridiano di Parigi, di sopra esposti, ho dedotte le seguenti durate geocentriche. A quelle che risultano dalle complete osservazioni di Cajanebourg, Stokolm, ed Upsal, ho anche unite quelle di Pekino, e Tobolsk, che ho calcolate sulle osservazioni riportate da Pingré nella Memoria sopra indicata. In tal guisa si avranno cinque espressioni della durata geocentrica, indipendenti da qualche piccola incertezza nelle longitudini geografiche.

			Durata geocentrica posto π = 8,″ 7
(1)	Cajanebourg . . .	. 5.° 49.′ 54″ + 54, 96. π	5.°′ 57′. 52″
(2)	Stokolm	. 5. 50. 42 + 51, 34. π	5. 58. 9
(3)	Upsal	. 5. 50. 26 + 51, 42. π	5. 57. 53
(4)	Pekino	. 5. 49. 32 + 57, 23. π	5. 57. 50
(5)	Tobokls	. 5. 48. 50 + 61, 48. π	5. 57. 45
(6)	Roma, Cajan. . . .	. 5. 52. 39, 5 + 36, 04. π	5. 57. 53
(7)	Roma, Stokolm .	. 5. 52. 30, 5 + 37, 11. π	5. 57. 53
(8)	Roma, Upsal . . .	. 5. 52. 35, 5 + 36, 84. π	5. 57. 56
(9)	Capo di B. S. Cajan.	5. 59. 13 — 7, 80. π	(A)
(10)	Capo B. S. Stok.	. 5. 59. 4 — 6, 73. π	
(11)	Capo B. S. Upsal	. 5. 59. 9 — 7, 00. π	
(12)	Green. Cajan . . .	. 5. 51. 57 + 42, 62. π	
(13)	Green. Stok. . . .	. 5. 51. 48 + 43, 69. π	
(14)	Green. Upsal . . .	. 5. 51. 53 + 43, 42. π	
(15)	Parigi, Cajane. . .	. 5. 52. 6 + 40, 60. π	
(16)	Parigi, Stok. . . .	. 5. 51. 57 + 41, 67. π	
(17)	Parigi, Upsal. . . .	. 5. 52. 2 + 41, 40. π	
(18)	Upsal Cajan. . . .	. 5. 50. 30 + 50, 62. π	
(19)	Cajan. Stok. . . .	. 5. 49. 45 + 56, 03. π	
(20)	Stok. Upsal . . .	. 5. 50. 47 + 51, 07. π	

Escludiamo primieramante dalle combinazioni l'osservazione romana, ed avremo

da (1) e (10) . . . . . $\pi = 8'', 91$
(1) (11) . . . . . $\pi = 8, 95$
(2) (9) . . . . . $\pi = 8, 64$
(2) (11) . . . . . $\pi = 8, 68$
(3) (9) . . . . . $\pi = 8, 89$
(3) (10) . . . . . $\pi = 8, 90$
(4) (9) . . . . . $\pi = 8, 93$
(5) (9) . . . . . $\pi = 8, 99$
(10) (12) . . . . . $\pi = 8, 69$
(9) (16) . . . . . $\pi = 8, 81$
(9) (13) . . . . . $\pi = 8, 48$
(9) (14) . . . . . $\pi = 8, 60$
(9) (15) . . . . . $\pi = 8, 85$
(9) (20) . . . . . $\pi = 8, 59$
(11) (20) . . . . . $\pi = 8, 64$
Medio $\pi = 8, 77$

Introducendo ora nelle combinazioni l' osservazione romana si ottiene

da (6) e (10) . . . . . $\pi = 8'', 99$
(6) (11) . . . . . $\pi = 9, 05$
(7) (9) . . . . . $\pi = 8, 88$
(7) (11) . . . . . $\pi = 9, 03$
(8) (9) . . . . . $\pi = 8, 90$
(1) (7) . . . . . $\pi = 8, 77$
(1) (8) . . . . . $\pi = 8, 91$
(3) (6) . . . . . $\pi = 8, 68$
(4) (6) . . . . . $\pi = 8, 85$
(4) (7) . . . . . $\pi = 8, 87$
(5) (6) . . . . . $\pi = 9, 02$
(6) (18) . . . . . $\pi = 8, 88$
(8) (19) . . . . . $\pi = 8, 88$
(6) (20) . . . . . $\pi = 7, 48$
(8) (20) . . . . . $\pi = 7, 62$

Le prime cinque combinazioni includono l' osservazione del Capo di Buona Speranza, ed il medio di queste ci dà $\pi = 8'', 97$; le altre dieci combinazioni danno per medio 8″,60; il medio poi di tutte è di 8″, 72, che differisce da 8″, 77, medio dei risultati indipendenti dall' osservazione romana, di sole cinque centesime di secondo. I risultati poi che più si discostano dagli altri sono quelli che dipendono dalla (20), in cui la durata geocentrica risulta dal confronto del secondo contatto interno osservato a Stokolm col primo osservato ad Upsal.

Peraltro cade quì in acconcio una osservazione, cioè, che posta la parallasse del Sole di 8″, 7, il medio delle tre durate geocentriche, che risultano dal confronto del secondo contatto interno osservato in Roma col primo osservato a Cajanebourg, Stokolm, ed Upsal è di 5.° 57′. 54″, come può osservarsi di sopra (A). Inoltre il medio delle durate geocentriche, che risultano dalle osservazioni complete di Cajanebourg, Upsal, Pekino, e Tobolsk, che poco differiscono fra di loro, è di 5.^{or} 57′. 50″, minore soltanto di 4″ del superiore; quella poi di Stokolm è di 5.^{or} 58.′ 9′, onde maggiore dell' antecedente di 19″. Altronde osservo, che l' osservazione del contatto interno nell' ingresso, ridotta al centro ed al meridiano di Parigi, è molto uniforme nelle osservazioni di Cajanebourg, Stokolm, ed Upsal. Infatti posto $\pi = 8'', 7$ si trova

Cajanebourg . . . 2.^{or} 36.′ 24″ $- 34{,}65.\pi =$ 2.^{or}. 31′ 23″
Stokolm . . . . 2. 36. 33. $- 35{,}72.\pi =$ 2. 31. 22.
Upsal . . . . . . 2. 36. 28. $- 35{,}45.\pi =$ 2. 31. 20.

Sembra dunque che possa con qualche fondamento sospettarsi, che l' eccesso di 19″ nella durata geocentrica di Stokolm, debba in gran parte attribuirsi all' osservazione del contatto interno dei lembi nell'egresso; ossia che il tempo di questa osservazione debba diminuirsi almeno di una buona diecina di secondi; diminuzione, che in questo caso richiederebbe anche l' osservazione del Capo di Buona Speranza, e di Greenwich; diminuzione, che renderebbe l'osservazione del secondo contatto interno fatta da Lalande più precisa, e preferibile alle altre fatte a Parigi; diminuzione infine, che avvicinerebbe le Osservazioni di Stokolm, del Capo di Buona Speranza, e di Greenwich all'osservazione romana.

Non credo però dovermi maggiormente inoltrare in queste riflessioni, non potendosi verificare questo mio benchè fondato sospetto, che calcolando ed insieme combinando un maggior numero di osservazioni. Altronde il mio scopo non è di analizzare le osservazioni fatte da Astronomi di fondata riputazione, ma soltanto di difendere quella fatta in Roma dal Cel. P. Audifredi ingiustamente tacciata d'inesatta. A questo fine ho paragonata questa osservazione con quelle fatte nei luoghi ben conosciuti quanto alla loro posizione geografica; e delle osservazioni fatte a Pekino, e Tobolsk non ho fatto altro uso, che per la sola durata geocentrica la quale non è alterata da una leggiera incertezza nella longitudine.

Le osservazioni del secondo contatto interno, ridotte al centro ed al meridiano di Parigi, ci han fatto palesemente conoscere, che l'osservazione romana combina con quella di Cajanebourg e di Upsal, ed anche con quella fatta da La Lande a Parigi. Inoltre il confronto fra le osservazioni del secondo contatto interno fatte al Capo di Buona Speranza, Cajanebourg, Stokolm, ed Upsal, con quella fatta in Roma, ci han manifestato un valor della parallasse del Sole di 8″, 6; ed il paragone fra le durate geocentriche di 8″, 7, ovvero anche di 8″, 6, qualora dalle combinazioni si volessero togliere quelle che includono l'osservazione del Capo di Buona Speranza. Quindi può francamente conchiudersi, che l'osservazione del Passaggio di Venere fatta dal Cel. P. Audifredi, in luogo di manifestare essenziali difetti, e meritare per conseguenza una total soppressione, come pretende il Ch. Pingré, ha invece contribuito a confermare il valore della parallasse del Sole stabilito dagli Astronomi col confronto delle migliori osservazioni fatte nel passaggio di Venere del 1769.

SUL TEOREMA GULDINIANO

MEMORIA

DEL PROFESSORE ANTONIO BORDONI

Ricevuta adì 3. *Marzo* 1826.

In questa breve Memoria dimostro in tutta la generalità il Teorema Guldiniano ed anco il reciproco di esso. Sebbene di questo famoso Teorema, di tanto uso sì nella teorica che nella pratica, abbiano parlato molti uomini sommi, fra i quali merita di essere distinto G. Monge, non ostante io spero che non ispiacerà ciò che ho quì divisato esporre relativamente ad esso e al suo reciproco.

1. L'area della superficie generata da una linea piana, che si mova conservandosi perpendicolare alle linee descritte dai punti di essa, è eguale al prodotto della lunghezza della medesima linea generatrice per quella percorsa dal suo centro di gravità: ecco la prima quistione che sarà quì trattata.

Essendo la linea generatrice di figura invariabile, ed il suo piano costantemente perpendicolare alle linee percorse dai punti di essa, queste medesime linee saranno fra loro parallele.

2. La linea generatrice nella sua primitiva posizione sia espressa dalla traccia AMB (*fig.* 1); e G sia il suo centro di gravità.

Riferiscansi sì i punti che le linee agli assi Ox, Oy ortogonali; e dal punto M qualsivoglia della linea AMB si conduca la MP ordinata; dal punto Q a distanza indeterminata del P conducasi la QN altra ordinata della medesima linea AMB, ed estendasi in T ad incontrare la retta MT toccante in M la curva stessa AMB: congiungasi la retta MN, e conducansi le . . $Gx^{\cdot}$ . ., . . $Gy^{\cdot}$ . . parallele ai medesimi assi Ox, Oy.

Chiaminsi x, y, ω, s le OP, PM, PQ, AM; ed $m(x, \lambda)$, $t(x, \lambda)$ le lunghezze delle linee parallele percorse dai punti M, T mentre il G centro di gravità percorre la parte λ della linea da esso trascorsa nel generare la intera superficie; ed $x^{\cdot}(\lambda)$, $y^{\cdot}(\lambda)$ o semplicemente $x^{\cdot}$, $y^{\cdot}$ gli angoli descritti in questo movimento dalle rette . . $Gx^{\cdot}$ . . , . . $Gy^{\cdot}$ . . ed anco dalle rispettive loro parallele: in ultimo si chiami $F(x, \lambda)$ l'area di quella porzione di superficie, la quale è generata dalla AM mentre il centro G percorre λ.

Essendo $F(x, \lambda)$ l'area della superficie generata dalla AM, sarà $F(x+\omega, \lambda) - F(x, \lambda)$ l'area di quella generata dalla MrN; ed

$$F(x+\omega, \lambda+\alpha) - F(x, \lambda+\alpha) - F(x+\omega, \lambda) + F(x, \lambda)$$

l'area di quella superficie generata dallo stesso arco MrN mentre il punto G percorre l'incremento indeterminato α della λ.

Sviluppando il quattrinomio quì trovato, e riducendo, si trova esso eguale

$$\alpha\omega F'_{,} + A:$$

in A gli aumenti α, ω hanno almeno tré dimensioni.

Gli apici $'_{,}$ quì posti alla F per cui si ha $F'_{,}$ significano, quello in alto la derivata di $F(x, \lambda)$ rispetto alla variabile x, e l'altro la derivata della medesima funzione rispetto alla variabile λ: analogamente si farà per indicare le derivate rispetto alle x, λ di altre funzioni delle medesime variabili x, λ.

Essendo le linee percorse dai punti M, T; M, N fra loro parallele, le aree delle superficie generate dalle rette MT, MN, mentre il centro G percorre la α, saranno, per la proposizione settima della Memoria sulle linee e superficie parallele,

$$\tfrac{1}{2}\,(m(x,\,\lambda+\alpha)-m(x,\,\lambda)+t(x,\,\lambda+\alpha)-t(x,\,\lambda))\,\mathrm{MT},$$

$$\tfrac{1}{2}\,(m(x,\,\lambda+\alpha)-m(x,\,\lambda)+m(x+\omega,\lambda+\alpha)-m(x+\omega,\,\lambda))\,\mathrm{MN}$$

ossia

$$\tfrac{1}{2}\,(\alpha m_1+\alpha t_1+\text{ecc.})\,\mathrm{MT},\ \tfrac{1}{2}\,(\,2\alpha m_1+\text{ ecc.}\,)\,\mathrm{MN}\ :$$

i termini ommessi contengono almeno α^2. Ma è notissimo che $\mathrm{MT}=\omega s'$, $\mathrm{MN}=\omega s'+$ ecc.; e dalla proposizione sesta della dianzi citata Memoria si ha

$$m(\,x,\,\lambda\,)=\lambda+x^{\cdot}\,\mathrm{GH}+y^{\cdot}\,\mathrm{HM},\ \text{e}$$

$$t(\,x,\,\lambda\,)=m\,(\,x,\,\lambda\,)+\omega x^{\cdot}+\omega y^{\cdot}y';$$

adunque le aree delle anzidette superficie generate dalle rette MT, MN saranno così espresse

$$\alpha\omega s'm_1+\mathrm{B},\ \alpha\omega s'm_1+\mathrm{C}:$$

nelle B, C gli aumenti α, ω hanno almeno tre dimensioni.

Similmente si dimostra che, la superficie generata dalla retta NT mentre G percorre l'α ha l'area talmente espressa, che in essa gli aumenti α,ω hanno almeno tre dimensioni; come anco dimostrasi facilissimamente, che nelle espressioni delle aree del triangolo rettilineo MTN ed in quella del segmento M*r*NM vi è almeno ω^3.

Ora si immaginino le tre superficie seguenti: quella generata dalla retta MN mentre il punto G percorre α aumento della λ; quella composta, della generata dall'arco M*r*N sopra considerata e dei due segmenti coi quali coincide l'M*r*NM, quando G trovasi nei termini delle linee λ, $\lambda+\alpha$; in ultimo quella composta, delle superficie generate dalle rette MT, TN di cui pure si è parlato dianzi, e dei due triangoli rettilinei nei quali cade successivamente l'MTN, quando il punto G si trova nei termini anzidetti delle λ, $\lambda+\alpha$. Queste tre superficie hanno tutte per contorno lo stesso contorno della prima di esse, e voltano le convessità dalla medesima banda, più la prima e la terza racchiudono la seconda; e però l'area di questa sarà compresa nel modo noto tra le due delle altre. Ma le espressioni delle aree di queste medesime tre superficie sono ordinatamente, per ciò che abbiamo detto e trovato,

$$\alpha\omega s'm_{\prime}+\mathrm{B},\ \alpha\omega \mathrm{F}'_{\prime}+\mathrm{D},\ \alpha\omega s'm_{\prime}+\mathrm{E};$$

ove si deve osservare che gli α, ω contenuti nelle quantità B, D, E hanno almeno tre dimensioni; adunque avrassi

$$\mathrm{F}'_{\prime}=s'm_{\prime}.$$

Quest'ultima equazione dà immediatamente

$$\mathrm{F}'=s'm \text{ ossia } \mathrm{F}'=gs'+x\cdot(g)s'.\mathrm{GH}+y\cdot(g)s'.\mathrm{HM},$$

dove g esprime la lunghezza della intera linea percorsa dal centro G e della quale e parte λ. Quindi avrassi l'area della intera superficie generata dalla curva AB eguale a

$$g\int s'dx+x\cdot(g)\int \mathrm{GH}s'dx+y\cdot(g)\int \mathrm{HM}s'dx,$$

purchè le primitive si estendano dal termine A al B cioè dalla $x=\mathrm{OD}$ alla $x=\mathrm{OC}$; e siccome $\int s'dx=\mathrm{AB}$, ed $\int \mathrm{GH}s'dx$, $\int \mathrm{HM}s'dx$, sono entrambe nulle per essere G centro di gravità della intera linea AB; così avrassi l'area della superficie di cui si parla eguale al prodotto $g.\mathrm{AB}$, cioè della lunghezza della linea generatrice per quella della linea percorsa dal suo centro di gravità: appunto come si è annunciato sopra.

3. Dimostrerò l'esposta quistione anco nel modo seguente, al quale appoggerò, come vedrassi, la dimostrazione della proposizione reciproca di essa medesima.

La superficie generata consisterà generalmente in un quadrilatero ABCD (*fig.* 2.), che avrà due lati AD, BC paralleli agli altri due AB, CD eguali fra loro. I due lati paralleli saranno le linee percorse dai punti A, B termini della generatrice, ed i due altri cioè quelli fra loro eguali saranno i luoghi nelle estreme posizioni dalla stessa linea generatrice.

Si intendano riferiti i punti, le linee, e le superficie ai tre assi ortogonali Ox, Oy, Oz; e si chiamino x, y, z le coordinate rettangole OV, VT, TM del punto M qualunque della superficie; e si immaginino in esse le due linee PM, QM, che hanno entrambe un termine in M e gli altri due cioè i loro principj P,Q nel contorno della medesima superficie, e siano l'una porzione della generatrice PN passante pel punto M e l'altra porzione della QR linea stessa, che è generata dal medesimo punto M loro comune, e si denomini μ la PM ed R la QM. Così, si chiami r quella porzione di contorno, che ha un termine nel principio di μ e l'altro nella prima situazione della linea generatrice cioè la AP; ed S esprima l'area del quadrilatero QMPA di cui tre lati sono R, μ, r; in ultimo K rappresenti la intera lunghezza della generatrice.

Considerando le S, x, y, z funzioni delle due μ, r, le quali sono indipendenti l'una dall'altra, la teorica dello spianamento delle superficie dà

$$\left(\frac{d^2S}{drd\mu}\right)=\sqrt{[(x'y_{,}-y'x_{,})^2+(x'z_{,}-z'x_{,})^2+(y'z_{,}-z'y_{,})^2]}:$$

le x', y', z' sono usate sì in questo luogo che altrove per esprimere le $\left(\frac{dx}{dr}\right)$, $\left(\frac{dy}{dr}\right)$, $\left(\frac{dz}{dr}\right)$ cioè le derivate delle x, y, z, rispetto alla r; e le $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, per esprimere le $\left(\frac{dx}{d\mu}\right)$, $\left(\frac{dy}{d\mu}\right)$, $\left(\frac{dz}{d\mu}\right)$ derivate delle stesse x, y, z rispetto alla variabile μ.

Sviluppando i tre quadrati, che vi sono indicati sotto il segno radicale, e sostituendo in vece dei binomj

$$y_{,}^2+z_{,}^2,\ x_{,}^2+z_{,}^2,\ x_{,}^2+y_{,}^2$$

rispettivamente i tre equivalenti

$$1-x_{,}^2,\ 1-y_{,}^2,\ 1-z_{,}^2,$$

si trova facilmente

$$\left(\frac{d^2S}{drd\mu}\right)=\sqrt{[x'^2+y'^2+z'^2-(x'x_{,}+y'y_{,}+z'z_{,})^2]}.$$

Ma per essere le $x':\left(\frac{dR}{dr}\right)$, $y':\left(\frac{dR}{dr}\right)$, $z':\left(\frac{dR}{dr}\right)$ i coseni degli angoli fatti cogli assi delle x, y, z dalla retta Mh tangente alla linea QM nel suo punto M; e le $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ gli analoghi coseni per la retta Mg tangente nello stesso punto M alla linea PM ossia μ; la frazione

$$(x'x_{,}+y'y_{,}+z'z_{,}):\left(\frac{dR}{dr}\right)$$

eguaglia il coseno dell' angolo hMg compreso dalle medesime due tangenti Mh, Mg; per cui, essendo quest' angolo retto, sarà

$$x'x_{,}+y'y_{,}+z'z_{,}=0.$$

Adunque avrassi

$$\left(\frac{d^2S}{dr\,d\mu}\right)=\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)}\text{ ossia }\left(\frac{d^2S}{dr\,d\mu}\right)=\left(\frac{dR}{dr}\right),$$

per essere, come è d'altronde noto $\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)}=\left(\frac{dR}{dr}\right)$.

Si denomini λ la lunghezza della linea percorsa dal centro di gravità della generatrice K, nel mentre che un suo punto percorre la QM; e p, q esprimano le coordinate rettangole del medesimo punto M per rispetto a due assi mobili esistenti nel piano della μ e passanti pel centro di gravità della intera PMN.

La teorica delle linee parallele dà

$$R=\lambda+mp+nq,$$

ove le m, n sono funzioni della r e costanti rispetto alla μ e per conseguenza anco rispetto alle p, q; per cui sarà

$$\left(\frac{dR}{dr}\right)=\lambda'+pm'+qn'.$$

Quindi avrassi

$$\left(\frac{d^2S}{dr\,d\mu}\right)=\lambda'+pm'+qn',\text{ ossia}$$

$$\left(\frac{dS}{dr}\right)=\lambda'\int d\mu+m'\int pd\mu+n'\int qd\mu,\text{ ovvero}$$

$$\left(\frac{dS}{dr}\right)=K\lambda'$$

essendo $\int pd\mu=0$, $\int qd\mu=0$, ed $\int d\mu=K$, estesi che siano gli integrali ossia le primitive agli estremi AD, BC della superficie.

Dall'ultima relazione $\left(\frac{dS}{dr}\right)=K\lambda'$, osservando che ad

$S = 0$ corrisponde $\lambda = 0$, si desume la

$$S = K\lambda,$$

La quale significa, che, l'area della superficie ABNP di cui si tratta, eguaglia il prodotto della linea generatrice per quella percorsa dal suo centro di gravità: proprietà che avrà evidentemente luogo anco per la intera superficie ABCD.

4. Se più linee AB, CD, EF, ecc. (*fig.* 3), esistenti nello stesso piano yox, si movessero, come si è supposto sopra, che si movesse la AB della figura prima, la somma delle aree delle superficie generate da esse sarebbe eguale alla somma delle medesime linee generatrici moltiplicata per la linea percorsa dal loro centro di gravità.

Si conducano le rette . . $Gx^{\cdot}$ . . , . . $Gy^{\cdot}$ . . pel punto G centro di gravità di tutte le linee AB, CD, EF, ecc. e ad esse le perpendicolari gg', hh', ii', ecc. dai punti g, h, i, ecc. loro rispettivi centri di gravità. Chiaminsi g, h, i, ecc. G le lunghezze delle linee parallele percorse dai medesimi centri g, h, i, ecc. G; e si ritengano i simboli $x^{\cdot}$, $y^{\cdot}$ per significare ciò, che hanno significato nel paragrafo terzo.

La somma delle aree delle superficie generate dalle linee AB, CD, EF, ecc. sarà

$$AB.g + CD.h + EF.i + \text{ecc. ossia}$$

$$AB(G + y^{\cdot}.gg' + x^{\cdot}.g'G) + CD(G + y^{\cdot}.hh' - x^{\cdot}.h'C) + \text{ecc. cioè}$$

$$(AB + CD + EF + \text{ec.})G + (AB.gg' + CD.hh' - EF.ii' + \text{ecc.})y^{\cdot}$$

$$+ (AB.g'G - CD.h'G - EF.i'G + \text{ecc.})\, x^{\cdot}$$

Ma i moltiplicatori delle $y^{\cdot}$, $x^{\cdot}$ sono nulli, perchè esprimono i momenti delle linee AB, CD, EF rispetto alle rette . . $Gy^{\cdot}$, . . $Gx^{\cdot}$ . . passanti pel loro centro di gravità; adunque la somma delle aree di cui si parla sarà eguale ad

$$(AB + CD + EF + \text{ecc.})\, G,$$

come si è enunciato al principio di questo paragrafo.

Questa proprietà non cessa di aver luogo anco nel caso che le linee generatrici siano in piani differenti, purchè esse si movano conservandosi invariabilmente unite, e le linee percorse dai loro punti siano perpendicolari ai rispettivi piani delle linee generatrici medesime: ciò è facile a dimostrarsi.

5. Passo a fare altrettanto per le solidità; vale a dire a dimostrare che, il volume di un corpo generato da una superficie piana, la quale nel moversi si mantenga perpendicolare alla linea percorsa dal suo centro di gravità, è eguale al prodotto della lunghezza di questa linea per l' area della stessa superficie generatrice.

Comincio a trattare il caso che tutte le linee percorse dai punti della superficie generatrice siano parallele fra loro, e però anco a quella percorsa dal centro di gravità della medesima superficie generatrice.

La superficie generatrice sia in primo luogo il trapezio ADCB (*fig.* 4) avente gli angoli D, C retti, i lati CD, AD, BC rettilinei, e l' AMB qualsivoglia anzi curvilineo.

Si riferiscano i punti e le linee alle due rette perpendicolari Ox, Oy scelte per assi delle coordinate. Per E punto qualunque del trapezio si tirino le rette PEL . . VEF . . parallele alle Oy, Ox; e dall' H, avente dalle rette PEL . . VEF . . distanze indeterminate, si tirino le HL, HFUQ parallele anch'esse alle Ox, Oy; in ultimo pel punto G centro di gravità del trapezio ABCD tirinsi le . . Gx' . . , . . . Gy' . . . pure parallele agli assi Ox, Oy.

Per semplicità si chiamino x, y, ω, θ ordinatamente le OP, PE, PQ, EL, ed h, l, f, ecc. le lunghezze delle linee parallele percorse rispettivamente dai punti H, L, F, ecc. mentre il G percorre λ; in ultimo $V(x, y, \lambda)$ il volume del corpo generato dalla porzione AVEPD della figura ABCD mentre il punto G percorre l' arco λ, ed x', y' angoli analoghi ai già indicati con questi medesimi simboli superiormente.

Essendo $V(x, y, \lambda)$ il volume del corpo generato dalla figura VEPDA, mentre G percorre λ, sarà

$$V(x+\omega,\ y+\theta, \lambda) - V(x, y+\theta, \lambda) - V(x+\omega,\ y,\ \lambda) + V(x, y, \lambda)$$

il volume di quello generato dal rettangolo EFHL; e però

$$V(x+\omega,y+\theta,\lambda+\alpha)-V(x,y+\theta,\lambda+\alpha)-V(x+\omega,y,\lambda+\alpha)+V(x,y,\lambda+\alpha)$$
$$-V(x+\omega,\, y+\theta,\, \lambda)+V(x,\, y+\theta,\, \lambda)+V(x+\omega,\, y,\, \lambda)-V(x,\, y,\, \lambda)$$

esprimerà il volume del corpo generato dal rettangolo ELHF mentre il centro G percorre α aumento di λ.

Sviluppando quest' ultima espressione secondo le dimensioni crescenti degli aumenti ω, θ, α, e riducendo, trovasi essa eguale ad

$$\alpha\omega\theta\left(\frac{d^3V}{dxdyd\lambda}\right)+A$$

in A gli ω, θ, α hanno almeno quattro dimensioni.

La proposizione della Memoria sulle linee e superficie parallele usata già più volte dà

$$l=e+\theta y^{\cdot},\; f=e+\omega x^{\cdot},\; h=e+\theta y^{\cdot}+\omega x^{\cdot},$$

per cui i prodotti dell' $\omega\theta$ area del rettangolo ELHF successivamente per gli incrementi delle e, l, f, h corrispondenti all' α della λ saranno

$$\omega\theta\alpha\left(\frac{de}{d\lambda}\right)+B,\; \omega\theta\alpha\left(\frac{de}{d\lambda}\right)+C,$$
$$\omega\theta\alpha\left(\frac{de}{d\lambda}\right)+D,\; \omega\theta\alpha\left(\frac{de}{d\lambda}\right)+E,$$

ove le B, C, D, E contengono le α, ω, θ almeno a quattro dimensioni.

Ora riflettendo al volume del corpo generato dal rettangolo ELHF, mentre G percorre α, ed a quelli dei quattro primi anzidetti, non è difficile il concepire, che il primo sarà compreso tra il più grande ed il più piccolo di questi volumi; e per tanto dovendo essere

$$\alpha\omega\theta\left(\frac{d^3V}{dxdyd\lambda}\right)+A$$

compreso tra due delle quattro quantità pocanzi trovate, si avrà

$$\left(\frac{d^3V}{dxdyd\lambda}\right)=\left(\frac{de}{d\lambda}\right),\ \text{e però}\ \left(\frac{d^2V}{dxdy}\right)=e.$$

6. Quest'ultima equazione si può desumere anco dalla proprietà, che, il volume di un corpo compreso tra due superficie parallele e corrispondenti, è eguale ad un terzo della distanza di queste superficie moltiplicata per la loro semisomma insieme al doppio della superficie parallela corrispondente ed equidistante da esse, la quale è dimostrata nel corollario secondo della proposizione tredicesima della sopra citata Memoria.

Di fatto, il corpo generato dal rettangolo ELHF ha le faccie generate dalle rette LH, EF, non che quelle generate dalle EL, FH, fra loro parallele; e però il volume di esso sarà eguale al prodotto di $\frac{1}{3}$ EL per la semisomma delle aree delle faccie generate dalle rette LH, EF più il doppio di quella generata dalla retta IK parallela ed equidistante dalle stesse LH, EF. Ma le aree delle superficie generate dalle rette EF, LH, IK sono, per la proposizione settima della Memoria sopra citata, eguale ad

$$\frac{1}{2}(e+f)\omega,\ \frac{1}{2}(l+h)\omega,\ \frac{1}{2}(i+k)\omega=\frac{1}{4}(l+e+f+h)\omega;$$

adunque il volume del corpo anzidetto eguaglierà

$$\frac{\theta}{3}\left(\frac{\omega}{4}(e+f+l+h)+\frac{\omega}{2}(e+l+f+h)\right)$$

$$\text{ossia}\ \frac{\omega\theta}{4}(e+f+h+l):$$

espressione che si riduce alla seguente

$$\omega\theta e+\frac{1}{2}\omega\theta^2 y^{\cdot}+\frac{1}{2}\omega^2\theta x^{\cdot},$$

ponendovi per f, h, l i loro valori usati poc' anzi.

Ma il volume del corpo generato dal rettangolo EFHL mentre G percorre λ è anco eguale a

$$V(x+\omega,\ y+\theta,\ \lambda)-V(x,\ y+\theta,\ \lambda)-V(x+\omega, y, \lambda)+V(x, y, \lambda)$$

ossia ad $\omega\theta\left(\frac{d^2V}{dxdy}\right) + Q$, ove la Q contiene ω, θ a tre dimensioni almeno; adunque sarà

$$\omega\theta\left(\frac{d^2V}{dxdy}\right) + Q = \omega\theta e + \frac{1}{2}\,\omega\theta^2 y' + \frac{1}{2}\,\omega^2\theta x' \; ;$$

e conseguentemente avrassi, come superiormente, $\left(\frac{d^2V}{dxdy}\right) = e$.

7. Essendo, per la proposizione relativa alle linee parallele già usata replicatamente,

$$e = \lambda + x'.\ \mathrm{GT} + y'.\ \mathrm{TE},$$

l' equazione trovata nei paragrafi antecedenti si riduce alla

$$\left(\frac{d^2V}{dxdy}\right) = \lambda + x'.\ \mathrm{GT} + y'.\ \mathrm{TE},$$

la quale insegna, che, il volume del corpo generato dal trapezio ABCD, eguaglia

$$\lambda \int\!\!\int dxdy + x' \int\!\!\int \mathrm{GT}\,dxdy + y' \int\!\!\int \mathrm{ET}\,dxdy;$$

purchè le primitive si estendano all'intero trapezio stesso. Ma siccome, estendendo in questa guisa tali primitive doppie, si ha la prima eguale all'area dello stesso trapezio ABCD, e le altre due entrambe nulle; così il corpo generato dal trapezio medesimo ABCD avrà il volume eguale all'area di esso moltiplicata per λ, che esprime la lunghezza della linea percorsa dal suo centro di gravità, come si è enunciato.

8. Quest' ultimo risultamento si può dimostrare anco in quest'altra maniera. Si facciano i rettangoli MRQP, SNQP; e chiamisi u l'ordinata MP corrispondente alla ascissa $\mathrm{OP} = x$ della linea AB, $\mathrm{F}(x,\lambda)$ il volume del corpo generato dal trapezio AMPD mentre il punto G percorre la linea λ.

Facilmente si dimostra, che i corpi generati dalle superficie MNQP, MRQP, SNQP mentre il punto G percorre l'aumento α della λ, hanno i volumi espressi dalle quantità

$$\alpha\omega \mathrm{F}'_1 + \text{ecc.}, \quad \frac{\alpha}{4}\,(m_1 + r_1 + p_1 + q_1)\,\mathrm{PQ}.\,\mathrm{MP} + \text{ecc.},$$

$$\frac{\alpha}{4}\,(s_1 + n_1 + p_1 + q_1)\,\mathrm{PQ}.\,\mathrm{QN} + \text{ecc.}$$

ove le m, n, q, p, n, s, esprimono le linee parallele percorse dai punti M, N, Q, P, N, S mentre il G percorre la λ.

Essendo $\mathrm{NQ} = u + \omega u' + \frac{\omega^2}{2} u'' + \text{ecc.}$

$$n = r \pm y^{\cdot}.\,\mathrm{NR}, \quad s = m + y^{\cdot}.\,\mathrm{SM},$$

le ultime due quantità quì esposte si riducono alle

$$\frac{\alpha}{4}(m_{,} + q_{,} + p_{,} + r_{,})\omega u + \text{ecc.}, \quad \frac{\alpha}{4}(m_{,} + p_{,} + q_{,} + r_{,})\omega u + \text{ecc.}$$

e però anco alle seguenti

$$\frac{\omega\alpha}{2}(m_{,} + p_{,})\,u + \text{ecc.}, \quad \frac{\omega\alpha}{2}(m_{,} + p_{,}) + \text{ecc.} :$$

nei termini ommessi gli aumenti ω, α hanno almeno tre dimensioni.

Ma d'altronde è facile il concepire, che la quantità $\alpha\omega\mathrm{F}_{,}$, + ecc. dev'essere compresa fra le ultime due esposte; adunque sarà

$$\mathrm{F}'_{,} = \frac{u}{2}(m_{,} + p_{,}), \text{ ossia } \mathrm{F}' = \frac{u}{2}(m + p).$$

Ponendo in quest' equazione in luogo delle m, p i loro valori seguenti $t + y^{\cdot}\,\mathrm{MT}$, $t - y^{\cdot}\mathrm{PT}$, essa si riduce alla

$$\mathrm{F}' = ut + \frac{u}{2} y^{\cdot}(\mathrm{MT} - \mathrm{PT}) \text{ ossia } \mathrm{F}' = ut + \frac{1}{2} y^{\cdot}(\overline{\mathrm{MT}}^2 - \overline{\mathrm{PT}}^2),$$

la quale, posto per t il valore $\lambda + x^{\cdot}\mathrm{GT}$, dà

$$\mathrm{F}' = \lambda u + x^{\cdot} u\,\mathrm{GT} + \frac{1}{2}(\overline{\mathrm{MT}}^2 - \overline{\mathrm{PT}}^2)\,y^{\cdot},$$

cioè il volume dell'intero corpo generato dal trapezio ABCD eguale a

$$\lambda \int u\,dx + x^{\cdot}\int \mathrm{GT}.u\,dx + \frac{y^{\cdot}}{2}\int(\overline{\mathrm{MT}}^2 - \overline{\mathrm{PT}})^2\,dx;$$

purchè le primitive si estendano da $x = \mathrm{OD}$ ad $x = \mathrm{OC}$. Ma tali primitive sono, la prima l'area del trapezio stesso ABCD, la seconda e la terza nulle; adunque il volume di cui si parla eguaglierà il prodotto di λ per l'area del trapezio generante ABCD.

9. Essendo $\frac{u}{2}(m+p)$ l'area della superficie generata dalla retta MP, l'equazione $F' = \frac{u}{2}(m+p)$ insegna, che, il volume del corpo in quistione eguaglia la primitiva rispetto alla x dell'area della superficie generato dalla MP ed estesa dalla $x = \mathrm{OD}$ alla $x = \mathrm{OC}$. Così per essere nulla la primitiva di $\overline{\mathrm{MT}}^2 - \overline{\mathrm{PT}}^2$, l'altra relazione

$$F' = ut + y\cdot(\overline{\mathrm{IP}}^2 - \overline{\mathrm{MT}}^2)$$

ci insegna che, il volume medesimo eguaglia la primitiva del prodotto ut, presa anch'essa rispetto alla x ed estesa come le anzidette.

10. Ora, senza ammettere la restrizione dichiarata quasi sul principio del paragrafo settimo, passerò a dimostrare la quistione di cui si tratta, seguendo un metodo, al quale appoggerò, come vedrassi, la dimostrazione della quistione reciproca di essa.

Si chiamino s, t, u le coordinate rettangole, per rispetto a tre assi fissi, del centro di gravità della superficie generatrice, considerata in qualsivoglia sua posizione; ed x, y, z le analoghe coordinate di un punto qualunque di essa. Così chiaminsi p, q le coordinate rettangole di quest' ultimo punto riportato a due assi rettangolari mobili ed esistenti nella stessa superficie generatrice e passanti per lo stesso suo centro di gravità; e λ esprima la linea percorsa dal centro di gravità per arrivare nel punto corrispondente alle s, t, u.

Una leggera riflessione farà comprendere la sussistenza delle tre equazioni

$$x = s + \mathrm{A}p + \mathrm{B}q,$$

$$y = t + \mathrm{C}p + \mathrm{D}q,$$

$$z = u + \mathrm{E}p + \mathrm{F}q,$$

nelle quali le A, B; C, D; E, F sono costanti rispetto alle

p, q, e funzioni delle s, t, u; giacchè esprimono i coseni degli angoli fatti dagli assi delle p, q con quelli delle x, y, z.

Considerando il volume del corpo, che chiameremo $V(p, q, \lambda)$, e le coordinate x, y, z funzioni delle tre quantità λ, p, q indipendenti l' una dall'altra, dalla teorica delle cubature si ha

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^3V}{d\lambda dp dq}\right)=&\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)\left[\left(\frac{dy}{dp}\right)\left(\frac{dz}{dq}\right)-\left(\frac{dy}{dq}\right)\left(\frac{dz}{dp}\right)\right]+\\&\left(\frac{dy}{d\lambda}\right)\left[\left(\frac{dx}{dq}\right)\left(\frac{dz}{dp}\right)-\left(\frac{dx}{dp}\right)\left(\frac{dz}{dq}\right)\right]+\\&\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)\left[\left(\frac{dx}{dp}\right)\left(\frac{dy}{dq}\right)-\left(\frac{dx}{dq}\right)\left(\frac{dy}{dp}\right)\right];\end{aligned}$$

e però, siccome le derivate $\left(\frac{dx}{dp}\right)$, $\left(\frac{dx}{dq}\right)$, $\left(\frac{dy}{dp}\right)$, $\left(\frac{dy}{dq}\right)$, $\left(\frac{dz}{dp}\right)$, $\left(\frac{dz}{dq}\right)$ sono ordinatamente eguali ad A, B, C, D, E, F; così sarà

$$\left(\frac{d^3V}{d\lambda dp dq}\right)=(CF-DE)\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)+(BE-AF)\left(\frac{dy}{d\lambda}\right)+(AD-BC)\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)$$

$$\text{ossia } \left(\frac{dV}{d\lambda}\right)=\left\{\begin{aligned}&(CF-DE)\iint\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)dpdq+\\&(BE-AF)\iint\left(\frac{dy}{d\lambda}\right)dpdq+\\&(AD-BC)\iint\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)dpdq\end{aligned}\right\}$$

ove le tre primitive doppie si debbono estendere a tutta la superficie generatrice.

Ma per essere i punti della superficie generatrice invariabilmente uniti fra loro, dimostrasi facilmente che

$$\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)=a+bz-cy,\ \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)=d+cx-ez,\ \left(\frac{dz}{d\lambda}\right)=f+ey-bx,$$

dove è bene osservare, che le a, b, c, d, e, f sono quantità costanti rispetto alle p, q; per cui si ha

$$\int\int\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)dpdq = a\int\int dpdq + b\int\int zdpdq - c\int\int ydpdq,$$

$$\int\int\left(\frac{dy}{d\lambda}\right)dpdq = d\int\int dpdq + c\int\int xdpdq - e\int\int zdpdq,$$

$$\int\int\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)dpdq = f\int\int dpdq + e\int\int ydpdq - b\int\int xdpdq;$$

ossia

$$\int\int\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)dpdq = (a + bu - ct)\int\int dpdq = \left(\frac{ds}{d\lambda}\right)\mathrm{G},$$

$$\int\int\left(\frac{dy}{d\lambda}\right)dpdq = (d + cs - eu)\int\int dpdq = \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)\mathrm{G},$$

$$\int\int\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)dpdq = (f + et - bs)\int\int dpdq = \left(\frac{du}{d\lambda}\right)\mathrm{G},$$

ove G è posta per semplicità in luogo della doppia primitiva definita $\int\int dpdq$ cioè dell' area della superficie generatrice; così avrassi

$$\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\lambda}\right) = \mathrm{G}\left((\mathrm{CF}-\mathrm{DE})\left(\frac{ds}{d\lambda}\right) + (\mathrm{BE}-\mathrm{AF})\left(\frac{dt}{d\lambda}\right) + (\mathrm{AD}-\mathrm{BC})\left(\frac{du}{d\lambda}\right)\right).$$

D'altronde si sa che le tre quantità CF—DE, BE—AF, AD—BC sono i coseni degli angoli fatti cogli assi delle s, t, u dalla retta perpendicolare al piano delle p, q, per cui esse eguagliano i coseni degli angoli fatti coi medesimi tre assi delle s, t, u dalla tangente la linea λ nel suo termine corrispondente alle coordinate s, t, u, cioè esse quantità sono rispettivamente eguali alle derivate $\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)$, $\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)$, $\left(\frac{du}{d\lambda}\right)$. Adunque sarà

$$\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\lambda}\right) = \mathrm{G}\left(\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2\right),$$

ossia $\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\lambda}\right) = \mathrm{G}$, per essere $\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2 = 1$.

Da quest' ultima relazione trovata, cioè dalla $\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\lambda}\right) = \mathrm{G}$, osservando che a $\lambda = 0$ corrisponde $\mathrm{V} = 0$, si desume la seguente

$$V = \lambda G,$$

la quale rappresenta visibilmente la proprietà enunciata e dimostrata in parte superiormente.

11. Suppongasi la superficie o figura generatrice del corpo la ABHCLDG (*fig.* 5.) qualsivoglia. Si divida nei trapezj ABFG, BHCEF, e nel segmento CLDC, e triangolo ECD figure tutte analoghe a quella della generatrice considerata quì sopra.

I punti 1, 2, 3, 4 siano i centri di gravità di queste quattro figure e si chiamino A, B, C, D le loro aree, ed α, β; α_1, β_1; α_2, β_2; α_3, β_3 le ascisse ed ordinate dei medesimi centri riferiti ai due assi . . $Qx^{\cdot}$ . ., . . $Qy^{\cdot}$ . . passanti pel punto Q centro di gravità di tutte le figure stesse ossia centro di gravità della intera generatrice.

Il volume del corpo generato da tutta la figura ABCHLDG sarà eguale ad

$$A.A_1 + B.B_1 + C.C_1 + D.D_1$$

ove le A_1, B_1, C_1, D_1 esprimono le lunghezze delle linee fra loro parallele percorse dai punti 1, 2, 3, 4.

Si ponga in questa espressione in luogo delle A_1, B_1, C_1, D_1 i loro rispettivi valori

$$Q + \alpha\, x^{\cdot} + \beta\, y^{\cdot},\quad Q - \alpha_1 x^{\cdot} - \beta_1 y^{\cdot},$$

$$Q - \alpha_2 x^{\cdot} + \beta_2 y^{\cdot},\quad Q - \alpha_3 x^{\cdot} + \beta_3 y^{\cdot},$$

ove Q esprime la lunghezza della linea percorsa dal punto Q, ed essa si ridurrà alla seguente

$$(A + B + C + D)\,Q + (A\alpha - B\alpha_1 - C\alpha_2 - D\alpha_3)\,x^{\cdot}$$
$$+ (A\beta - B\beta_1 + C\beta_2 + D\beta_3)\,y^{\cdot};$$

ma le quantità, che moltiplicano le $x^{\cdot}$, $y^{\cdot}$, sono nulle; giacchè esprimono i momenti delle superficie A, B, C, D aventi il centro di gravità nella origine delle coordinate $\alpha, \beta; \alpha_1, \beta_1$, $\alpha_2, \beta_2; \alpha_3, \beta_3$; adunque il volume del corpo generato dalla figura ABHCLD, che è qualsivoglia, è eguale al prodotto

$$(A + B + C + D)\,Q;$$

cioè eguaglia l'area della stessa figura generatrice moltiplicata pel viaggio percorso dal suo centro di gravità.

12. Se nel piano delle rette Ox, Oy, ove si è supposta la figura ABHCLD, vi fossero altre figure qualsivogliano, e si movessero tutte in modo di conservarsi perpendicolari alle linee percorse dai rispettivi loro centri di gravità, avrebbesi la somma dei volumi dei corpi da esse generate, eguale alla somma delle aree delle medesime figure generatrici moltiplicata per la lunghezza della linea percorsa dal loro centro di gravità. Anzi una proprietà affatto analoga ha luogo anco nel caso, che le figure generatrici non siano nel medesimo piano, purchè esse si movano conservandosi unite invariabilmente e perpendicolari ognuna alla linea percorsa dal suo centro di gravità: tutto questo è facile a dimostrarsi dopo le cose esposte.

13. Non ommetterò di far osservare, che dalle proposizioni usate per dimostrare le due quistioni costituenti il Teorema di Guldino in tutta la sua estensione, risulta, che le cose esposte reggono sempre che le linee e le superficie generatrici abbiano tali movimenti, che le superficie sviluppabili alle quali si mantengono tangenti i loro piani non siano toccate dalle effettive generatrici medesime.

14. Sia V il volume del corpo generato nel modo ammesso nel paragrafo settimo da una superficie piana di area Q; e siano, K la lunghezza del contorno della superficie generatrice ed S l'area della medesima superficie generata da esso.

Se la linea percorsa dal centro di gravità della superficie generatrice del corpo e quella percorsa dal centro di gravità del contorno di essa saranno fra loro eguali, evidentemente avrassi

$$\mathrm{V}:\mathrm{S}=\mathrm{Q}:\mathrm{K} \text{ ossia } \mathrm{V}=\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{K}}\,\mathrm{S}\,;$$

e però, se l'area Q eguaglierà il prodotto del contorno K, per una linea N, sarà V=SN; vale a dire il volume del corpo eguale alla superficie convessa di esso moltiplicata per l'apotema della figura generatrice del medesimo: questa proprietà ha evidentemente luogo, quando la figura generatrice sia un cerchio od un poligono regolare.

15. Ora parlerò delle quistioni reciproche alle due esposte, cioè del Teorema reciproco di quello di Guldino, e comincierò dalla quistione reciproca alla prima delle medesime esposte.

Se la superficie generata da una linea piana ha l'area di una qualunque di quelle sue parti, che si possono supporre generate dalla stessa porzione della linea generatrice la intera superfirie, eguale al prodotto di questa porzione della stessa generatrice per la lunghezza della linea percorsa dal suo centro di gravità, la linea generatrice sarà dovunque perpendicolare a quelle percorse dai suoi punti; e queste saranno per conseguenza parallele fra loro ed anco a quella percorsa dal centro di gravità della stessa generatrice.

Ritengo tutte le denominazioni e dichiarazioni fatte nel paragrafo terzo per la stessa prima quistione, eccettuate le proprietà del parallelismo delle linee r, λ, R e la perpendicolarità di esse al piano della μ generatrice della superficie.

Egli è evidente che tra le x, y, z e la S area di quella parte della superficie, che fra gli estremi ha le linee R, μ, r, sussisterà la relazione usata nello stesso paragrafo terzo cioè la

$$\left(\frac{d^2\mathrm{S}}{dr\,d\mu}\right)=\sqrt{[(x'y_{,}-y'x_{,})^2+(x'z_{,}-z'x_{,})^2+(y'z_{,}-z'y_{,})^2]}.$$

Così per essere, come nel paragrafo decimo e per le stesse ragioni,

$$\left(\frac{ds}{dr}\right)=a+bu-ct,\ \left(\frac{dt}{dr}\right)=d+cs-eu,\ \left(\frac{du}{dr}\right)=f+et-bs,$$

e d'altronde $s=\frac{1}{\mu}\int x d\mu$, $t=\frac{1}{\mu}\int y d\mu$, $u=\frac{1}{\mu}\int z d\mu$, sarà

$$\left(\frac{ds}{dr}\right)=\frac{1}{\mu}\left(\mu a+b\int z d\mu-c\int y d\mu\right),$$

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)=\frac{1}{\mu}\left(\mu d+c\int x d\mu-e\int z d\mu\right),$$

$$\left(\frac{du}{dr}\right)=\frac{1}{\mu}\left(\mu f+e\int y d\mu-b\int x d\mu\right);$$

e però avrassi

$$\left(\frac{d\lambda}{dr}\right)=\sqrt{\left\{\begin{array}{l}\left(\mu a+b\int z d\mu-c\int y d\mu\right)^2+\\ \left(\mu d+c\int x d\mu-e\int z d\mu\right)^2+\\ \left(\mu f+e\int y d\mu-b\int x d\mu\right)^2\end{array}\right\}}:\mu$$

essendo, come è noto

$$\left(\frac{d\lambda}{dr}\right)=\sqrt{\left[\left(\frac{ds}{dr}\right)^2+\left(\frac{dt}{dr}\right)^2+\left(\frac{du}{dr}\right)^2\right]}.$$

Ma dev'essere

$$\mathrm{S}=\mu\lambda \text{ ed anco } \left(\frac{d\mathrm{S}}{dr}\right)=\mu\left(\frac{d\lambda}{dr}\right); \text{ adunque sarà}$$

$$\left(\frac{d\mathrm{S}}{dr}\right)=\sqrt{\left\{\begin{array}{l}\left(\mu a+b\int z d\mu-c\int y d\mu\right)^2+\\ \left(\mu d+c\int x d\mu-e\int z d\mu\right)^2+\\ \left(\mu f+e\int y d\mu-b\int x d\mu\right)^2.\end{array}\right\}}$$

Quest'ultima relazione, dovendo sussistere qualunque sia μ, somministra la seguente

$$\left(\frac{d^2\mathrm{S}}{dr\,d\mu}\right)=\sqrt{\left\{\begin{array}{l}(a+bz-cy)\left(\mu a+b\int z d\mu-c\int y d\mu\right)+\\ (d+cx-ez)\left(\mu d+c\int x d\mu-e\int z d\mu\right)+\\ (f+ey-bx)\left(\mu f+e\int y d\mu-b\int x d\mu\right)\end{array}\right\}}:\left(\frac{d\mathrm{S}}{dr}\right)$$

ossia

$$\left(\frac{d^2\mathrm{S}}{dr\,d\mu}\right) \text{ eguale a } \left(\frac{dx}{dr}\right)\mu\left(\frac{ds}{dr}\right)+\left(\frac{dy}{dr}\right)\mu\left(\frac{dt}{dr}\right)+\left(\frac{dz}{dr}\right)\mu\left(\frac{du}{dr}\right)$$

diviso per la radice quadrata di $\mu^2\left(\frac{ds}{dr}\right)^2+\mu^2\left(\frac{dt}{dr}\right)^2+\mu^2\left(\frac{du}{dr}\right)^2$; cioè

$$\left(\frac{d^2S}{dr\,d\mu}\right)=(x'y'+y't'+z'u'):\left(\frac{d\lambda}{dr}\right).$$

Quindi, affinchè abbia luogo la proprietà ammessa nel teorema di Guldino, dovrà sussistere la equazione

$$(x's'+y't'+z'u):\left(\frac{d\lambda}{dr}\right)=\sqrt{[(x'y_{,}-y'x_{,})^2+(x'z_{,}-z'x_{,})^2+(y'z_{,}-z'y_{,})^2]}$$

e conseguentemente anco la seguente

$$(x's'+y't'+z'u'):\left(\frac{d\lambda}{dr}\right)\left(\frac{dR}{dr}\right)=$$

$$\sqrt{[(x'y_{,}-y'x_{,})^2+(x'z_{,}-z'x_{,})^2+(y'z_{,}-z'y_{,})^2]}:\left(\frac{dR}{dr}\right),$$

la quale significa, che, il seno dell'angolo compreso dalle tangenti le linee R, λ nei loro punti corrispondenti alle coordinate x, s eguaglia il seno di quello compreso dalla medesima tangente la R e la tangente la μ nello stesso punto loro comune. Indicarò questi due angoli rispettivamente coi simboli $\widehat{R\lambda}$, $\widehat{R\mu}$.

Riflettendo, che, l'equazione quì trovata ossia la proprietà di essere cos.$\widehat{R\lambda}$ = sen.$\widehat{R\mu}$, deve aver luogo qualunque sia l'altro termine della μ ossia qualunque parte μ sia della linea generatrice della superficie, e che col diminuire la μ, avvicinando l'altro suo termine al termine comune colla R, l'angolo $\widehat{R\lambda}$ deve finalmente annullarsi, si comprenderà, che le rette tangenti delle differenti linee analoghe alla λ debbono essere tutte parallele alla suddetta tangente della R, ossia che dev'essere sen.$\widehat{\mu R}$ = 1 cioè retto l'angolo $\widehat{\mu R}$, qualunque sia la μ; ed anco comprenderassi, che debbono essere le tangenti delle linee analoghe alla R corrispondenti a differenti valori della μ tutte fra loro parallele. Anzi, dovendo essere l'angolo $\widehat{\mu R}$ ed ogni suo analogo retto, esse saranno nei corrispondenti piani normali alla linea μ, i quali sono tutti perpendicolari allo stesso piano di essa medesima; vale a dire, le tangenti delle linee R debbono essere parallele fra loro ed in piani perpendicolari al piano della μ generatrice della superficie, e conseguentemente saranno esse pure perpendicolari al piano di questa medesima linea, o ciò che è lo stesso, le linee percorse dai punti della generatrice di una superficie per la quale sussista la proprietà Guldiniana, saranno parallele fra loro ed anco parallele alla linea percorsa dal centro di gravità di qualsivoglia parte della medesima linea generatrice; il che è appunto quanto si è dichiarato superiormente.

16. In ultimo passo a dimostrare che, se un corpo generato da una superficie, ha il volume di una qualunque sua parte compresa tra due posizioni della superficie generante eguale al prodotto dell'arco della superficie stessa per la lunghezza della linea percorsa dal suo centro di gravità nel passare dall' una all' altra di queste posizioni, la superficie generante il corpo si manterrà costantemente perpendicolare alla stessa linea percorsa dal suo centro di gravità; sia poi che essa roti o non roti intorno di questa linea medesima.

Ritengansi quì pure tutte le denominazioni e condizioni già usate per trattare la quistione diretta nel paragrafo decimo, eccettuata la condizione che la superficie generante mantengasi perpendicolare alla linea percorsa dal suo centro di gravità.

Comunque si mantenga la superficie generatrice del corpo rispetto alla linea percorsa dal suo centro di gravità, mediante le considerazioni occorse nel luogo dianzi citato, si dimostra che

$$\left(\frac{dV}{d\lambda}\right)=\left[(FC-ED)\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)+(BE-AF)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)+(AD-BC)\left(\frac{du}{d\lambda}\right)\right]G.$$

La proprietà che si deve verificare dà l'equazione $V=\lambda G$, la quale dovendo sussistere qualunque sia la λ, somministra la

$$\left(\frac{dV}{d\lambda}\right)=G\,;$$

e però dovrà essere soddisfatta la seguente equazione

$$\left[(FC-ED)\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)+(BE-AF)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)+(AD-BC)\left(\frac{du}{d\lambda}\right)\right]G=G$$

[p 107

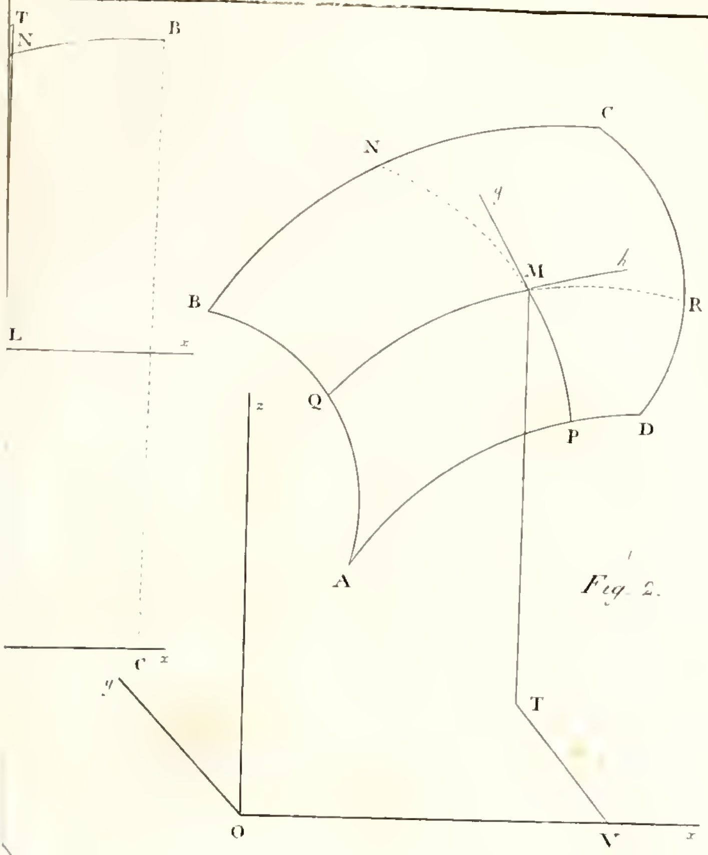

T
N
B
L
x
C
x
y
N
C
q
M
h
B
R
Q
z
P
D
A
T
O
V
x

Fig. 2.

3.

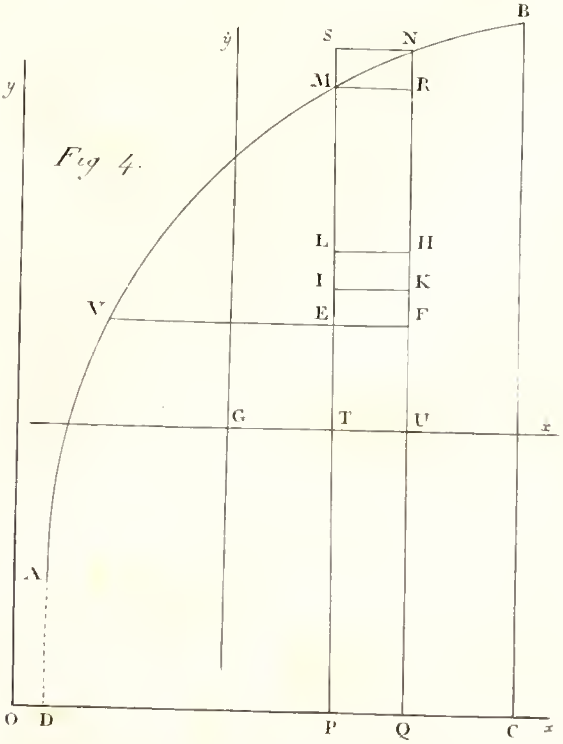

B
S
N
y
y
M
R
L
H
I
K
V
E
F
G
T
U
x
A
O
D
P
Q
C
x

Fig 4.

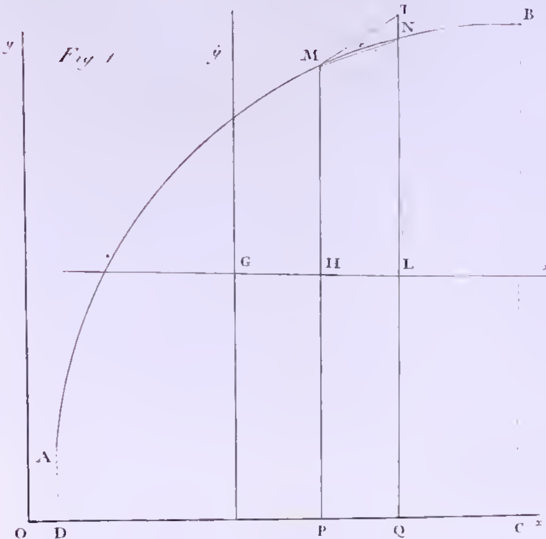


Fig. 1
y
ẏ
M
T
N
B
G
H
L
x
A
O
D
P
Q
C
x

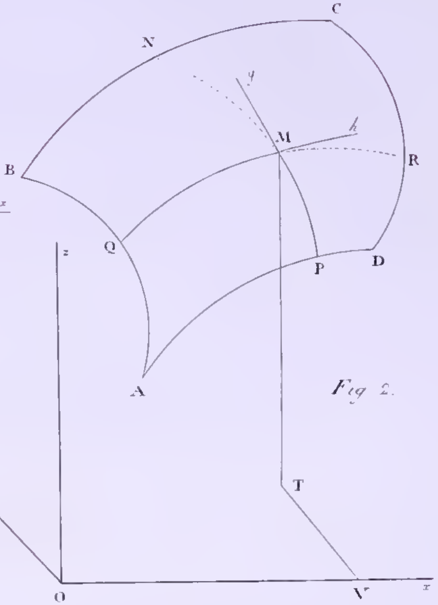


Fig. 2.
C
N
y
M
h
R
B
Q
P
D
z
A
y
T
O
V
x

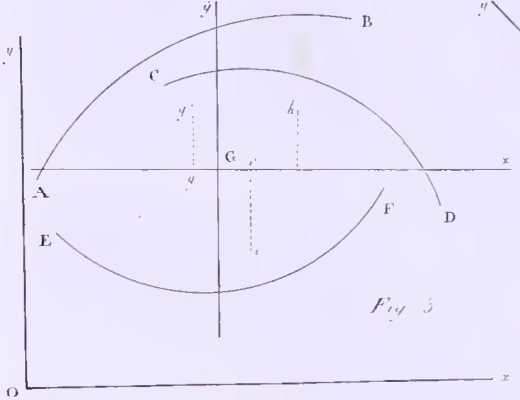


Fig. 3
y
ẏ
B
C
y
h
G
x
A
q
F
D
E
O
x

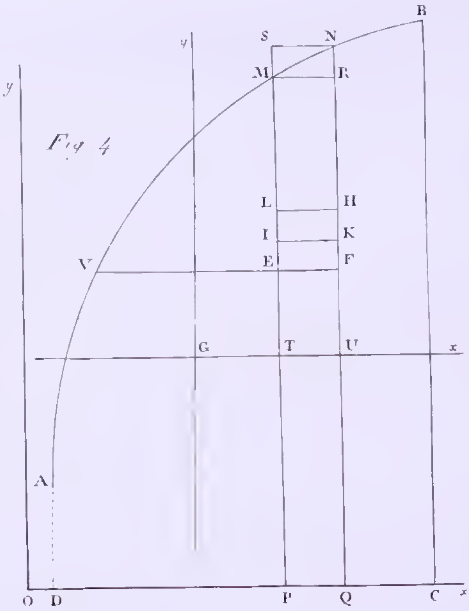


Fig. 4
B
S
N
y
M
R
y
L
H
I
K
V
E
F
G
T
U
x
A
O
D
P
Q
C
x

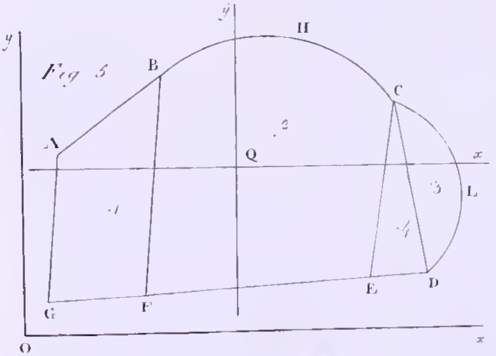


Fig. 5
y
ẏ
H
B
C
A
2
Q
x
1
3
L
4
G
F
E
D
O
x

ovvero la

$$(FC-ED)\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)+(BE-AF)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)+(AD-BC)\left(\frac{du}{d\lambda}\right)=1.$$

Ma i binomj CF—ED, BE—AF, AD—BC, come si è già detto, eguagliano i coseni degli angoli fatti cogli assi delle coordinate x, y, z da una retta perpendicolare al piano delle p, q ossia della superficie generatrice, ed i simboli $\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)$, $\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)$, $\left(\frac{du}{d\lambda}\right)$ esprimono i coseni degli angoli fatti coi medesimi assi dalla tangente la λ nel suo termine corrispondente alle coordinata s, t, u; adunque per la equazione quì sopra esposta cioè per la

$$(FC-ED)\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)+(BE-AF)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)+(AD-BC)\left(\frac{du}{d\lambda}\right)=1$$

quest' ultima tangente e la retta anzidetta saranno fra loro parallele; vale a dire il piano della superficie generatrice del corpo per cui si verifica la suddetta proprietà Guldiniana, sarà costantemente perpendicolare alla linea percorsa dallo stesso centro di gravità di essa, come si è enunciato.

INTORNO ALLA LATITUDINE
DI MODENA
MEMORIA
Del Signor
PROFESSORE GIUSEPPE BIANCHI

Presentata il dì 22. *Gennajo* 1821.

Dal Socio

SIG. PROF. GIUSEPPE TRAMONTINI

E APPROVATA DAL SOCIO

SIG. CAV. AB. ANGELO CESARIS.

La investigazione astronomica della latitudine di un luogo terrestre è teoricamente, come ognun sa, un facilissimo problema di sfera; ma esigendosene la pratica esatta soluzione, gravi e molte difficoltà vi si incontrano, le quali non si tolgon di mezzo generalmente, se al miglior perfezionamento non sieno condotti gli stromenti delle osservazioni e i metodi approssimativi del calcolo. Dopo i recenti e grandi progressi nell' arte di costruire gli stromenti d' Astronomia sembrerebbe che nulla rimanga a desiderarsi; e infatti ove si possano e si sappiano tali stromenti adoperare, gli errori delle osservazioni sono ridotti a quantità, per così dire, evanescenti, e la Scienza ne è divenuta conseguentemente quasi una parte di Matematica infinitesimale. Qualora poi non si possano impiegar nelle osservazioni che piccoli ed imperfetti stromenti, anche il problema pratico della latitudine devesi al calcolo proporre coll' enunciato ,, *dato un certo numero di osservazioni mediocremente buone dedurne con preci-*

sione la latitudine „ Tale è il problema che nelle mie circostanze io mi proposi, e che somministrò argomento a questo mio scritto, che al giudizio presento degli astronomi. Ma prima di entrar nel processo delle mie operazioni siami lecito un breve cenno di quanto è stato fatto e riferito intorno alla latitudine di Modena.

Secondo il famoso Astronomo di Alessandria, *Tolomeo*, Modena è situata a 43.° 40.' di latitudine boreale, e forse questo erroneo valore fu ritenuto, o piuttosto fu anch' esso trascurato ne' secoli della barbarie, come qualunque altro punto delle cognizioni scientifiche. Nell'anno 1645 l' illustre Gesuita *P. Francesco Maria Grimaldi* riuscì a determinar la latitudine Modenese e la trovò 44.° 40.'; ma il celebre di lui Collega e Compagno il *P. Riccioli* dubitò dell' esattezza di tale determinazione, poichè il Grimaldi avea senz' alcuna assistenza eseguite le proprie osservazioni (Vegg. l' *Almagestum novum* T. I. parte 1.ª pag. 60. e parte 2.ª pag. 351.). Nella *Geografia riformata* del medesimo Riccioli si trova per la torre maggiore di Modena (*Lib. Geoplaticus* pag. 296.) *Altitudo poli accuratissima* 44.° 38.' 50.", e qualche espressione farebbe credere che il dottissimo Autore abbia egli direttamente ottenuto un simil valore, che vien ripetuto nel Libro *Mecoplaticus* pag. 416. Per altro nel V.° Libro *Geometricus*, Cap. 27. num. 2. parlando Riccioli delle sue operazioni fatte nel Settembre dell'anno 1654, soggiunge rispetto alla torre suddetta „ *cujus altitudo poli ex recentioribus observationibus datur* 44.° 38.' 50". In realtà venuto a Modena il Riccioli col Grimaldi nel giorno 16. Settembre di detto anno, osservò dalla nostra *Ghirlandina* le due stelle *α* Lira, e *α* Cigno; ma l' unico scopo di tale osservazione fu di conoscere l' arco celeste fra i due zenit di Modena e della Casa di campagna de' PP. Gesuiti a *Serra di Monte Paterno*. Non sapendo io perciò decidere la quistione, se Riccioli abbia cioè osservato la riferita latitudine, rifletterò solamente ch'Egli ebbe ragione di chiamarla *accuratissima*, come si vedrà.

Il Marchese *Cornelio Malvasia* nell' Appendice alle sue *Ephemerides novissimae motuum coelestium* pubblicate nel 1662. in Modena alla pag. 187 riferisce due osservazioni della stella polare fatte da lui con un Quadrante di quattro piedi romani di raggio. La prima di esse fu fatta *in hortis nostris* il 10. Gennajo 1662, e ne risultò per la latitudine 44.° 38.' 25". La seconda istituita l' 11. Novembre dello stesso anno *in Specula nostra astronomica prope moenia civitatis Mutinae* (questa Specola sorgeva in un baloardo della Città, e propriamente in un luogo denominato la *Cà del vento* nella parte settentrionale della Città stessa) diede la latitudine 44.° 37.' 45". L' illustre osservatore stabilì quindi per media sua latitudine 44°. 38'., trovandosi in ciò d' accordo coll'immortale *Cassini*: pag. 153. delle stesse Effemeridi.

Il dotto *P. Gaetano Fontana*, Teatino e Modenese, nel suo Libro *Institutio physico-astronomica etc.* uscito in luce l'anno 1695. alla pag. 135. intese di correggere la latitudine data da Riccioli, adducendone per motivo *Sed quia ipse refractionibus non utitur majorem vera ponit*, e la ridusse a 44.° 38'. 14"; e in un' altra sua Opera *Animadversiones in hystoriam sacro-politicam* pubblicata nel 1718. correggendo egli la latitudine di Bologna trovata da Cassini, inferì che quindi la latitudine di Modena dovea farsi di 44°. 38'. 40", *paucis neglectis secundis de quibus certitudo non habetur* (Appendice pag. 18). In un Opuscolo del *Rizzi-Zannoni* intitolato *Essai gèographique sur une Carte generale de l' Alemagne* trovasi (pag. 79.) che *nel* 1709. *e* 1712. *il R. P. Fontana Teatino prese molte altezze meridiane del Sole che determinarono l' altezza del Polo per Modena* 44°. 38'. 50", *precisamente la stessa che ritrovò il P. Riccioli mediante l' intervallo fra il Verticale del Monte Paterno e della Torre di S. Geminiano di Modena determinato colle osservazioni della Lira e del Cigno;* ma io non ho potuto rinvenire simili osservazioni del Fontana, e duolmi altresì che siasi tanto dimenticato il merito e il nome del modestissimo Teatino, del quale diceva il Cassini *che fra quante osservazioni riceveva da varii grand' Uomini erano quelle del P. Fontana le più esatte e le più puntuali* (Vedi Giorn. de' Letter. d' Italia. T. XXXIII. parte I.ª).

La latitudine Modenese riferita dal Riccioli fu adottata da M.r *d' Anville* nella sua *Analisi geografica dell' Italia* pag. 62. e segg. in preferenza del valore 44.° 34.', che ivi si dice attribuito alla stessa latitudine dalla *Connoissance des Tems* di Parigi. Le conosciute posizioni astronomiche di Bologna e di Ferrara, e il triangolo terrestre formato e misurato fra Modena e le dette due Città offrono argomento al d' Anville per l' indicata preferenza, e soggiungesi anzi che la vera latitudine di Modena, piuttosto che minore, dee riputarsi maggiore della determinazione di Riccioli.

Passando sotto silenzio altre citazioni, non posso dissimulare un qualche mio stupore nel vedere assegnato alla latitudine di Modena il valore 44.° 34'. da un celebre astronomo italiano, che dimorò in questa medesima Città per alcuni anni; se non che mancando egli quivi di mezzi per le celesti osservazioni, reputò poi inutile per avventura il discutere e offerire nella sua elegante operetta una più precisa quantità per la latitudine Modenese (Vedi Notizie astronomiche per l' uso comune. Modena 1802. Tom. II. pag. 247.).

Finalmente il sì benemerito e chiarissimo Astronomo Sig. *Bar. di Zach* nel suo Giornale *Correspondance astronomique etc.* che si pubblica a Genova, richiamò fin dal fascicolo 4.° Novembre 1818. pag. 403. la discussione della geografica posizione di Modena. Egli osservò da Bologna nel giorno 13. Ottobre 1808. l' azzimut della torre maggiore di Modena, e sulla nota distanza delle due torri *Ghirlandina e degli Asinelli* dedusse la latitudine della prima di esse torri, e la ritrovò concorde colle operazioni di Riccioli (Vegg. il citato e il fascicolo 6.° Dicembre bis. 1818. pag. 594.). Variando poscia gli elementi del calcolo fu dal medesimo Astronomo la latitudine di Modena alquanto diminuita nel fascicolo 1.° Gennajo 1819. pag. 87., e da ultimo facendosi questione nella triangolazione di Toscana e di Lombardia fra le operazioni de' chiarissimi Astronomi P. *Inghirami* di Firenze, e Sig. *Brioschi*, si trovò impegnata nella controversia anche la latitudine della *Ghirlandina* (Vedi fascicolo 2.° Agosto 1819. pag. 145. e seguenti). Il sullodato Sig. Barone di *Zach* riuscì veramente a togliere tutte le differenze e ne fece quindi risultar la latitudine della Ghirlandina = 44.° 38′. 58″, 6; ma l' ipotesi a tal fine immaginata, oltre all' essere in se stessa affatto gratuita, è stata poi anche provata falsa da chi ha potuto riconoscere ed esaminare le autentiche relative posizioni estratte dall' I. Reale Istituto geografico militare di Milano.

Da questi cenni due conseguenze compiacciomi di ricavare: la prima, che mi sembra aggiungere onore alla mia patria, è che quantunque Modena non abbia offerto giammai stabile sede all' Astronomia, pure l' argomento della sua geografica posizione si direbbe quasi accompagnare i fasti dell' astronomia stessa: la seconda, che serve di eccitamento alle mie indagini ed applicazioni, è che appunto interessar deve la curiosità il fissare con eccellenti astronomiche osservazioni la geografica posizione anzidetta. L' una però e l' altra di tali conseguenze non può avere il suo pieno compimento, se non vanti anche Modena un buon osservatorio astronomico, la qual condizione, divisata già nelle saggie e splendide cure di S. A. R. il mio clementissimo Sovrano, fra non molto vedrassi effettuata.

Fin dall' anno 1815. profittando io di qualche tempo di autunnale assenza da Milano, dove per Sovrana amorevole protezione io riceveva educazione astronomica nell' I. R. Osservatorio di Brera, feci alcuni tentativi per conoscere colle osservazioni la latitudine di Modena; ma tutto allora mancavami, e quindi nulla di buono raccolsi in proposito. Fu nello scorso anno 1819. che acquistai, col placito della superiore Autorità, un orologio di *Grindel* con pendolo a compensazione, a regolar il quale ottenni poscia di poter adoperare un quadrante mobile di *Bird* di circa 11 pollici di raggio. In questo istromento, che appartiene di proprietà al Gabinetto fisico della R. nostra Università, il chiariss. Sig. Prof. *Amici* sostituì un buon canocchiale acromatico al pessimo che vi si ritrovava, dopo di che mi accinsi tosto a valermene.

Riconosciuta la regolarità dell'orologio con quasi quotidiana osservazione di altezze corrispondenti del Sole, mi venne in pensiero di determinar la latitudine con molte osservazioni da trattarsi con varii metodi di calcolo, poichè raccogliendo infine da ciascun metodo un medio risultamento, il confronto di questi medii mi avrebbe somministrato un criterio per assicurarmi del più giusto valore. Uno però di tali metodi mi sembrò sicuro abbastanza per affidarmivi quasi intieramente, e di questo soltanto mi occuperò nella presente Memoria. Proposto il detto metodo, e illustrato da egregii Astronomi, e anche recentemente seguito dal chiar. Prof. *Santini* (T. XVI. degli Atti della Società Italiana), esso consiste in ciò che segue:

Sia H la cercata latitudine, e per un dato istante siano

$$\left.\begin{array}{l}\text{P l'angolo orario}\\ \text{D la declinazione}\\ h \text{ l'altezza}\end{array}\right\}\text{ apparenti di un astro.}$$

Il primo canone trigonometrico somministra l'equazione

$$\text{sen.}h = \text{sen.D sen.H} + \text{cos.D cos.H cos.P}.$$

Se l'orologio è ben regolato, l'angolo P che se ne dedurrà, non avrà che un piccolo errore K, e potrà farsi

$$\text{cos.}\,(\text{P} + \text{K}) = \text{cos.P} - \text{K sen.P}$$

laonde l'equazione suddetta, contemplandovi l'errore dell'orologio, si cangia nella seguente

$$\text{sen.}h = \text{sen.D sen.H} + \text{cos.D cos.H cos.P} - \text{K cos.D cos.H sen. P} \quad (\text{A})$$

L'osservazione dunque di tre o più stelle conosciute, che arrivino alla stessa altezza h in diversi tempi, fornirà per mezzo delle rispettive equazioni (A) la determinazione delle incognite *h*, K ed H. Avverto per li segni delle quantità che D, se è australe, si prenderà con segno negativo, e con positivo se boreale. Così se in una serie di osservazioni s'incontrino angoli orarii orientali e occidentali, converrà distinguere nel segno gli uni dagli altri, a motivo di K che in uno de' due casi deve aggiungersi e nell'altro togliersi all'angolo P assoluto. Sarà poi indifferente il prender P, oppure K positivo piuttosto nell'uno che nell'altro senso.

Passando a dire delle mie osservazioni, il luogo, dove le istituii, fu nella mia casa, la quale situata pressocchè contigua al R. Ducale Palazzo dev' essere alquanto più boreale della Ghirlandina. Il mio quadrante, collocato sopra un tavolino, al cielo presentavasi ora da una finestra ed ora da un' altra delle mie stanze. Ogni volta prima di cominciare l'osservazione io livellava l'istromento, col mezzo di un sufficiente livello a bolla d' aria, che è annesso al quadrante; ma questa rettificazione è grossolana, e perciò l' artista aggiunse un filo a piombo, seguandone alle due estremità, armate di microscopio, il raggio verticale, e fece mobile intorno ad un punto, col mezzo di una chiave, il piano del quadrante. Ad ogni osservazione fui quindi attento per l' esatta posizione del filo a piombo. Fissata poi colla vite di pressione sul lembo l'altezza del canocchiale, io notava, oltre l' istante dell' orologio in cui le stelle pervenivano alla intersezione dei fili nel centro del campo, anche l'apparente loro carattere di grandezza, e l' azzimut, che è dato in un piatello orizzontale dello stromento colla precisione di 3 in 4 minuti.

Così riferendo a stelle di nome conosciuto quelle, che io non poteva al momento riconoscere, ebbi sempre maniera di calcolarne la posizione e di ravvisarle nel Catalogo indubitatamente. L'illuminazione dei fili facevasi per uno specchio traforato di carta bianca, che io applicava all' objettivo del canocchiale, diriggendo io medesimo con una mano il necessario lume. Che se le mie osservazioni potevano meglio riuscire, spero di riscuoterne un pò d' indulgenza per aver io dovuto far tutto da me solo.

Altro non mi rimane a premettere, se non ciò che riguarda l' esposizione del calcolo numerico. Nel riferire le osservazioni dichiaro che mi sono fatto legge della maggiore sincerità, non alterando in minima parte le quantità trascritte all'atto stesso delle osservazioni. Le posizioni vere delle stelle sono tutte ricavate dall' ultima edizione del Catalogo del celebre P. *Piazzi*. Quanto all' aberrazione e nutazione in Ascension retta e in declinazione per dedurne le posizioni apparenti, mancando io delle moderne tavole opportune, le ho calcolate colle formole note agli Astronomi. Ho trascurato soltanto la nutazione solare, perchè nelle mie circostanze una così piccola quantità non valeva per avventura la fatica di applicarla. Trattandosi per altro che alcuna delle stelle osservate appartiene al numero di quelle 34 stelle di *Maskeline*, delle quali è stata colla massima accuratezza verificata e stabilita la più giusta posizione, per queste ho calcolato l' aberrazione, e nutazione lunare e solare colla tavola di elementi costanti riferita (secondo il bel metodo propostone dal Bar. di Zach) nelle Effemeridi di Milano per l'anno 1817., e riprodotta ancora ne' seguenti Volumi delle stesse Effemeridi.

Trovati da ultimo i coefficienti numerici delle equazioni (A), ho creduto, se non vantaggioso, per alcuni casi almeno indicativo il trattare le equazioni stesse con doppio metodo, con quello cioè delle semplici combinazioni di eliminazione, e coll' altro *de' minimi quadrati*. Frattanto seguono le osservazioni, avvertendo che l' orologio è sensibilmente regolato al tempo sidereo.

I. Sera 17. *Giugno* 1820.

Stelle	Tempi dell' orologio	Ascens. rette apparenti	Declinazioni apparenti
1. *α* Cigno	14.^{h} 41.′ 0″,6	308.° 49.′ 52″, 41	44.° 38′. 19″,12 B
2. 35 *m* Cigno	14. 54. 54, 3	302. 56. 31, 55	34. 25. 51, 20 B
3. 57 *ζ* Serpente	15. 14. 27, 4	267. 45. 18, 04	3. 40. 17, 68 A
4. 74 *l*2 Vergine	15. 53. 25, 1	200. 39. 36, 04	5. 19. 33, 45 A
5. 99 *t* Vergine	16. 38. 40, 0	211, 39. 19. 42	5. 8. 8, 17 A.

Al mezzodì vero di questo giorno l' orologio avanzava sul tempo sidereo di 2′. 53″, 6, e avea un ritardo diurno di 30″, 0. Gl' istanti delle precedenti osservazioni furono presi ad un cronometro e ridotti all' orologio mediante un buon numero di accordi vicini alle osservazioni stesse. Dopo aver osservate le prime tre stelle traslocai il quadrante, e ciò mi riuscì senza sensibile pregiudizio della comune altezza. Pertanto si trova

$$
\begin{aligned}
(1)\ldots\ \text{sen.}h &= +\,0,7026330.\ \text{sen.H} + 0,0092415.\ \text{cos.H}\\
&\quad +\,0,7114923.\ \text{K cos. H}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)\ldots\ \text{sen.}h &= +\,0,5654117.\ \text{sen.H} + 0,1447621.\ \text{cos.H}\\
&\quad +\,0,8120060.\ \text{K cos. H}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3)\ldots\ \text{sen.}h &= -\,0,0640374.\ \text{sen. H} + 0,7665394.\ \text{cos.H}\\
&\quad +\,0,6389964.\ \text{K cos. H}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(4)\ldots\ \text{sen.}h &= -\,0,0928219.\ \text{sen.H} + 0,7949480.\ \text{cos. H}\\
&\quad -\,0,5995348.\ \text{K cos. H}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(5)\ldots\ \text{sen.}h &= -\,0,0895133.\ \text{sen.H} + 0,7918102.\ \text{cos.H}\\
&\quad -\,0,6041720.\ \text{K cos. H.}
\end{aligned}
$$

Trascurando le combinazioni a piccole differenze di declinazione si hanno le seguenti

$$(1)-(2)\ldots+\mathrm{tang.}H-0{,}\,9876060-0{,}\,7324933.\,K=0$$

$$(1)-(3)\ldots+\mathrm{tang.}H-0{,}\,9877752+0{,}\,0945594.\,K=0$$

$$(1)-(4)\ldots+\mathrm{tang.}H-0{,}\,9877450+1{,}\,6481472.\,K=0$$

$$(1)-(5)\ldots+\mathrm{tang.}H-0{,}\,9879092+1{,}\,6608853.\,K=0$$

$$(2)-(3)\ldots+\mathrm{tang.}H-0{,}\,9878119+0{,}\,2748589.\,K=0$$

$$(2)-(4)\ldots+\mathrm{tang.}H-0{,}\,9877739+2{,}\,1444369.\,K=0$$

$$(2)-(5)\ldots+\mathrm{tang.}H-0{,}\,9879727+2{,}\,1623515.\,K=0.$$

L'osservazione della stella 5 sembra inchiudere un errore alquanto sensibile, e ommettendo perciò la quarta e la settima delle precedenti equazioni, si sommino a parte le 2.ª 3.ª e 6.ª; indi la 1.ª e la 5.ª moltiplicata per 2. Si avrà così

$$+3\,\mathrm{tang.}H-2{,}\,9632941+3{,}\,8871435.\,K=0$$
$$+3\,\mathrm{tang.}H-2{,}\,9632298-0{,}\,1927755.\,K=0$$

donde $K=+0{,}\,0000158$, e quindi sostituendo nelle indicate equazioni

$$\begin{array}{rl} H = & 44.^\circ\ 38.'\ 35'',\ 0 \\ = & \ldots\ 51,\ 3 \\ = & \ldots\ 45,\ 6 \\ = & \ldots\ 54,\ 8 \\ = & \ldots\ 47,\ 8 \\ \hline \text{e per media}\ \ldots & 44.\ 38.\ 46,\ 9 \end{array}$$

Operando invece col metodo de' minimi quadrati, e non rigettando, come abbiam fatto, le equazioni quarta e settima, si trova

$$+7\,\mathrm{tang.}H-6{,}\,9145939+7{,}\,2527459.\,K=0$$
$$+7{,}\,2527459\,\mathrm{tang.}H-7{,}\,1648140+15{,}\,3703409.\,K=0$$

dalle quali equazioni si ottiene

$$K=+0{,}\,0000710;\ H=44.^\circ\ 38.'\ 46'',\ 6$$

Colla sostituzione di questi ultimi valori finalmente si ha,

$$\begin{aligned} h &= 30.^\circ\ 1.'\ 28'',\ 3 \\ &= \ldots\ldots 26,\ 9 \\ &= \ldots\ldots 33,\ 5 \\ &= \ldots\ldots 14,\ 7 \\ &= \ldots\ldots 36,\ 8 \end{aligned}$$

II. Sera 3. *Luglio.*

Stelle	Tempi dell' orologio	Ascens. rette app.	Declinazioni apparenti
1. α Vergine	16.^{h} 6'. 5", 8	198.° 56'. 14", 11	10.° 13'. 18", 27 A
2. β Leone	16. 30. 53, 5	174. 58. 23, 45	15. 34. 40, 77 B
3. β Pegaso	17. 18. 8, 0	343. 46. 19, 38	27. 6. 36, 09 B.

L' orologio al mezzodì vero di questo giorno era indietro dal tempo sidereo di 1'. 19", 5, e il suo diurno ritardo fu ritrovato di 11", 6. Anche nelle osservazioni quì accennate mi servii del cronometro, e col mezzo di parecchi accordi ridussi gl' istanti notati all' orologio. Nel tempo delle osservazioni soffiò un vento piuttosto forte, il quale per altro non impedì le mie operazioni. Il Quadrante poi non fu traslocato. Queste cose avvertite, si ha

$$(1) \ldots \text{sen.}h = -\,0,\ 1774583.\ \text{sen.H} + 0,\ 7204535.\ \text{cos.H} + 0,\ 6703563.\ \text{K cos. H}$$

$$(2) \ldots \text{sen.}h = +\,0,\ 2685499.\ \text{sen.H} + 0,\ 2800168.\ \text{cos.H} + 0,\ 9216680.\ \text{K cos. H}$$

$$(3) \ldots \text{sen.}h = +\,0,\ 4557007.\ \text{sen.H} + 0,\ 0948015.\ \text{cos.H} - 0,\ 8850704.\ \text{K cos. H}$$

donde si ottengono le seguenti

$$(2)-(1)\ldots + \text{tang.}H - 0,9875080 + 0,5634687.K = 0$$
$$(3)-(1)\ldots + \text{tang.}H - 0,9881435 - 2,4566134.K = 0$$

e quindi risulta . . . $K = -0,0002104$; $H = 44.^\circ\ 38'.\ 35'',9$
$h = 22.^\circ\ 49'.\ 3'',7$.

III. Sera 8. Luglio.

Stelle	Tempi dell' orologio	Ascens. rette app.	Declin. apparenti
1. 47. Orsa	17.^{h} 5'. 5'', 0	162.° 20'. 44'', 0	41.°23'.26'',4 B
2. 45. ω Orsa	17. 11. 20, 0	160. 53. 58 , 5	44, 8.51, 7 B
3. β Orsa magg.	18. 33. 6, 3	162. 44. 4 , 7	57. 20. 51, 4 B
4. α Boote	19. 2. 16, 7	211. 52. 17 , 7	20. 7.21, 2 B.

In queste e in tutte le osservazioni, che riferirò appresso, non mi servii più del cronometro, ma riferii immediatamente i tempi all'orologio, il quale a mezzodì vero era oggi indietro dal tempo sidereo di 2'. 17'', 3, e ritardava di 10'', 7 per giorno. Il Quadrante non fu traslocato. Pertanto si troverà

$$(1)\ldots \text{sen.}h = +0,6611897.\text{sen.}H - 0,0590682.\cos.H$$
$$- 0,7478898.K\cos.H$$
$$(2)\ldots \text{sen.}h = +0,6965103.\text{sen.}H - 0,0939638.\cos.H$$
$$- 0,7113678.K\cos.H$$
$$(3)\ldots \text{sen.}h = +0,8419594.\text{sen.}H - 0,2376611.\cos.H$$
$$- 0,4843776.K\cos.H$$
$$(4)\ldots \text{sen.}h = +0,3440294.\text{sen.}H + 0,2542075.\cos.H$$
$$- 0,9038924.K\cos.H.$$

Sottraendo successivamente una dall' altra queste equazioni, e alle sei combinazioni, che ne risultano, applicando tosto il metodo de' minimi quadrati, si ottengono le seguenti

$$+ 0,5278484 . \tan H - 0,5214158 + 0,4081686 . K = 0$$

$$+ 0,4081686 . \tan H - 0,4032033 + 0,3596923 . K = 0$$

e risolvendole

$$K = + 0,0001973 ; \quad H = 44.^\circ\, 38'.\, 39'', 6.$$

Quindi per ordine si rinviene

$$\begin{aligned} h &= 24.^\circ\, 59'.\, 30'', 7 \\ &= \ldots\ldots 30, \ 1 \\ &= \ldots\ldots 30, \ 4 \\ &= \ldots\ldots 30, \ 3 \end{aligned}$$

IV. Sera 18. Luglio.

Stelle	Tempi dell' orologio	Ascens. rette app.	Declin. apparenti
1. α Scorpione	16.ʰ24'. 40'', 4	244.°36'. 32'', 0	26.° 1'.34'',8 A
2. α 2 Libra	17. 21, 51, ±	220. 14. 32, 9	15. 17. 26,4 A
3. 41 Chioma di Ber.	18. 56, 28, 5	194. 38. 20, 6	28. 35. 35,9 B
4. η Boote	19. 8. 18, 0	206. 32. 7, 1	19. 18. 9,8 B
5. α Boote	19. 32. 44, 7	211. 52. 15, 8	20. 7. 21,9 B
6. α Serpente	20. 10. 3, 6	233. 51. 36, 9	6. 59. 48,0 B.

Il tempo sidereo al mezzodì vero di questo giorno avanzava sull' orologio di 4'. 4'', 4, e il ritardo diurno dell' orologio stesso era di 10'', 1. Dopo l' osservazione delle prime due stelle il quadrante fu trasportato e livellato di nuovo senza toccare il canocchiale. Si hanno, ciò premesso, le equazioni

$$(1) \ldots \operatorname{sen} h = - 0,4386716 . \operatorname{sen} H + 0,8977854 . \cos H$$
$$- 0,0406518 . K \cos H$$

$$(2) \ldots \operatorname{sen} h = - 0,2637158 . \operatorname{sen} H + 0,7251695 . \cos H$$
$$- 0,6360686 . K \cos H$$

$$(3)\;.\;.\;\text{sen.}h = +\,0{,}4785880.\,\text{sen.H} - 0{,}0079291.\,\text{cos.H}$$
$$- 0{,}8780032.\,\text{K cos. H}$$

$$(4)\;.\;.\;\text{sen.}h = +\,0{,}3305583.\,\text{sen.H} + 0{,}1382398.\,\text{cos.H}$$
$$- 0{,}9336064.\,\text{K cos. H}$$

$$(5)\;.\;.\;\text{sen.}h = +\,0{,}3440326.\,\text{sen.H} + 0{,}1249343.\,\text{cos.H}$$
$$- 0{,}9306090.\,\text{K cos. H}$$

$$(6)\;.\;.\;\text{sen.}h = +\,0{,}1218115.\,\text{sen.H} + 0{,}3444401.\,\text{cos.H}$$
$$- 0{,}9308722.\,\text{K cos. H.}$$

Si combinino queste equazioni colle successive eliminazioni semplici di sen. h, e trascurando la sola combinazione (2) — (1), e applicando all' altre quattordici la correzione de' minimi quadrati, risulteranno le seguenti

$$+\,4{,}0431489.\,\text{tang.H} - 3{,}9918768 - 3{,}2662514.\,\text{K} = 0$$
$$-\,3{,}2662514.\,\text{tang.H} + 3{,}2243942 + 3{,}4124365.\,\text{K} = 0$$

le quali equazioni somministrano

$$\text{K} = +\,0{,}0005643\,;\quad \text{H} = 44.^\circ\ 38'.\ 51'',4.$$

Sostituendo i trovati valori, finalmente si ha

$$h = 19.^\circ\ 17'.\ \ 6'',\,8$$
$$= \ldots\ldots\ 20,\ 9$$
$$= \ldots\ldots\ 19,\ 9$$
$$= \ldots\ldots\ 7,\ 1$$
$$= \ldots\ldots\ 8,\ 0$$
$$= \ldots\ldots\ 8,\ 2$$

V. Notte 21. *Luglio.*

Astri	Tempi dell' orologio	Ascens. rette apparenti	Declinaz. apparenti
1. η Orsa magg.	$19.^h$ 38′. 15″, 3	205.° 6′. 49″, 03	50.° 12′. 55″, 26B
2. α Corona bor.	20. 3. 50, 8	231. 46. 28, 09	27. 19. 33, 65B
3. λ Aquario	20. 59. 58, 0	340. 48. 53, 66	8. 31. 50, 10A
4. Giove	21. 13. 50, 0	354. 16. 19, 5	3. 58. 34, 80A
5. Saturno	21. 46. 59, 8	13. 26. 40, 2	3. 3. 12, 0 B.

Oggi al mezzodì vero il tempo sidereo avanzava sull' orologio di 4′. 34″, 6, e il ritardo diurno del pendolo era 10″, 1. Le prime due stelle furono osservate in una stazione, e le ultime tre in un' altra senza cangiar l' altezza del canocchiale. Debbo dire ancora come ho ricavato le posizioni apparenti di Giove e di Saturno. Quanto al primo cioè a Giove ho preso immediatamente l' ascension retta e la declinazione del Pianeta calcolate dal chiariss.° P. *Inghirami* e riferite nel 6.° *fascicolo Giugno* 1819. *della Corrispondenza astronomica* del cel. Sig. Bar. *Zach.* Ho soltanto applicato a tali elementi una piccola riduzione dovuta al moto proprio del Pianeta corrispondentemente all' angolo orario del Pianeta stesso nell' istante della mia osservazione, e alla differenza de' meridiani fra Parigi e Modena, giacchè l' Effemeride Fiorentina è calcolata per il meridiano di Parigi.

Quanto a Saturno ho cominciato dal ridurre il tempo sidereo 21^h. 51′. 40″, 2 che corrisponde all' istante dell' osservazione in tempo medio, il quale risulta „ 21 Luglio 13^h. 52′. 51″, o a Modena „ ossia „ 21 Luglio 13^h. 18′. 31″ a Parigi „ e infine per addattarlo alle tavole „ 22 Luglio. $0.^h$ 54′. 53″ tempo decimale a Parigi „. In tale istante un mio dolcissimo Amico il Sig. *D. Gabrio Piola* Dott. di Matematica, e Allievo dell' I. R. Osservatorio astronomico di Milano ritrovò colle tavole del Sig. *Bouvard* i seguenti elementi di posizione vera eliocentrica

Long. di Sat. = 7.° 36'. 54", 9
Latit. . . . = 2. 24. 47, 7 australe
Log. distanza al Sole, = 0, 9760986.

Interpolando sulla Effemeride Milanese per il corrente anno il luogo del Sole risulta dalle formole note la posizione vera geocentrica come segue

Long. di Sat. = 13°. 33' 24", 1
Latit. . . . . = 2 . 29. 54, 0 australe
Log. distanza alla terra = 0, 9610585

l' aberrazione si trova in longitudine = — 2",6; in latit. = — 0", 1 e la nutazione è + 2", 2. Quindi si ottengono

Long. di Sat. = 13.° 33'. 23", 7) apparenti.
Latit. . . . = 2. 29. 53, 9)

Con questi ultimi elementi e coll' apparente obbliquità = 23.° 27'. 55", 7
si trovano l' Ascension retta e la Declinazione del Pianeta che ho riferite. Ora procedendo col metodo consueto si avrà

$$(1) \ldots \mathrm{sen}.h = +0,7684550.\,\mathrm{sen}.H - 0,0068639.\,\mathrm{cos}.H + 0,6398667.\,K\,\mathrm{cos}.\,H$$

$$(2) \ldots \mathrm{sen}.h = +0,4590531.\,\mathrm{sen}.H + 0,2987118.\,\mathrm{cos}.H + 0,8366846.\,K\,\mathrm{cos}.\,H$$

$$(3) \ldots \mathrm{sen}.h = -0,1483373.\,\mathrm{sen}.H + 0,8987724.\,\mathrm{cos}.H - 0,4125580.\,K\,\mathrm{cos}.\,H$$

$$(4) \ldots \mathrm{sen}.h = -0,0693444.\,\mathrm{sen}.H + 0,8206934.\,\mathrm{cos}.H - 0,5671455.\,K\,\mathrm{cos}.\,H$$

$$(5) \ldots \mathrm{sen}.h = +0,0532655.\,\mathrm{sen}.H + 0,6995777.\,\mathrm{cos}.H - 0,7125688.\,K\,\mathrm{cos}.\,H.$$

Queste equazioni somministrano

$$(1)-(2)\;.\;.+\text{tang.}H-0{,}9876335-0{,}6361237.\,K=0$$

$$(1)-(3)\;.\;.+\text{tang.}H-0{,}9878317+1{,}1479413.\,K=0$$

$$(1)-(4)\;.\;.+\text{tang.}H-0{,}9877750+1{,}4406934.\,K=0$$

$$(1)-(5)\;.\;.+\text{tang.}H-0{,}9877687+1{,}8910174.\,K=0$$

$$(2)-(3)\;.\;.+\text{tang.}H-0{,}9879322+2{,}0567376.\,K=0$$

$$(2)-(4)\;.\;.+\text{tang.}H-0{,}9878580+2{,}6567691.\,K=0$$

$$(2)-(5)\;.\;.+\text{tang.}H-0{,}9878715+3{,}8178935.\,K=0$$

$$(5)-(4)\;.\;.+\text{tang.}H-0{,}9878135-1{,}1860647.\,K=0.$$

Si sommino a parte la prima e l'ultima dopo averle moltiplicate ciascuna per 3; indi si sommino le altre sei combinazioni. In tal modo risulta

$$+\,6\,\text{tang.}H-5{,}9263410-5{,}4665652.\,K=0$$

$$+\,6\,\text{tang.}H-5{,}9270371+13{,}0110523.\,K=0$$

e quindi $K=+\,0{,}0000377$, sostituito il qual valore nelle precedenti combinazioni si ottiene

$$\begin{array}{rl}H=44.^\circ\;38'.\;39'', & 2\\ =\;.\;.\;.\;.\;.\;52, & 9\\ =\;.\;.\;.\;.\;.\;45, & 8\\ =\;.\;.\;.\;.\;.\;43, & 4\\ =\;.\;.\;.\;.\;.\;59, & 6\\ =\;.\;.\;.\;.\;.\;49, & 7\\ =\;.\;.\;.\;.\;.\;46, & 5\\ =\;.\;.\;.\;39.\;\;0, & 2\\ \hline\end{array}$$

Valor medio . . $H=44.^\circ\;38'.\;49'',\,7.$

Che se vogliansi trattare le otto superiori combinazioni col metodo de' minimi quadrati si avranno le due seguenti equazioni

$$+ 8 \text{ tang.} H - 7,9024841 + 11,1888639 . K = 0$$

$$+ 11,1888639 \text{ tang.} H - 11,0530890 + 34,6456182 . K = 0$$

e risolvendole

$$K = + 0,0000321 ; \quad H = 44.^\circ\ 38'.\ 50'',5.$$

Questi ultimi valori somministrano finalmente

$$\begin{aligned} h &= 32^\circ.\ 21'.\ 16'',3 \\ &= \ldots\ldots 10,3 \\ &= \ldots\ldots 20,9 \\ &= \ldots\ldots 11,2 \\ &= \ldots\ldots 9,1 \end{aligned}$$

VI. Notte 29. *Luglio.*

Stelle	Tempi dell' orologio	Ascens. rette app.	Declin. apparenti
1. α Aquila	17^h. 10′. 42″, 5	295°. 30′. 44″, 23	8°. 24′. 11″. 95 B
2. 78 μ Cigno	17. 41. 19, 0	324. 2. 7, 38	27. 56. 6. 13 B
3. ζ Orsa magg.	18. 19. 47, 5	199. 9. 57, 59	55. 52. 10. 24 B
4. 24 γ Boote	18. 42. 3, 7	216. 12. 47, 71	39. 6. 1, 44 B
5. α Corona bor.	19. 7. 55, 8	231. 46. 27, 11	27. 19. 33, 96 B.

Al mezzodì vero di questo giorno l' orologio restava indietro dal tempo sidereo di 5′. 51″, 7, e il suo diurno ritardo era di 8″, 6. Dopo l' osservazione delle prime due stelle traslocai il Quadrante non toccandone il canocchiale. Prevengo infine che ho aggiunto 1′ al tempo dell' orologio per l' osservazione della stella 4. Questa è l' unica volta in cui mi sono arbitrato di fare un cangiamento all' osservazione originale, e spero che mi si concederà di farlo, attesa la probabilità di aver appunto sbagliato il minuto leggendo nell' orologio.

Colle precedenti quantità si ottiene

$$
\begin{aligned}
(1)\;..\;\text{sen.}h &= +\,0,1461406.\,\text{sen.H} + 0,7966960.\,\text{cos.H}\\
&\quad + 0,5864454.\,\text{K cos. H}\\
(2)\;..\;\text{sen.}h &= +\,0,4684700.\,\text{sen.H} + 0,4782369.\,\text{cos.H}\\
&\quad + 0,7428495.\,\text{K cos. H}\\
(3)\;..\;\text{sen.}h &= +\,0,8277619.\,\text{sen.H} + 0,1237134.\,\text{cos.H}\\
&\quad - 0,5472706.\,\text{K cos. H}\\
(4)\;..\;\text{sen.}h &= +\,0,6306811.\,\text{sen.H} + 0,3183286.\,\text{cos.H}\\
&\quad - 0,7077650.\,\text{K cos. H}\\
(5)\;..\;\text{sen.}h &= +\,0,4590545.\,\text{sen.H} + 0,4878913.\,\text{cos.H}\\
&\quad - 0,7424492.\,\text{K cos. H}
\end{aligned}
$$

dalle quali equazioni, ritraggo le seguenti

$$
\begin{aligned}
(2)-(1)\;..\; &+\text{tang.H} - 0,9879927 + 0,4852307.\,\text{K} = 0\\
(3)-(4)\;..\; &+\text{tang.H} - 0,9874896 + 0,8143584.\,\text{K} = 0\\
(3)-(5)\;..\; &+\text{tang.H} - 0,9877150 + 0,5293590.\,\text{K} = 0\\
(4)-(5)\;..\; &+\text{tang.H} - 0,9879742 + 0,2020910.\,\text{K} = 0\\
(3)-(1)\;..\; &+\text{tang.H} - 0,9873267 - 1,6632635.\,\text{K} = 0\\
(4)-(1)\;..\; &+\text{tang.H} - 0,9872600 - 2,6710056.\,\text{K} = 0\\
(5)-(1)\;..\; &+\text{tang.H} - 0,9868680 - 4,2468369.\,\text{K} = 0\\
(3)-(2)\;..\; &+\text{tang.H} - 0,9867283 - 3,5907300.\,\text{K} = 0.
\end{aligned}
$$

Si sommino le prime quattro, e poscia le altre quattro di tali equazioni ed avremo

$$
\begin{aligned}
&+4\,\text{tang.H} - 3,9511715 + 2,0310391.\,\text{K} = 0\\
&+4\,\text{tang.H} - 3,9481830 - 12,1718360.\,\text{K} = 0
\end{aligned}
$$

la risoluzione delle quali somministra

$$\text{K} = +\,0,0002104;\quad \text{H} = 44.^\circ\ 38'.\ 42'',2.$$

Trattando invece le otto precedenti equazioni col metodo de' minimi quadrati, risultano le seguenti

$$
\begin{aligned}
&+8\,\text{tang.H} - 7,8993545 - 10,1407969.\,\text{K} = 0\\
-\,10,1407969\,&\text{tang.H} + 10,0072112 + 42,0493692.\,\text{K} = 0
\end{aligned}
$$

dalle quali si ha

$$\text{K} = +\,0,0002058;\quad \text{H} = 44.^\circ\ 38'.\ 41'',6.$$

Cogli ultimi valori trovati si avrà finalmente

$h = 42°.\ 2'.\ 13'', 2$

$= \ .\ .\ 1.\ 59, 7$

$= \ .\ .\ 2.\ 14, 7$

$= \ .\ .\ .\ 0, 9$

$= \ .\ .\ .\ 9, 4$

VII. Notte 30 *Agosto.*

Stelle	Tempi dell' orologio	Ascens. rette apparenti	Declin. apparenti
1. λ Aquila	18.^{h} 30'. 20'',0	284°.11'. 4'',21	5.° 8'. 33'',0 A
2. $\varkappa$ Ofiuco	19. 27. 35, 8	252. 17. 46, 85	9. 39. 46, 4 B
3. γ Ofiuco	19. 35. 21, 6	264. 43. 38, 76	2. 46. 59, 7 B
4. β Ofiuco	19. 43. 59, 3	263. 39. 17, 16	4. 39. 4, 3 B
5. χ Ercole	20. 25. 23, 3	236. 36. 49, 71	42. 57. 38, 7 B
6. ζ Ercole	20. 40. 6, 4	248. 37. 49, 24	31. 56. 11, 1 B
7. β Orsa min.	21. 27. 43, 8	222. 50. 1, 36	74. 53. 24, 7 B.

Al mezzodì vero di questo giorno l' orologio restava indietro dal tempo sidereo di 7'. 30'', 5, e il suo ritardo diurno era 10'', 9. Le prime quattro stelle furono osservate da una finestra e le ultime tre da un' altra, per la qual cosa fu d' uopo trasportar il quadrante e porlo nuovamente di livello. In tale traslocamento, benchè per altro io non mi accorgessi di aver alterata la posizione del canocchiale, cangiò nondimeno la comune altezza, e il calcolo me lo ha chiaramente indicato. Pertanto distinguendo con un apice la seconda altezza, viene

$$(1)\ .\ .\ \text{sen.}h = -0,0896331.\ \text{sen.H} + 0,9926173.\ \cos.\text{H}$$

$$+\ 0,0817097.\ \text{K}\cos.\ \text{H}$$

$$(2)\ldots\ \text{sen.}h = +\,0{,}\,1678509.\ \text{sen.H} + 0{,}\,7383678.\ \text{cos.H} + 0{,}\,6531762.\ \text{K cos. H}$$

$$(3)\ldots\ \text{sen.}h = +\,0{,}\,0485578.\ \text{sen.H} + 0{,}\,8560962.\ \text{cos.H} - 0{,}\,5145301.\ \text{K cos. H}$$

$$(4)\ldots\ \text{sen.}h = +\,0{,}\,0810895.\ \text{sen.H} + 0{,}\,8239944.\ \text{cos.H} - 0{,}\,5607659.\ \text{K cos. H}$$

$$(5)\ldots\ \text{sen.}h' = +\,0{,}\,6814972.\ \text{sen.H} + 0{,}\,2306449.\ \text{cos.H} - 0{,}\,6945247.\ \text{K cos. H}$$

$$(6)\ldots\ \text{sen.}h' = +\,0{,}\,5289779.\ \text{sen.H} + 0{,}\,3814073.\ \text{cos.H} - 0{,}\,7580967.\ \text{K cos. H}$$

$$(7)\ldots\ \text{sen.}h' = +\,0{,}\,9654280.\ \text{sen.H} - 0{,}\,0497213.\ \text{cos.H} - 0{,}\,2558837.\ \text{K cos. H.}$$

Da tali equazioni emergono le seguenti

$$(2)-(1)\ldots + \text{tang. H} - 0{,}\,9874382 - 2{,}\,8541027.\ \text{K} = 0$$

$$(3)-(1)\ldots + \text{tang. H} - 0{,}\,9879169 - 4{,}\,3146110.\ \text{K} = 0$$

$$(4)-(1)\ldots + \text{tang. H} - 0{,}\,9877012 - 3{,}\,7632726.\ \text{K} = 0$$

$$(7)-(5)\ldots + \text{tang. H} - 0{,}\,9874457 + 1{,}\,5448868.\ \text{K} = 0$$

$$(7)-(6)\ldots + \text{tang. H} - 0{,}\,9878072 + 1{,}\,1506766.\ \text{K} = 0$$

e queste immediatamente trattate col metodo de' minimi quadrati somministrano

$$+\,5\ \text{tang.H} - 4{,}\,9383092 - 8{,}\,2364229.\ \text{K} = 0$$

$$-\,8{,}\,2364229\ \text{tang.H} + 8{,}\,1355761 + 44{,}\,634727.\ \text{K} = 0$$

donde

$$\text{K} = -\,0{,}\,0000249;\quad \text{H} = 44.^\circ\ 38'.\ 35'',\ 4$$

e finalmente

$$\begin{array}{ll} h = 40.^\circ\ 2'.\ 6'',\ 8 & h' = 40.^\circ\ 0'.\ 56'',\ 2 \\ = : \ldots\ 19,\ 4 & = \ldots\ 1.\ 21,\ 6 \\ = \ldots\ 1,\ 8 & \\ = \ldots\ 7,\ 3 & = \ldots\ 1.\ 3,\ 7. \end{array}$$

E quì piacemi di avvertire che la picciola quantità K vien sempre determinata bene col metodo de' minimi quadrati, e infatti non considerando la differenza delle due altezze h ed h' e applicando il metodo de' minimi quadrati alle vent'una combinazioni delle equazioni primitive, si troverebbe per K un valore pochissimo diverso dal precedente.

VIII. Notte 1. *Settembre.*

Stelle	Tempi dell' orologio	Ascens. rette app.	Declin. apparenti
1. α Orsa magg.	18.^{h}52'. 46", 3	163.° 8'.14",12	62.°43'. 9",66 B
2. ε Boote	19. 43. 58, 2	219. 17. 14, 20	27. 50. 13, 68 B
3. ε Orsa magg.	20. 1. 1, 8	191. 31. 19, 58	56. 56. 14, 36 B
4. η Orsa magg.	20. 17. 18, 3	205. 6. 34, 26	50. 12. 54, 12 B.

Il tempo sidereo al mezzodì vero di questo giorno avanzava di 7'. 52", 2 l'orologio del quale il diurno ritardo era di 10", 8. Il Quadrante non fu nella precedente osservazione traslocato, anzi dallo stesso luogo e alla stess' altezza delle stelle precedenti osservai un'altra stelluccia che giudicai di quinta in sesta grandezza. Il tempo dell'orologio per questa osservazione fu 19^h. 10'. 48", 5, e l'azzimut della stella preso dal Nord verso l'ovest 62°. 59' incirca. Con questi dati e coll'altezza comune delle stelle 26°. 50' trovo l'ascension retta di tale stella = 13^h. 30' e la sua declinazione = 37°. 16'. boreale. Niuna stella del Catalogo di *Piazzi* soddisfa all'indicata osservazione. Forse vi soddisfarebbe la 25 *del Levriere* notata con questo nome alla pagina 164 della *Storia celeste francese* di *La-*

lande. Io l' abbandonerò, contentandomi di riflettere che molte fra le stelle di sesta, e probabilmente alcune altresì di quinta grandezza hanno dovuto sfuggire all'infaticabile Astronomo Palermitano, e che esse meriterebbero per avventura di essere osservate e registrate da altri Astronomi. Ma tornando alle note stelle si troverà

$$(1)\ ..\ \text{sen.}h = +\,0,8887720.\ \text{sen.H} - 0,2431509.\ \cos.\text{H}$$
$$-\,0,3885378.\ \text{K}\cos.\text{H}$$
$$(2)\ ..\ \text{sen.}h = +\,0,4669599.\ \text{sen.H} + 0,1734286.\ \cos.\text{H}$$
$$-\,0,8671050.\ \text{K}\cos.\text{H}$$
$$(3)\ ..\ \text{sen.}h = +\,0,8380742.\ \text{sen.H} - 0,1930221.\ \cos.\text{H}$$
$$-\,0,5102684.\ \text{K}\cos.\text{H}$$
$$(4)\ ..\ \text{sen.}h = +\,0,7684514.\ \text{sen.H} - 0,1243195.\ \cos.\text{H}$$
$$-\,0,6277157.\ \text{K}\cos.\text{H}.$$

Piacemi di ommettere l' osservazione della stella 3, e quindi non considero che le seguenti equazioni

$$(1) - (2)\ ..\ +\,\text{tang.H} - 0,9875947 + 1,1345505.\ \text{K} = 0$$
$$(1) - (4)\ ..\ +\,\text{tang.H} - 0,9876232 + 1,9878383.\ \text{K} = 0$$
$$(4) - (2)\ ..\ +\,\text{tang.H} - 0,9875840 + 0,7940169.\ \text{K} = 0$$

dalla somma delle prime due si sottragga la terza equazione moltiplicata per 2, e si avrà ... $\text{K} = 0,0000325$. Con questo valore le tre superiori equazioni si accordano a dare

$$\text{H} = 44.^\circ\ 38'.\ 28'',\ 8$$

donde risulta la comune altezza delle tre stelle $h = 26^\circ.\ 50'.22'',7$. L' altezza della stella 3 cogli stessi valori di K e di H è $26.^\circ\ 50'.\ 32'',\ 2$.

Si poteva anche determinare H indipendentemente da K, perchè infatti le combinazioni (1) — (4) e (4) — (2) in origine sono

$$+ 0,1203206 \text{ tang.}H - 0,1188314 + 0,2391779.\ K = 0$$
$$+ 0,3014915 \text{ tang.}H - 0,2977481 + 0,2393893.\ K = 0.$$

E riguardando i termini moltiplicati per K siccome uguali, e sottraendo si ha come poc' anzi

$$H = 44^\circ.\ 38'.\ 28'',\ 8.$$

IX. Notte 4. Settembre.

Stelle	Tempi dell' orologio	Ascens. rette app.	Declin. apparenti
1. α Boote	18.ʰ 50'. 22'', 0	211.° 52'. 12'',81	20.° 7'. 21'',10 B
2. α Orsa magg.	19. 2. 53, 5	163. 8. 14, 12	62. 43. 9 ,66B
3. δ Orsa magg.	19. 36. 45, 8	181. 37. 8, 17	58. 1. 44, 60B
4. 24. γ Boote	20. 18. 10, 5	216. 12. 44, 28	39. 6. 0, 36B
5. 48. χ Boote	20. 25. 15, 5	226. 44. 50, 62	29. 50. 20, 79B.

L' orologio era indietro dal tempo sidereo al mezzodì vero di questo giorno di 8'. 28'', 0, e il suo diurno ritardo fu ritrovato di 8'', 4. Il Quadrante non fu traslocato per osservar le stelle quì sopra indicate, le quali trattate al solito danno le seguenti equazioni

$$(1) \ldots \text{sen.}h = + 0,3440289.\ \text{sen.}H + 0,2768813.\ \text{cos.}H$$
$$- 0,8972070.\ K \cos.\ H$$

$$(2) \ldots \text{sen.}h = + 0,8887720.\ \text{sen.}H - 0,2610248.\ \text{cos.}H$$
$$- 0,3767626.\ K \cos.\ H$$

$$(3) \ldots \text{sen.}h = + 0,8483166.\ \text{sen.}H - 0,2212702.\ \text{cos.}H$$
$$- 0,4810388.\ K \cos.\ H$$

$$(4) \ldots \text{sen.}h = + 0,6306773.\ \text{sen.}H - 0,0062530.\ \text{cos.}H$$
$$- 0,7760200.\ K \cos.H$$

$$(5) \ldots \text{sen.}h = + 0,4975661.\ \text{sen.}H + 0,1252495.\ \text{cos.}H$$
$$- 0,8583358.\ K \cos.\ H$$

donde si formano le combinazioni

$$(2)-(1)\;..\;+\text{tang.}H-0{,}\,9874490+0{,}\,9553940.\,K=0$$

$$(3)-(1)\;..\;+\text{tang.}H-0{,}\,9878319+0{,}\,8252594.\,K=0$$

$$(4)-(1)\;..\;+\text{tang.}H-0{,}\,9877410+0{,}\,4227723.\,K=0$$

$$(5)-(1)\;..\;+\text{tang.}H-0{,}\,9875900+0{,}\,2531712.\,K=0$$

$$(2)-(4)\;..\;+\text{tang.}H-0{,}\,9871250+1{,}\,5469411.\,K=0$$

$$(2)-(5)\;..\;+\text{tang.}H-0{,}\,9873939+1{,}\,2309966.\,K=0$$

$$(3)-(4)\;..\;+\text{tang.}H-0{,}\,9879520+1{,}\,3553675.\,K=0$$

$$(3)-(5)\;..\;+\text{tang.}H-0{,}\,9879380+1{,}\,0756852.\,K=0$$

dalla somma delle prime quattro si sottragga la somma delle quattro ultime e si avrà

$$K=-0{,}\,0000738\;;\;H=44^{\circ}.\;38'.\;43''{,}\,5$$

coi quali valori si ottiene

$$\begin{aligned} h &= 26^{\circ}.\;1'.\;37''{,}\,5 \\ &= \;.\;.\;.\;\;53{,}\,2 \\ &= \;.\;.\;.\;\;21{,}\,2 \\ &= \;.\;.\;.\;\;33{,}\,8 \\ &= \;.\;.\;.\;\;39{,}\,5. \end{aligned}$$

E se vogliansi considerar solamente le prime quattro combinazioni, dalla somma delle prime due sottratta quella delle due ultime si troverà

$$K=-0{,}\,0000454\;;\;H=44^{\circ}.\;38'.\;41''{,}\,7.$$

Coi minimi quadrati, ritenendo ancora la combinazione (4) — (5), risulterebbero le due seguenti equazioni

$$+9\;\text{tang.}\,H-8{,}\,8889353+8{,}\,2839859.\,K=0$$

$$+8{,}\,2839859.\,\text{tang.}H-8{,}\,1819916+9{,}\,1215780.\,K=0$$

e quindi

$$K=+0{,}\,0001577\;;\;H=44^{\circ}.\;38.\;24''{,}\,2$$

Da ultimo si può determinar H indipendentemente da K. A tal oggetto si considerino le combinazioni (5) — (1), (2) — (4), e (3) — (5) quali sono immediatamente, prima cioè di dividere l' equazione per il coefficiente di tang. H. Si moltiplichi per 20 la prima di esse e sarà

$+ 3,070744 . \tan H - 3,032636 + 0,777424 . K = 0 \; \ldots (a).$

Le altre due sono

$+ 0,2580947 . \tan H - 0,2547718 + 0,3992574 . K = 0 \; \ldots (b)$

$+ 0,3507505 . \tan H - 0,3465197 + 0,3772970 . K = 0 \; \ldots (c)$

Trascurando quindi come piccolissimo il termine, che contiene K, si avrà

$(a) - ((b) + (c)) \ldots + 2,461899 . \tan H - 2,431344 = 0$

e perciò $H = 44^\circ . 38' . 32'', 0.$

Richiamando pertanto le varie determinazioni che abbiam ottenute

$$\begin{aligned} H &= 44^\circ . 38' . 43'', 5 \\ &= \;\ldots\; 41, 7 \\ &= \;\ldots\; 24, 2 \\ &= \;\ldots\; 32, 0 \end{aligned}$$

si avrà per medio valore . . . $H = 44^\circ . 38' . 35'', 4.$

X. Notte 8. *Settembre.*

Stelle	Tempi dell' orologio	Ascens. rette app.	Declin. apparenti
1. *α* Boote	$19.^h\ 6'\ 40'', 4$	$211^\circ . 52' . 12'', 81$	$20.^\circ\ 7' . 21'', 10$ B
2. *γ* Orsa magg.	19. 20. 34, 3	176. 4. 55, 19	54. 41. 36, 06 B
3. *ε* Boote	20. 5. 3, 0	219 17. 14, 20	27. 50. 13, 68 B

Al mezzodì vero di questo giorno il tempo sidereo avanzava di $9'. 8'', 1$ l'orologio, il cui diurno ritardo era $9'', 2$. Il Quadrante non fu traslocato, e anzi nella stazione medesima, e alla stessa comune altezza delle stelle precedenti osservai giungere un'altra piccola stella che giudicai di quinta in sesta grandezza. Il tempo dell'orologio in cui essa vi giunse fu $19^h.\ 53'.\ 16'',8$. Con quest' elemento e coll' azzimut relativo ad Arturo che notai ho ritrovato l' Ascension retta $= 13^h.\ 39'$, e la declinazione $= 39°.\ 29'$ boreale. Alla pagina 165 *della Storia celeste francese di Lalande* si trova riferita l' osservazione di una stella di sesta in settima grandezza che potrebb'essere quella di cui parliamo. Parimenti a $20^h.\ 59'.\ 13'' \pm$ dell'orologio osservai nel centro del canocchiale un' altra stelluccia di quinta in sesta grandezza. Il suo azzimut non fu preso troppo bene: ciononostante ho voluto dedurne l' Ascension retta $= 16^h.\ 38'$, e la declinazione $= 9°.\ 56'$ boreale. Nella citata Storia celeste forse rinvenir si potrà una qualche stella che soddisfi a quest'ultima osservazione: ma intanto le tre stelle note somministrano

$$(1)\ ..\ \text{sen.}h = +0,3440289.\ \text{sen.}H + 0,2097092.\ \cos.H$$
$$-0,9152410.\ K\cos.H$$

$$(2)\ ..\ \text{sen.}h = +0,8160706.\ \text{sen.}H - 0,2565901.\ \cos.H$$
$$-0,5178708.\ K\cos.H$$

$$(3)\ ..\ \text{sen.}h = +0,4669599.\ \text{sen.}H + 0,0882358.\ \cos.H$$
$$-0,8798652.\ K\cos.H$$

e quindi si hanno le due seguenti equazioni

$$(2)-(1)\ ..\ +\text{tang.}H - 0,9878352 + 0,8418118.\ K = 0$$

$$(2)-(3)\ ..\ +\text{tang.}H - 0,9877265 + 1,0369043.\ K = 0$$

dalle quali risulta .. $K = -0,0000910$; $H = 44.°\ 39'.\ 4'',7$,

e si ha perciò ... $h = 23°.\ 1'.\ 6'',0$.

XI. Notte 11. *Settembre.*

Stelle	Tempi dell' orologio	Ascens. rette app.	Declinazioni apparenti
1. β Ofiuco	19.^{h}41′. 50″, 3	263.°39′. 17″, 16	4°.39′. 4″, 3 B
2. α Ofiuco	20. 17. 50, 8	261. 39. 14, 03	12. 42. 6, 51 B
3. 41 *t* Aquila	20. 41. 49, 5	291. 51. 49, 37	1. 40. 33, 11 A
4. 65 ϑ Aquila	21. 20, 6, 5	300. 30. 53, 82	1. 20. 45, 32 A.

Il tempo sidereo al mezzodì vero di questo giorno avanzava di 9′. 39″. 6 sull' orologio che avea per diurno ritardo 11″, 0. Non traslocai nelle precedenti osservazioni il quadrante, e già si vede abbastanza che le stelle osservate non differiscono molto in declinazione. Trovasi coi riferiti elementi

$$(1)\ldots \text{sen.}h = +0,0810895.\,\text{sen.H} + 0,8240026.\,\text{cos.H} - 0,5607539.\,\text{K cos. H}$$

$$(2)\ldots \text{sen.}h = +0,2198769.\,\text{sen.H} + 0,6869018.\,\text{cos.H} - 0,6926906.\,\text{K cos. H}$$

$$(3)\ldots \text{sen.}h = -0,0292451.\,\text{sen.H} + 0,9330194.\,\text{cos.H} - 0,3586353.\,\text{K cos. H}$$

$$(4)\ldots \text{sen.}h = -0,0234885.\,\text{sen.H} + 0,9272762.\,\text{cos.H} - 0,3736402.\,\text{K cos. H}$$

Quindi si ottengono le seguenti combinazioni

$$(2)-(1)\ldots + \text{tang.H} - 0,9878475 - 0,9506387.\,\text{K} = 6$$

$$(1)-(3)\ldots + \text{tang.H} - 0,9880562 - 1,8318693.\,\text{K} = 0$$

$$(1)-(4)\ldots + \text{tang.H} - 0,9875269 - 1,7892257.\,\text{K} = 0$$

$$(2)-(3)\ldots + \text{tang.H} - 0,9879320 - 1,3409199.\,\text{K} = 0$$

$$(2)-(4)\ldots + \text{tang.H} - 0,9877098 - 1,3109930.\,\text{K} = 0.$$

Si sommino la prima di queste combinazioni moltiplicata per 2 colla quinta, e poscia le tre intermedie. Si avranno così le seguenti

$$+3\,\text{tang.}\,H - 2,9635151 - 4,9620149.\,K = 0$$
$$+3\,\text{tang.}\,H - 2,9634048 - 3,2122704.\,K = 0$$

che sciolte somministrano

$$K = -0,0000630\,;\; H = 44^\circ.\,38'.\,45'',9.$$

Si trattino invece le cinque suddette combinazioni col metodo de' minimi quadrati, e ne risulteranno le seguenti

$$+5\,\text{tang.}\,H - 4,9390724 - 7,2236466.\,K = 0$$
$$-7,2236466\,\text{tang.}\,H + 7,1356034 + 10,9775576.\,K = 0$$

risolvendo le quali si ottiene

$$K = +0,0000347\,;\; H = 44^\circ.\,39'.\,0'',8.$$

Con questi ultimi valori si ha

$$\begin{aligned} h &= 40^\circ.\ 1'.\ 45'',1 \\ &= \ .\ .\ 44,6 \\ &= \ .\ .\ 50,5 \\ &= \ .\ .\ 39,6. \end{aligned}$$

XII. Notte 13. *Settembre.*

Stelle	Tempi dell' orologio	Ascens. rette app.	Declin. apparenti
1. 70 Aquila	19.^{h} 12'. 25'', 0	306.° 51'. 2'', 23	3.° 9'. 48'', 78 A
2. ϑ Pegaso	19. 29. 51, 7	330. 17. 34, 66	5. 19. 17, 93 B
3. α Pegaso	19. 37. 46, 3	343. 57. 47, 89	14. 14. 40, 54 B
4. α Aquario	20. 17. 0, 5	329. 8. 50, 74	1. 11. 15, 48 A
5. α Ariete	22. 5. 26, 5	29. 16. 28, 45	22. 36. 44, 00 B.

A mezzodì vero in questo giorno l'orologio restava indietro dal tempo sidereo di 10'. 1'', 6, e il suo diurno ritardo era 11'', 0. Per l'osservazione di α Ariete trasportai il quadrante ad altra finestra, e avrei anche osservato altre stelle; ma si ruppe il filo a piombo, ed io non mi sentii allora di rimetterlo. Pertanto si ottiene

$$(1) \,.\,.\, \text{sen.}h = -\,0{,}0551864.\ \text{sen.H} + 0{,}9587104.\ \text{cos.H} - 0{,}2789773.\ \text{K cos. H}$$

$$(2) \,.\,.\, \text{sen.}h = +\,0{,}0927466.\ \text{sen.H} + 0{,}8125696.\ \text{cos.H} - 0{,}5754377.\ \text{K cos. H}$$

$$(3) \,.\,.\, \text{sen.}h = +\,0{,}2460616.\ \text{sen.H} + 0{,}6610556.\ \text{cos.H} - 0{,}7088437.\ \text{K cos. H}$$

$$(4) \,.\,.\, \text{sen.}h = -\,0{,}0207267.\ \text{sen.H} + 0{,}9245356.\ \text{cos.H} - 0{,}3805314.\ \text{K cos. H}$$

$$(5) \,.\,.\, \text{sen.}h = +\,0{,}3844923.\ \text{sen.H} + 0{,}5243694.\ \text{cos.H} - 0{,}7597383.\ \text{K cos. H.}$$

Formansi quindi le seguenti

$$(2)-(1) \,.\,.\, +\ \text{tang.H} - 0{,}9878850 - 2{,}0040179.\ \text{K} = 0$$

$$(3)-(1) \,.\,.\, +\ \text{tang.H} - 0{,}9880722 - 1{,}4269516.\ \text{K} = 0$$

$$(3)-(4) \,.\,.\, +\ \text{tang.H} - 0{,}9875996 - 1{,}2306097.\ \text{K} = 0$$

$$(5)-(1) \,.\,.\, +\ \text{tang.H} - 0{,}9878600 - 1{,}0934371.\ \text{K} = 0$$

$$(5)-(2) \,.\,.\, +\ \text{tang.H} - 0{,}9878472 - 0{,}6317164.\ \text{K} = 0$$

$$(5)-(4) \,.\,.\, +\ \text{tang.H} - 0{,}9875307 - 0{,}9358072.\ \text{K} = 0.$$

Sommando a parte le prime tre combinazioni e poscia le ultime tre si avrà

$$+\ 3\ \text{tang. H} - 2{,}9635568 - 4{,}6615792.\ \text{K} = 0$$

$$+\ 3\ \text{tang. H} - 2{,}9632379 - 2{,}6609607.\ \text{K} = 0$$

dalle quali emerge

$$K = -0,0001594 \,;\; H = 44^\circ.\,38'.\,31'',6$$

e applicando invece la correzione de' minimi quadrati alle sei precedenti combinazioni si ha

$$+6 \text{ tang. } H - 5,9267947 - 7,3225399.\,K = 0$$

$$-7,3225399 \text{ tang. } H + 7,2333603 + 10,0371021.\,K = 0$$

donde risulta

$$K = -0,0001470 \,;\; H = 44.^\circ\,38'.\,35'',3.$$

Questi ultimi valori somministrano

$$\begin{aligned} h &= 40^\circ.\,2'.\,36'',6 \\ &= \;.\;.\;.\;37,7 \\ &= \;.\;.\;.\;22,9 \\ &= \;.\;.\;.\;12,6 \\ &= \;.\;.\;.\;30,3 \end{aligned}$$

XIII. Notte 24. *Settembre* 1820.

Stelle	Tempi dell' orologio	Ascens. rette app.	Declin. apparenti
1. *α* Pegaso	19.ʰ35'.48",5	343°.57'.48",16	14.° 14.' 41",83 B
2. *α* Aquario	20. 15. 3, 5 ±	329. 8. 50, 16	1. 11. 12, 89 A
3. *γ* Pegaso	20. 44. 12, 0	1. 0. 29, 23	14. 11. 19, 23 B
4. *β* Triangolo	21. 26. 52, 7	29. 43. 54, 07	34. 8. 12, 43 B
5. *α* Ariete	22. 3. 27, 3	29. 16. 31, 95	22. 36. 45, 75 B
6. *ε* Perseo	22. 57. 37, 5	56. 27. 55, 58	39. 29. 2, 50 B
7. *ζ* Perseo	23. 19. 35, 0	55. 43. 20, 98	31. 20. 40, 93 B

A mezzodì vero in questo giorno l' orologio fu ritrovato indietro dal tempo sidereo di 12'. 2", 0, e il suo diurno ritardo era di 10", 9. Il Quadrante poi dopo l' osservazione delle prime tre stelle fu traslocato e posto nuovamente di livello per le osservazioni seguenti. Ciò premesso risulta

$$(1)\ \ldots\ \text{sen.}h = +\,0{,}\,2460677.\ \text{sen.}H + 0{,}\,6611732.\ \cos.\ H$$
$$-\,0{,}\,7087320.\ K \cos.\ H$$

$$(2)\ \ldots\ \text{sen.}h = -\,0{,}\,0207141.\ \text{sen.}H + 0{,}\,9246244.\ \cos.\ H$$
$$-\,0{,}\,3803163.\ K \cos.\ H$$

$$(3)\ \ldots\ \text{sen.}h = +\,0{,}\,2451156.\ \text{sen.}H + 0{,}\,6620179.\ \cos.\ H$$
$$-\,0{,}\,7082732.\ K \cos.\ H$$

$$(4)\ \ldots\ \text{sen.}h = +\,0{,}\,5611704.\ \text{sen.}H + 0{,}\,3499868.\ \cos.\ H$$
$$-\,0{,}\,7500647.\ K \cos.\ H$$

$$(5)\ \ldots\ \text{sen.}h = +\,0{,}\,3845004.\ \text{sen.}H + 0{,}\,5244005.\ \cos.\ H$$
$$-\,0{,}\,7597127.\ K \cos.\ H$$

$$(6)\ \ldots\ \text{sen.}h = +\,0{,}\,6358631.\ \text{sen.}H + 0{,}\,2762118.\ \cos.\ H$$
$$-\,0{,}\,7206838.\ K \cos.\ H$$

$$(7)\ \ldots\ \text{sen.}h = +\,0{,}\,5201854.\ \text{sen.}H + 0{,}\,3904303.\ \cos.\ H$$
$$-\,0{,}\,7595864.\ K \cos.\ H.$$

Fra le diverse combinazioni semplici di queste equazioni nella eliminazione di sen *h* ve ne ha alcune che si debbono assolutamente rigettare attesa la poca differenza nelle rispettive declinazioni delle stelle, come per esempio fra le stelle 1. e 3. Dall' ispezione più attenta di tali combinazioni si può anche arguire che l' osservazione della stella 3. contiene rispetto alle altre un errore un pò forte, e perciò gioverebbe forse di trascurarla intieramente. Ciò nondimeno, trattando dapprima le combinazioni col metodo de' minimi quadrati, mi si concederà di ritenere anche la suddetta osservazione. Le combinazioni, che io considero, si riducono alle seguenti

$$(1)-(2)\ \ldots\ +\,\text{tang.}H - 0{,}\,9875157 - 1{,}\,2310274.\ K = 0$$

$$(4)-(2)\ \ldots\ +\,\text{tang.}H - 0{,}\,9875460 - 0{,}\,6354326.\ K = 0$$

$$(5)-(2)\ldots+\text{tang.}H-0{,}\,9876839-0{,}\,9362852.\,K=0$$

$$(7)-(2)\ldots+\text{tang.}H-0{,}\,9876032-0{,}\,7011840.\,K=0$$

$$(4)-(1)\ldots+\text{tang.}H-0{,}\,9875712-0{,}\,1311722.\,K=0$$

$$(6)-(1)\ldots+\text{tang.}H-0{,}\,9875986-0{,}\,0306618.\,K=0$$

$$(7)-(1)\ldots+\text{tang.}H-0{,}\,9876882-0{,}\,1855207.\,K=0$$

$$(6)-(2)\ldots+\text{tang.}H-0{,}\,9875650-0{,}\,5182446.\,K=0$$

$$(5)-(1)\ldots+\text{tang.}H-0{,}\,9880086-0{,}\,3682707.\,K=0$$

$$(3)-(2)\ldots+\text{tang.}H-0{,}\,9878750-1{,}\,2337294.\,K=0$$

$$(6)-(3)\ldots+\text{tang.}H-0{,}\,9873539-0{,}\,0317612.\,K=0$$

$$(6)-(4)\ldots+\text{tang.}H-0{,}\,9877135+0{,}\,3933570.\,K=0$$

$$(6)-(5)\ldots+\text{tang.}H-0{,}\,9873730+0{,}\,1552693.\,K=0$$

$$(7)-(5)\ldots+\text{tang.}H-0{,}\,9873622+0{,}\,0009308.\,K=0.$$

La correzione de' minimi quadrati applicata a tutte queste equazioni somministra le due seguenti

$$+14\,\text{tang.}\,H-13{,}\,8264580-5{,}\,4537327.\,K=0$$

$$-5{,}\,4537327.\text{tang.}\,H+5{,}\,3865161+5{,}\,4461933.\,K=0$$

risolvendo le quali si ottiene

$$K=-0{,}\,0001166;\quad H=44.^\circ\ 38'.\ 28'',\,9.$$

Proviam ora un secondo metodo. Riflettendo alle combinazioni immediate delle equazioni fondamentali, prima cioè di dividerle per lo coefficiente di tang. H, si sarà veduto che alcuni termini sono trascurabili, perchè in essi il coefficiente di K è una picciolissima quantità. In simil guisa, ommettendo ancora di considerar l'osservazione 3, io prendo i seguenti valori indipendenti da K

dalla combinazione (4) — (1) . . . tang.H = 0, 9875712
(5) — (1) . . . . = 0, 9880085
(6) — (1) . . . . = 0, 9875986
(7) — (1) . . . . = 0, 9876882
(6) — (4) . . . . = 0, 9877135
(7) — (5) . . . . = 0, 9873622

e per un medio di tali valori . . H = 44.° 38′. 39″, 2.

Finalmente delle quattordici combinazioni superiormente esposte si considerino le sole prime otto, dalle quali non è contenuta l'osservazione 3. e che presentano le più favorevoli circostanze alle attuali determinazioni. Sommando a parte le prime quattro, e poscia le quattro ultime si avrà

$$+ 4 \text{ tang. } H - 3,9503488 - 3,5039292 . K = 0$$
$$+ 4 \text{ tang. } H - 3,9504230 - 0,8655993 . K = 0$$

donde si ottiene

$$K = + 0,0000281.$$

Sostituito questo valore in ciascuna delle prime otto combinazioni suindicate si troverà per ordine

H = 44.° 38′. 28″, 0
= 29, 4
= 44, 7
= 35, 6
= 30, 6
= 33, 2
= 42, 9
= 30, 9

e quindi per valor medio . . . . H = 44.° 38′. 34″, 4.

Queste ultime determinazioni di H e di K somministrano poi

$h = 40.^\circ\ 2'.\ 23'', 1$
$= \dots\ 20, 0$
$= \dots\ 4, 8$
$= \dots\ 25, 3$
$= \dots\ 12, 3$
$= \dots\ 24, 0$
$= \dots\ 18, 8.$

Di quì si conferma che l'osservazione 3. fu, rispetto alle altre, in errore alquanto sensibile.

Hanno termine a questo punto le osservazioni che feci di stelle arrivate ad una comune altezza nell' intervallo di poche ore della notte. Riunirò nel sottoposto quadro i risultamenti che ne abbiam ottenuti

Notti	Numero delle stelle osservate	Latitudine
I.	 5	44.° 38'. 46", 9
II. . . .	 3	. . 38. 35, 9
III. . . .	 4	. . 38. 39, 6
IV. . . .	 6	. . 38. 51, 4
V. . . .	 5	. . 38. 47, 0
VI. . . .	 5	. . 38. 41, 9
VII. . .	 7	. . 38. 37, 2
VIII. . .	 4	. . 38. 28, 8
IX. . . .	 5	. . 38. 35, 4
X. . . .	 3	. . 39. 4, 7
XI. . . .	 4	. . 38. 53, 4
XII. . .	 5	. . 38. 33, 5
XIII. . .	 7	. . 38. 34, 1

la media delle quali determinazioni, niuna eccettuandone, è 44.° 38'. 42'', 3.

Ma l'incertezza di quest' ultimo risultamento, ad onta delle diligenze praticate nelle osservazioni e nel calcolo, è ancora molto forte, giacchè i valori del quadro precedente si allontanan di troppo uno dall'altro, ed io infatti ritengo che la mia latitudine sia maggiore di circa 10'' della media testè ottenuta. La discordanza però delle suesposte determinazioni non mi sgomenta, e quasi direi di esserne soddisfatto in vista che un accordo sorprendente fra i risultati di molte osservazioni è stato qualche volta di sola apparenza, o piuttosto esso conteneva un error comune, che il calcolo non era capace di eliminare, e che d' altronde non si sapeva conoscere *a priori*. Veggasi per esempio ciò che riferisce il sopralodato *Bar. di Zach* nella sua *Corrispondenza astronomica 3.° fascicolo Marzo* 1819. *pag.* 215. *e seg.* sulla latitudine di Roma da valenti Astronomi determinata con buoni stromenti e con parecchie migliaja di osservazioni, le quali dapprincipio si accordarono perfettamente, indi per sensibile differenza si divisero quasi in due partiti. Ed è pure un' altra mia soddisfazione quella che le differenze fra i risultamenti delle mie operazioni oscillano fra gli stessi limiti delle posizioni calcolate dal medesimo *Bar. di Zach.* e riportate ne' due fascicoli 6.° 1818. *pag.* 595. e 1.° 1819. *pag.* 87. della citata *Corrispondenza.*

A decidere pertanto la quistione, e a fissare il valore più prossimo del cercato elemento senza partire dalle osservazioni che ho esposte, mi venne in pensiero di riguardare le precedenti determinazioni appunto come un primo calcolo di approssimazione, al quale se ne possano far succedere altri sempre più al vero approssimantisi. Il mezzo per conseguir questo fine mi sembrerebbe il seguente.

Determinati i prossimi valori di H e K si hanno dalle equazioni fondamentali i valori di h per ciascuna stella osservata. Le differenze che s' incontrano fra tali valori di h

rappresentano, se non a rigore almeno sensibilmente, gli errori delle rispettive osservazioni. Posto ciò nella equazione generale (A) si considerino variabili h e P, e si differenzii trascurando l'ultimo termine del secondo membro, perchè assai picciolo. Sarà

$$dP = \frac{-\cos.h}{\text{sen}.P\cos.D\cos.H}\, dh \qquad (A').$$

Con questa formola, impiegando i prossimi valori noti e date le differenze dh, si troveranno rispettivamente le correzioni dP da applicarsi agli angoli orarii delle stelle. Introdotte poi simili correzioni si ripiglierà il calcolo delle equazioni come se h non fosse conosciuta, cioè si riprenderanno le operazioni dalla eliminazione di sen. h. Qualora però la quantità K si possa credere sufficientemente bene stabilita, basterà di considerar immediatamente la latitudine in quelle combinazioni che sono le più favorevoli, ossia chè debbono risentir meno l' influenza dei residui errori delle osservazioni. Mi limiterò ad un esempio.

Per la sera 18 Luglio num. IV. pongasi $dh = -14''$ tanto rispetto alla stella α2 Libbra quanto all' altra della chioma di Berenice. Si troverà

$$dP = +29'',2 \text{ per la prima stella}$$
$$= +21,2 \text{ per la seconda.}$$

Quindi le equazioni corrette risulteranno

$$(2) \ldots \text{sen}.h = -0,2637158.\,\text{sen}.H + 0,7250793.\,\cos.H - 0,6361711.\,K\cos.H$$

$$(3) \ldots \text{sen}.h = +0,4785880.\,\text{sen}.H - 0,0080194.\,\cos.H - 0,8780028.\,K\cos.H$$

E correggendo corrispondentemente le combinazioni più favorevoli, e ad esse applicando il valore di $K = +0,0005643$; si avrà

dalla combinazione (2) — (1) . . . H = 44.° 38′. 50″, 9
(3) — (1) . . . . . = ... 52, 1
(4) — (1) . . . . . = ... 51, 5
(5) — (1) . . . . . = ... 50, 3
(6) — (1) . . . . . = ... 49, 7
(3) — (2) . . . . . = ... 52, 3
(4) — (2) . . . . . = ... 51, 2
(5) — (2) . . . . . = ... 50, 1
(6) — (2) . . . . . = ... 49, 1
(5) — (6) . . . . . = ... 52, 0

Media . . . H = 44.° 38′. 50″, 9.

L' accordo fra i valori di H nell' indicata maniera ottenuti mi sembra che più non debba ingerire grande sospetto, ed è perciò che senza estendermi ad ulteriori calcoli mi riprometto di lievissimo errore nello stabilire in rotondi numeri la cercata latitudine = 44°. 38′. 51″, quale all' incirca si conosceva per geodetiche congiunzioni di triangoli (6.° fascicolo 1818 citato della corrispondenza astronomica). Si vede altresì che può bastare una sola osservazione di poche stelle per fissare con qualche precisione la latitudine, purchè opportunamente si trattino le equazioni (A) ed (A′).

Terminerò la presente Memoria indicando un metodo per ottenere la latitudine analogo a quello che abbiam seguito. Invece di riguardar comune per molte osservazioni, come abbiam fatto, l'altezza delle stelle, si potrebbe riguardar comune l'azzimut, ed è chiaro anzi che si sfuggirebbe in questa guisa il difetto, per altro insensibile, del primo metodo, e che proviene dalle differenze di refrazione corrispondentemente alla temperatura variante dell'Atmosfera. Vediamo qual calcolo si deve istituire per battere la nuova strada.

Chiamato Z l' azzimut di una stella per il dato istante e ritenendo le altre superiori denominazioni, il terzo Canone trigonometrico somministra

$$\text{cot. } Z = \frac{\text{tang.D cos.H} - \text{cos.P sen.H}}{\text{sen.P}}.$$

Supposto anche quì $= K$ l'errore dell'orologio, se ne aumenti l'angolo P, e facendo

$$\text{sen. } (P + K) = \text{sen. } P + K \text{ cos. } P$$
$$\text{cos. } (P + K) = \text{cos. } P - K \text{ sen. } P$$

svolgasi in serie, e si trascurino al solito i termini oltre la seconda dimensione inclusivamente. Si avrà, dividendo per cos. H e ponendo per brevità ... tang. H — tang.D cos. P $= a$.

$$\frac{\text{cot.Z}}{\text{cos.H}} = \frac{\text{tang. D}}{\text{sen.P}} - \text{cot. P tang. H} + \frac{aK}{\text{sen.}^2 P} \quad . \; . \; . \; . \; (B).$$

Questa equazione è a vero dire più incomoda a calcolarsi che la (A). Inoltre abbiamo quì il termine K tang. H, che porterebbe nella eliminazione delle incognite ad una equazione di 2.° grado. Ma se le osservazioni sono in maggior numero di tre, se ne tratteranno per semplicità le equazioni come se K tang. H fosse una quarta incognita, o piuttosto per il termine $\frac{aK}{\text{sen.}^2 P}$, che è sempre una piccola quantità, basterà di supporre in a un valor prossimo di tang. H, e basterebbe nel mio caso di fare

$$a = 1 - \text{tang. D cos. P}.$$

Per togliere infine gli errori individuali delle osservazioni, differenzieremo l' equazione (B), trascurando in tale operazione l' ultimo termine del secondo membro. Avremo così

$$dP = \frac{\text{sen.}^2 P}{\text{sen.}^2 Z} \cdot \frac{dZ}{a \text{cos. H}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (B')$$

Pertanto il sistema delle equazioni (B) e (B') servirà come quello delle (A) ed (A') per determinare praticamente la latitudine.

Avrei amato di soggiungere un esempio del metodo poc' anzi accennato, e feci anche a tal oggetto una osservazione di quattro stelle pervenute successivamente al centro del canocchiale del mio quadrante che stava immobile in azzimut; ma oltrechè le stelle erano troppo vicine in declinazione, il calcolo mi ha convinto che gli errori di ciascuna osservazione riuscirono forti soverchiamente. Nè poteva essere altrimenti, poichè nel mio piccolo quadrante il movimento del canocchiale in altezza importa uno sfregamento alquanto rude contro il lembo, in conseguenza di che l' azzimut deve sensibilmente alterarsene. Aggiungasi che il piede dello stromento è assai debole di sua costruzione e lo era più ancora nella penuria delle mie circostanze per ben valermene. Da ultimo l'asse medesimo del canocchiale trasportandosi lungo il lembo avea per avventura forti deviazioni meccaniche da un invariabile piano verticale. Non dubito per altro che si potrebbero con vantaggio istituire le indicate osservazioni con un semplice e anche picciolo Teodolite.

NOTA

All'epoca, in cui questa Memoria esce alla pubblica luce, sta per compiersi con Estense splendidezza l' Osservatorio Astronomico di Modena, eretto per Sovrana clementissima volontà nel Torrione a Oriente della Facciata del R. Palazzo. Quivi saranno in breve collocate varie macchine bellissime, e di moderna squisitezza per uso di osservazioni celesti; laonde non andrà molto che la posizione geografica di Modena, così in latitudine come in longitudine, potrà essere coll'ultima esattezza riconosciuta.

SULLA TEORICA
DEL MOTO COMPOSTO
MEMORIA

DELL' AB. GIUSEPPE ZAMBONI

Prof. di Fisica nell' I. R. Liceo di Verona

Ricevuta adì 9. Febbrajo 1827.

Fra i teoremi fondamentali della Meccanica, quello della equipollenza di due forze unite ad angolo alla forza espressa per la diagonale nel moto composto, sembra, a giudizio di sommi Matematici, non potersi dimostrare con tutto rigore geometrico se non per parecchi altri teoremi, e lunghissime dimostrazioni, come può vedersi nel Bernoulli, nel d' Alembert, e nel P. Riccati. E quel che è più, dappoichè il celebre P. Fontana (*) illustrò la dimostrazione semplicissima lasciataci dal Newton di quel Teorema, ecco nuovamente in campo al principio di questo secolo il Professor Michele Araldi nome assai caro alle scienze, e di preziosa memoria nella Società nostra non meno, che nell' Istituto Nazionale d' Italia. Egli pertanto nella sua Memoria inserita nel T.° I. del suddetto Istituto P. I. p.ª 415, riconosciuta l' importanza di sostenere il detto principio dell'equipollenza con tal forza di raziocinio, *che soggiogando l' intelletto, costringa anche i più fastidiosi e difficili a dichiararsene soddisfatti*, propone con esemplare modestia una sua prova, promettendone il vantaggio dalle altre, *che mentre* Ei dice *le di-*

(*) Biblioteca Fisica d'Europa T. VII. pag. 50.

mostrazioni dei Matematici soprallodati si avvolgono ed allungano per ben sei ed anche sette dimostrazioni, il mio tentativo, se pur desso ha raggiunto lo scopo, spedisce tutto l'affare in tre soli Teoremi. Nel primo di questi Egli tratta della forza equivalente a due altre eguali, le cui direzioni si uniscano ad angolo retto. Nel secondo suppone retto l' angolo delle direzioni, e disuguali le forze; nel terzo finalmente disuguali le forze, e le direzioni unite da qualunque angolo. Semplice e facilissima è la sua dimostrazione del primo teorema, ma però di quelle indirette, che diconsi *per absurdum*. Semplicissima altresì quella del terzo; ma il secondo da cui il terzo dipende abbisogna di cinque figure, e del lunghissimo raziocinio di quattro pagine e mezza.

Mirabile a dir vero è la finezza di quel suo ragionare geometrico; ma per ciò appunto riesce a confermare, che sia molto difficile la dimostrazione rigorosa del teorema colla geometria elementare. D' altra parte il Newton, pur severissimo nelle sue dimostrazioni, giudicò provata ogni cosa di quei tre teoremi per un solo, nel modo più facile, e riputato il migliore dal sullodato Fontana. Or dunque donde mai differenza sì strana? E come ischifare la taccia di ardito, chi volesse difinirla? Io certamente

Colla veduta corta d'una spanna

non verrò mai a disputare fra le linci.

Se non che abbracciata la dimostrazion Newtoniana, forse perchè più conveniente alla brevità del mio ingegno, mi sono studiato di trovare nella medesima quel rigore geometrico, che per avventura non si manifesta nel comento che ce ne diede il Fontana. Come io vi sia riuscito, lo giudicheranno i più veggenti; ma spero, che alla maniera che io tengo per giungere allo scopo, si accorderà almeno il vantaggio di chiarire vie meglio l' istruzione sul moto composto.

DEFINIZIONI

I.

Il moto rispettivo a un dato punto o retta linea è il cangiamento successivo della distanza del mobile dal detto punto o linea.

II.

La misura della detta distanza nel moto rispettivo è la linea più corta intercetta fra il punto ove il mobile si trova, ed il punto o retta linea riguardo a cui si fa il moto rispettivo prolungata se occorre. Un mobile per esempio, che dal punto A (Fig. 1.) viene in B descrivendo la AB.

1.° Ha un moto rispettivo dal punto A verso il punto B, e le varie distanze che acquista il mobile successivamente dal punto B nei punti E, G sono misurate dalle rette EB, GB.

2.° Il mobile venendo da A in B ha eziandio dei moti rispettivi riguardo ad altre linee. Si avvicina per esempio alle rette CB, BH; e le varie distanze del mobile dalla prima CB quando si trova successivamente nei punti A, E, G sono misurate dalle normali AC, ED, GF; e le normali AR, EH, GP misurano il variare della sua distanza nei punti medesimi A, E, G dalla retta BH. Così pure collo stesso movimento da A in B si allontana contemporaneamente dalle rette AC, AO; e le normali EM, GN, BO misurano il crescere della sua distanza dalla retta AO, come le normali ES, GT, BC il suo allontanarsi più e più dalla retta AC.

III.

La velocità per la quale un mobile fa un moto rispettivo di una certa misura in certo tempo dicesi *velocità rispettiva.*

E però se un mobile dal punto A (Fig. 2.) abbia un moto rispettivo verso la retta BD per l'una o l'altra delle tre direzioni AB, AC, AD; ed impieghi lo stesso tempo a descrivere tanto la AB, quanto la AC, o la AD, avendo tutte e tre per misura comune del detto moto rispettivo la distanza normale AE, la velocità *rispettiva* del mobile è la medesima in ciascuna delle tre direzioni.

ASSIOMI

Un mobile non ha alcun moto rispettivo riguardo a una linea parallela a quella ch' esso descrive.

II.

Un mobile fra due linee parallele non può aver contemporaneamente due moti rispettivi di avvicinamento alle dette due linee, o di allontanamento dalle medesime.

TEOREMA.

Un mobile in A (Fig. 3.) spinto al moto contemporaneamente da due forze AB, AC le cui direzioni si uniscano con un angolo qualunque CAB, in quel tempo che avrebbe descritto o l'una o l'altra delle AB, AC, descrive la diagonale AD del parallelogrammo ABDC, che risulta dalle due linee AC, AB esprimenti le direzioni e i valori delle due forze.

DIMOSTRAZIONE.

Ecco quella del Newton: *Nam quoniam vis* AC *agit secundum lineam* AC *ipsi* BD *parallelam, haec vis* AC (*per Legem II. motus*) *nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam* BD *a vi altera* AB *genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam* BD, *sive vis* AC *imprimatur sive non;*

atque adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa BD. *Eodem argumento in fine temporis ejusdem reperietur alicubi in linea* CD; *et idcirco in utriusque lineae concursu* D *reperiri necesse est. Perget autem motu rectilineo ab* A *ad* D *per Leg. I.*

Or questa dimostrazione dietro gli allegati principj del moto rispettivo si potrebbe svolgere nella seguente maniera.

La forza AC produce da sè il moto per AC, e con esso un moto rispettivo verso la retta CD (*Defin. II*). Il qual moto rispettivo potrebbe avere la stessa velocità rispettiva tanto per la direzione AC, quanto per altra direzione che dal punto A venisse a toccare altro punto della CD diverso dal punto C. (*Definiz. III.*).

Dico primieramente, che il mobile non può fare il detto moto rispettivo di avvicinamento alla CD per la direzione AC, ed ubbidire insieme all' altra forza AB. Imperciocchè questa forza AB produce un moto rispettivo dal punto A verso la retta BD. Ma se il mobile si movesse per AC non avrebbe alcun moto rispettivo verso la retta BD, essendo AC parallela a BD (*Assioma I*). Dunque il mobile se venisse per AC non avrebbe in nulla ubbidito alla forza AB. Similmente si dimostra, che se il mobile andasse per AB non potrebbe in nulla ubbidire alla forza AC.

Dico in secondo luogo, che il moto rispettivo di avvicinamento dal punto A verso la retta CD dee farsi, malgrado dell' altra forza AB, per direzione bensì diversa dalla AC, ma colla stessa velocità rispettiva, che si avrebbe per la direzione AC. Poichè essendo AB parallela a CD, la forza che produce il moto per AB non produce alcun moto rispettivo riguardo alla linea CD (*Assioma I*); vale a dire la forza AB colla sua direzione AB parallela alla CD non può nè accrescere nè diminuire la velocità rispettiva dell' altra forza AC dal punto A verso la retta CD. Dunque se il mobile non può fare il suo moto rispettivo dal punto A verso la retta CD per la direzione AC, come fu provato, dovrà farlo per altra direzione e colla stessa velocità rispettiva che avrebbe avuto per la direzione AC. Similmente si dimostra, che essendo AC parallela a BD, il moto rispettivo dal punto A verso la retta BD, che non può farsi per la direzione AB, si dovrà fare, malgrado della forza AC, per altra direzione colla stessa velocità rispettiva che si avrebbe per la AB.

Pertanto essendosi provato, che il moto rispettivo dal punto A verso la CD non può essere nè agevolato nè impedito dalla forza AB; nè parimenti il moto rispettivo dallo stesso punto A verso la BD può essere impedito nè agevolato dalla forza AC, ne viene, che il mobile dovrà ubbidire alle due forze col descrivere una linea la cui direzione partendo dal punto A abbia contemporaneamente due moti rispettivi di avvicinamento l' uno alla retta CD, l' altro alla retta BD; e la detta linea si descriva colla stessa velocità rispettiva, che si avrebbe avuto o per la AC o per la AB essendo il tempo per AB uguale al tempo per AC. Ma la sola diagonale AD (*Defin. II.*) è quella la cui direzione AD contiene i due moti rispettivi l' uno verso la retta CD, l'altro verso la retta BD, al termine della qual diagonale descritta nel detto tempo il mobile compisce amendue i moti rispettivi, toccando amendue le rette CD, BD nel punto D comune ad entrambi. Dunque ec.

Ecco a parer mio l' evidenza geometrica che si può dare alla dimostrazione del Newton colla figura simplicissima da Lui usata.

Ma se si adoperi la Fig. 4. colla quale i Fisici scomponendo sì l'una delle forze date AB nelle due AE, AH, come l' altra AC nelle due AF, AG, dimostrano, che delle quattro forze le due AE AF perchè uguali e contrarie non producono alcun moto; e le altre due AE ed AG, che rimangono cospiranti servono a far descrivere la sola diagonale AD, se, dico, applicheremo le nozioni e i principj del moto rispettivo a tal figura, nè verrà altra dimostrazione ancor più analizzata dello stesso Teorema; mentre nell'uso fatto da' Fisici di tal costruzione, si suppone già dimostrato, che la forza AB equivalga alle due espresse dalle AE, AH, e così pure l' altra forza AC equivalga alle due AF AG.

Pertanto colle due rette AB, AC, che esprimono le due forze componenti, compiuto il parallelogrammo ABDC, e tirata la diagonale AD, io non propongo già di scomporre veruna delle forze date; ma condotta comunque si voglia la BH, con le due HA, HB formo il parallelogrammo AEBH; indi condotta CG parallela ad AE, e CF parallela ad AG, prolungo EA in F per compire l' altro parallelogrammo AGCF. Per tal costruzione abbiamo dalla Geometria AE uguale ad AF, ed AH uguale a GD; e quindi la somma di AG con AH uguale a tutta la diagonale AD. Dico adunque, che le due forze AB, AC non possono dare il moto se non per la diagonale AD.

Imperciocchè la forza in A colla sua direzione AB produce due movimenti rispettivi di avvicinamento l' uno alla retta BH, l' altro alla retta EB (*Defin. II.*); e parimenti l' altra forza in A colla sua direzione AC produce altri due movimenti rispettivi di avvicinamento l' uno alla retta CG, l' altro alla retta FC. Dei quali movimenti rispettivi quello dal punto A verso la EB e l' altro dallo stesso punto A verso la FC non possono aver luogo; perciocchè il mobile in A fra le due parallele EB, ed FC non può essere contemporaneamente avvicinato ad entrambi (*Assioma II*); e nemmeno all' una più che all' altra; perchè essendo EA uguale ad AF, amendue gli avvicinamenti dal punto A alla EB, e dallo stesso punto A alla FC sono di ugual misura; ed il tempo per AB ponendosi uguale al tempo per AC, il mobile in A tende a fare ciascuno dei detti due avvicinamenti con la stessa velocità rispettiva (*Defin. III*), e perciò non dovrà fare nè l' uno nè l' altro. Ma i due movimenti rispettivi dal punto A verso la BH, e dallo stesso punto A verso la GC possono farsi per una sola direzione. Dunque il mobile dovrà farli amendue, ma per tal direzione che non abbia alcun moto rispettivo nè verso la EB, nè verso la FC; cioè per una direzione parallela a queste due linee (*Assioma I*). Ora la diagonale AD è appunto parallela alle due EB, FC. Dunque il movimento rispettivo dal punto A verso la BH dovrà farsi per AH porzione della diagonale, e l' altro dal punto A verso la GC per l' altra porzione AG; le quali due porzioni formano appunto tutto il moto per la diagonale AD come dovea dimostrarsi. Da ciò si vede, che la risultante di due forze unite ad angolo contiene quei soli movimenti rispettivi delle componenti, che possono farsi per una sola direzione; e gli altri si distruggono l' un l' altro, il che mostra in qualunque caso la distruzione d' una parte di moto in ciascuna delle forze componenti.

E questa maniera di rappresentare la risultante di due forze unite ad angolo ci fa strada a dover considerare in qualunque forza anche semplice i suoi moti rispettivi; il che darà maggior luce a quelle teorie meccaniche, nelle quali si usa risolvere una forza semplice in altre obblique.

Ed in vero, per l' esempio della Definizione II, e per le fatte dimostrazioni si potrà formare il seguente principio generale: *Qualunque movimento semplice da un punto a un altro contien necessariamente tutti i moti rispettivi ai lati di tutti i parallelogrammi, che hanno per diagonale comune la retta esprimente quel moto semplice.* Un mobile per es. che descrive il moto semplice da A in B (Fig. 5), colla sua direzione AB fa nello stesso tempo tanto i movimenti rispettivi ai lati AC AE, CB, EB del parallelogrammo AEBC, quanto i movimenti rispettivi ai lati del parallelogrammo ADBF, e così pure tutti i movimenti rispettivi ai lati di tutti quei parallelogrammi che hanno la retta AB per diagonale comune. Il perchè una forza semplice in tanto produce il movimento da A in B, in quanto che non vien impedita dal fare nello stesso tempo tutti gli altri suddetti rispettivi; de' quali un solo che le fosse tolto di fare, la forza produrrebbe un moto diverso da AB in direzione e in valore.

Per determinare in tal caso, qual debba essere il nuovo movimento prodotto dalla forza; sia e. g. il moto rispettivo dal punto A (Fig. 5) verso la EB tolto interamente da un ostacolo che si oppone da E in A. Allora colle due AE, EB fatto il parallelogrammo AEBC, si prova, che la forza in vece del moto AB produrrà nello stesso tempo il moto AC.

Ed in fatti la direzione AB contiene necessariamente il movimento rispettivo dal punto A verso la retta EB. Ma questo movimento rispettivo si suppone impossibile a farsi per cagion dell' ostacolo. Dunque non si avrà più moto per la direzione AB, ma per altra direzione, che non abbia alcun moto rispettivo verso la EB. La causa poi, o l' ostacolo che toglie il moto rispettivo dal punto A verso la EB operando da E in A cioè in direzione parallela a CB, non può alterare il moto rispettivo, che la forza in A produce dal punto A verso la BC (*Assioma I*). Laonde il mobile dovrà prender tal direzione dal punto A, che non abbia alcun moto rispettivo verso la EB, ma lo abbia verso la BC colla stessa velocità rispettiva che avrebbe avuto descrivendo la AB. Ma la sola AC essendo parallela ad EB non contiene alcun moto rispettivo riguardo alla EB (*Assioma I*); ed il mobile descrivendo la detta AC nel tempo medesimo che avrebbe percorso la AB, conserva la stessa velocità rispettiva verso BC (*Defin. III*). Dunque la forza produrrà il movimento da A in C col valore AC in luogo del movimento AB.

Vero è, che posto il principio della risoluzione d' una forza semplice AB in altre due oblique AE, AC, si conchiude più prestamente, che tolta una di queste AE dall' ostacolo, il moto sarà fatto unicamente dall' altra AC; nè io pretendo già infirmare di un minimo chè la sicurezza di tal principio. Ma lo spiegare il fenomeno d' un moto, come sarebbe l' urto obbliquo AB sul piano EG (Fig. 6) col sostituire alla forza reale AB due forze, che in fatto non esistono cioè le AD, AC unite ad angolo retto in A, può bensì convincere per la equivalenza della forza reale AB alle due supposte AD, AC; ma l'animo, che non trova esistenti realmente queste due forze, non può esserne pienamente soddisfatto e domanda tuttavia cosa v' abbia nella forza reale AB, che la fa operare al modo stesso delle due supposte AD AC.

Ora usando del principio soprallegato, che ogni moto semplice contien necessariamente dei moti rispettivi, se in vece di considerare le due AC, AD come forze da sostituirsi alla forza AB, si dica, che la forza reale produttrice del moto AB, produce altresì con esso due moti rispettivi di avvicinamento, l' uno al piano EG, l' altro alla retta CB, si dice cosa che realmente esiste; essendo verità di fatto, che il mobile venendo per AB, si avvicina tanto al piano EG quanto alla retta GB. E perchè l'urtare del mobile nel piano viene unicamente dal suo avvicinarsi al piano stesso; così questo solo moto rispettivo di avvicinamento al piano misurato dalla normale AD potrà essere alterato nell'urto, a quel modo che prescrivono le leggi dinamiche nei vari casi. E l' altro moto rispettivo di avvicinamento alla retta CB perchè misurato dalla normale AC, parallela alla DB, si rimarrà intatto dopo l' urto.

Similmente la discesa di un grave per il piano inclinato AE (Fig. 7) vien certo dalla gravità insita nel mobile; ma la teoria della risoluzione d' una forza in altre, col sostituire alla gravità AC del mobile le due forze AD, AB, unite sotto l'angolo retto DAB fa comparire invece quella discesa come prodotta dalla forza AB. Laddove il principio suddetto dei moti rispettivi mostra direttamente, che la gravità in tal caso non può produrre che il moto per AB nel tempo stesso che il grave avrebbe fatto AC senza l' impedimento del piano. Poichè la gravità per se stessa tende a produrre il moto semplice per AC verticale, direzione propria de' gravi. Ma questo moto semplice contien di necessità anco i due moti rispettivi di avvicinamento l'uno dal punto A verso la retta CD, e l' altro dallo stesso punto A verso la retta BC;

dei quali il primo essendo impossibile per la reazione del piano, la gravità dee produr l'altro solamente per AB parallela a DC.

Finalmente dalle premesse nozioni e principj del moto rispettivo verrà più chiara ed esatta la teoria del moto curvilineo. Due sole forze realmente esistenti unite ad angolo producono il moto composto per l'elemento AD d'una curva (Fig. 8.). Una delle forze è detta *centrale* come sarebbe la centripeta espressa da AC, e l'altra espressa da AB che *tangenziale* si appella. La prima AC tende a produrre un moto rispettivo di avvicinamento verso un punto interno F nella concavità della curva; e l'altra, cioè la tangenziale AB tende a produrre un moto rispettivo di allontanamento dallo stesso punto F. Perciocchè il mobile abbandonato dalla centripeta AC fuggirebbe per la tangente AB, e si troverebbe nel punto B nell' istante medesimo nel quale per la unione delle due forze si sarebbe trovato in D. Se impertanto il moto rispettivo della centripeta sarà di ugual valore o misura del moto rispettivo della tangenziale, il mobile dovrà nel suo moto descrivere tal curva, in ciascun punto della quale nè si avvicini nè si allontani dal punto F, cioè dovrà fare un circolo intorno a questo punto. E in altro caso descriverà altra curva secondo la diversa ragione che avranno tra loro i valori o misure dei detti due moti rispettivi.

Oltre a ciò vuolsi notare, che la retta AC misura tanto il valore assoluto della forza centripeta quanto il suo moto rispettivo verso il punto F; poichè nel caso che manchi la tangenziale AB, il mobile in quel tempo che avrebbe fatto l'elemento di curva AD in virtù delle due forze, farebbe invece la AC, avvicinandosi nel detto tempo al punto F quanto porta AC. Ma quanto alla tangenziale, il suo valore assoluto è misurato dalla AB, ed il suo moto rispettivo di allontanamento dal punto F vien misurato dalla OB. Questa OB, se l'arco infinitesimo AD è circolare, si confonde colla BD parallela alla AC. Poichè, per la proprietà del circolo, è retto l'angolo BOD, ed è retto eziandio l'angolo BDO perchè uguale all' alterno retto CAD. Ma i due angoli BOD, BDO non possono esser retti, se non perchè la BD si confonde colla BO. Dunque il detto moto rispettivo della tangenziale si esprime nel circolo dalla OB egualmente che dalla DB. Ma la AB ch'esprime il valore assoluto della forza tangenziale non può esser mai confusa con la DB, o colla sua identica OB, perciocchè dell' arco infinitesimo AD il seno verso AC uguale a BD è un infinitesimo di secondo ordine, mentre CD uguale ad AB essendo il seno dello stesso arco, è un infiinitesimo di primo ordine.

Pertanto da questa differenza di misura fra il valore assoluto della tangenziale, ed il moto rispettivo della medesima è venuto, che i Fisici comunemente riguardano il moto rispettivo OB della tangenziale come prodotto da una forza particolare detta *centrifuga* espressa dalla OB. Ma se com' è evidente, il detto moto rispettivo di allontanamento OB dal punto F, si contiene essenzialmente nel moto semplice AB della tangenziale, questo moto rispettivo non può al certo provenire da un' altra forza che realmente esista distinta da quella che produce il moto semplice per AB; altrimenti essendo infiniti i moti rispettivi contenuti in un moto semplice, bisognerebbe ammettere altrettante forze reali e distinte in qualunque moto semplice prodotto da una sola forza il che sarebbe un assurdo. Dunque la forza centrifuga non può essere una forza speciale, che realmente esista distinta dalla tangenziale; ma è la tangenziale medesima, che ha la proprietà di essere centrifuga per il suo moto rispettivo di allontanamento misurato dalla OB.

Accorderò bensì che per agevolare le dimostrazioni ed i calcoli si possa supporre questa forza speciale, che operi da O in B col valore OB, e che si chiami centrifuga; perchè quanto all' effetto, la cosa torna a un medesimo, come se questa forza esistesse realmente appunto come nella risoluzione di una forza semplice, si adoperano altre forze ad essa equivalenti, che però non esistono; ma sembrami, che nel dare a principio le nozioni delle forze, che producono questo moto curvilineo, si dovrebbe procedere con esattezza maggiore, e distinguendo coi principj del moto rispettivo le forze reali dalle supposte, evitare lo sconcio di qualunque oscurità e confusione oggimai intollerabile in tanta luce di fisiche discipline.

Fig 2

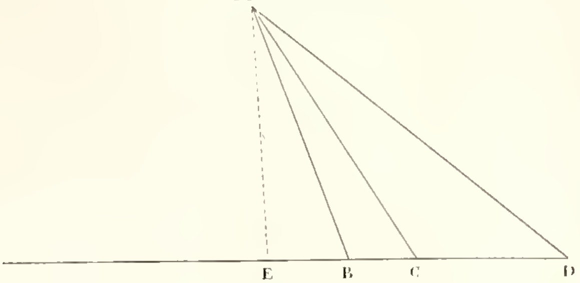
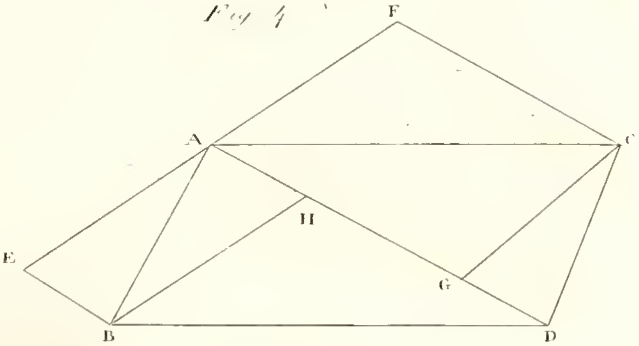


Fig 4



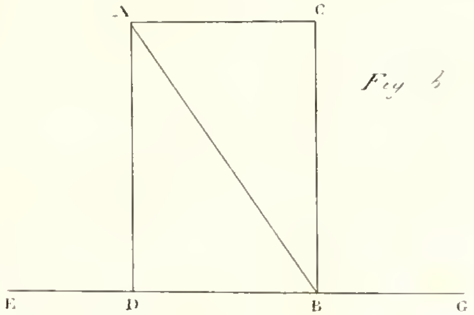


Fig 6

Fig 8.

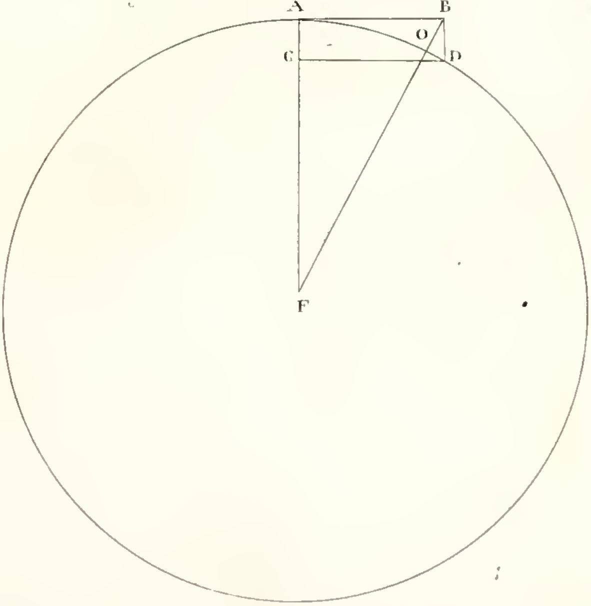


Fig 1

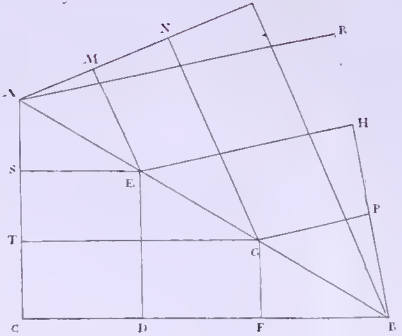

O
N
R
M
A
H
S
E
P
T
G
C
D
F
B

Fig 2

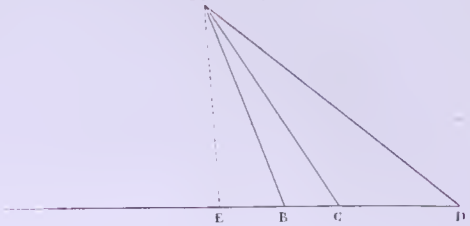


Fig 3

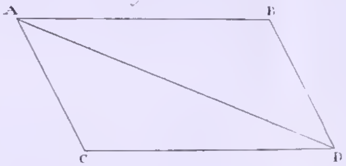


Fig 4

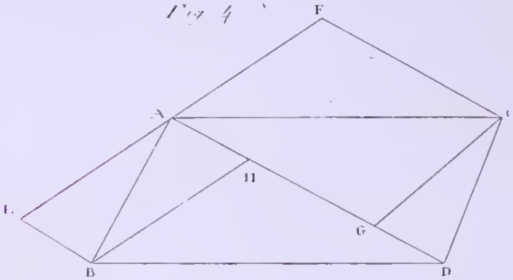


Fig 5.

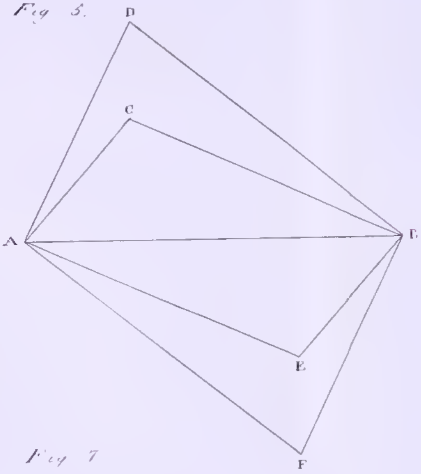


Fig 6

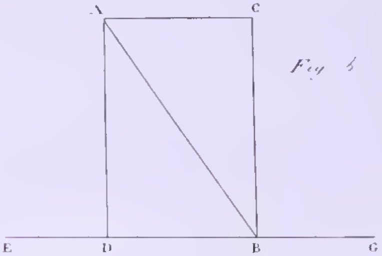


Fig 7

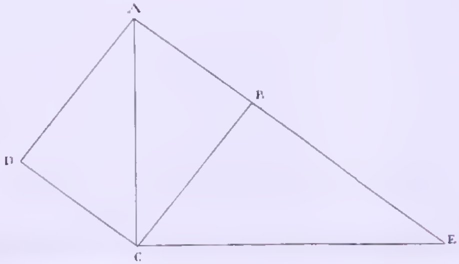
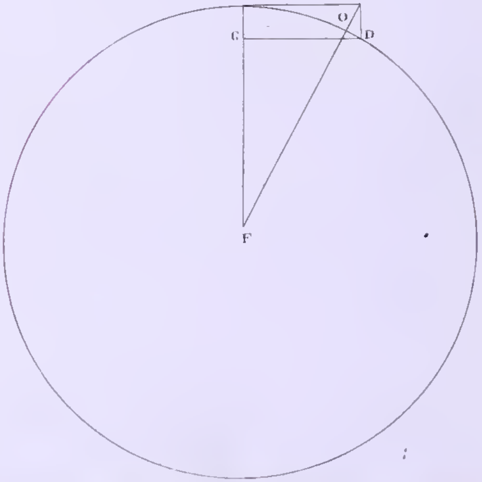


Fig 8



SOPRA GL' INTEGRALI DEFINITI

MEMORIA

DEL PROFESSORE PIETRO PAOLI

Ricevuta adì 8. Ottobre 1827.

Io mi propongo in questa breve Memoria di richiamar l'attenzione dei Geometri sopra alcune difficoltà, che possono incontrarsi nella teoria degl' integrali definiti comunemente adottata. A quest' oggetto prendo a ricercar nuovamente i valori già noti tra i limiti 0 ed $\frac{1}{0}$ delle formole integrali $\int e^{-bx} . x^{n-1} dx \text{ sen. } ax$ ed $\int e^{-bx} . x^{n-1} dx \cos. ax$, ove e è il numero che ha per logaritmo iperbolico l' unità e b ed n sono numeri positivi escluso lo zero.

1. Il problema ammette una semplicissima risoluzione, allorchè n è un numero intero. Poichè essendo

$$\int e^{-bx} . x^{n-1} dx \cos. ax = \pm \frac{d^{n-1} \int e^{-bx} dx \cos. ax}{db^{n-1}},$$

ove il segno superiore + deve prendersi nel caso di n dispari, e l'inferiore — nel caso di n pari, e facilmente trovandosi col mezzo dell'integrazione indefinita il valore di $\int e^{-bx} dx \cos. ax$ tra i limiti 0 ed $\frac{1}{0}$ essere $= \frac{b}{a^2+b^2} = \frac{1}{2} . \frac{d . \log (a^2+b^2)}{db}$, avremo

$$\int e^{-bx} . x^{n-1} dx \cos. ax = \pm \frac{1}{2} . \frac{d^n . \log . (a^2+b^2)}{db^n}.$$

E così pure, essendo l' integrale egualmente definito $\int e^{-bx} dx \text{ sen. } ax = \frac{a}{a^2+b^2} = - \frac{d \text{ Arc}\left(\text{tang.} = \frac{a}{b}\right)}{db}$, troveremo

$$\int e^{-bx} . x^{n-1} dx \text{ sen. } ax = \mp \frac{d^n . \text{Arc}\left(\text{tang} = \frac{a}{b}\right)}{db^n}.$$

2. Quando n non è un numero intero, i valori di

quest' integrali dipendono da quello di un altro integrale definito più semplice. Facendo $z = \int e^{-bx} . x^{n-1} dx \text{ sen. } ax$, $y = \int e^{-bx} . x^{n-1} dx \cos. ax$, e differenziando per rapporto ad a avremo

$$\frac{dz}{da} = \int e^{-bx} . x^{n} dx \cos. ax, \quad \frac{dy}{da} = -\int e^{-bx} . x^{n} dx \text{ sen. } ax,$$

cioè integrando per parti

$$\frac{dz}{da} = -\frac{e^{-bx} . x^n \cos. ax}{b} + \frac{n}{b} \int e^{-bx} . x^{n-1} dx \cos. ax$$
$$- \frac{a}{b} \int e^{-bx} . x^{n} dx \text{ sen. } ax$$

$$\frac{dy}{da} = \frac{e^{-bx} . x^n \text{ sen.} ax}{b} - \frac{n}{b} \int e^{-bx} . x^{n-1} dx \text{ sen. } ax$$
$$- \frac{a}{b} \int e^{-bx} . x^{n} dx \cos. ax.$$

Ora le quantità fuori del segno integrale svaniscono ad ambedue i limiti o ed $\frac{1}{0}$, quando b ed n sono > 0, come abbiamo supposto. Con queste condizioni pertanto, e non altrimenti, avremo tra i medesimi limiti l'equazioni

$$(1) \qquad \frac{dz}{da} = \frac{a}{b} . \frac{dy}{da} + \frac{n}{b} y$$

$$(2) \qquad \frac{dy}{da} = -\frac{a}{b} . \frac{dz}{da} - \frac{n}{b} z.$$

Fin quì quest' analisi è perfettamente conforme a quella, che ha dato il Sig. Poisson in una profonda Memoria su gl' integrali definiti inserita nel Tomo X. del Giornale della Scuola Politecnica di Parigi. Questo gran Geometra eliminando in seguito la z dalle due equazioni (1) e (2) trova un'equazione differenziale del second' ordine alquanto complicata, che giunge ad integrare ponendo in luogo della variabile a l'angolo che ha per tangente $\frac{a}{b}$. Ma era difficile prevedere che una tale sostituzione avrebbe prestato l'uffizio desiderato, se il valore di y non fosse stato già noto, ed assegnato per la prima volta dall'Eulero. In una lettera scritta al Sig. Marchese Laplace nell' anno 1811. fu da me indicato il seguente semplicissimo metodo, con cui può direttamente ottenersi l'integrazione dell' equazioni (1) e (2).

Alla prima di esse moltiplicata per z aggiungendo la seconda moltiplicata per y avremo

$$(3) \qquad z\frac{dz}{da} + y\frac{dy}{da} = \frac{a}{b}\left(z\frac{dy}{da} - y\frac{dz}{da}\right).$$

Similmente se dall' equazione (1) moltiplicata per y si sottrae la (2) moltiplicata per z, sarà

$$(4) \qquad y\frac{dz}{da} - z\frac{dy}{da} = \frac{a}{b}\left(z\frac{dz}{da} + y\frac{dy}{da}\right) + \frac{n}{b}(z^2+y^2).$$

Ora secondo che eliminiamo da queste due equazioni (3) e (4) l'una o l'altra delle due quantità $y\frac{dz}{da} - z\frac{dy}{da}$, $z\frac{dz}{da} + y\frac{dy}{da}$, otterremo le seguenti

$$\frac{z\frac{dz}{da} + y\frac{dy}{da}}{z^2+y^2} = -\frac{na}{a^2+b^2}$$

$$\frac{y\frac{dz}{da} - z\frac{dy}{da}}{z^2+y^2} = \frac{nb}{a^2+b^2}$$

le quali integrate ci danno

$$z^2 + y^2 = \frac{A^2}{(a^2+b^2)^n}$$

$$\text{Arc}\left(\text{tang.} = \frac{z}{y}\right) = n.\,\text{Arc}\left(\text{tang.} = \frac{a}{b}\right) + B$$

e posto $t = \text{Arc}\left(\text{tang.} = \frac{a}{b}\right)$ se ne deduce finalmente

$$z = \frac{A}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\,\text{sen.}(nt + B)$$

$$y = \frac{A}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\,\text{cos.}(nt + B).$$

3. Se nelle formole rappresentate da z e da y in luogo di a, avessimo fatta variare la costante b, saremmo giunti all' equazioni

$$\frac{dz}{db} = \frac{a}{b} \cdot \frac{dy}{db} - \frac{n}{b} z$$

$$\frac{dy}{db} = -\frac{a}{b} \cdot \frac{dz}{db} - \frac{n}{b} y$$

le quali integrate col medesimo metodo ci avrebbero somministrato li stessi valori di z e di y, che abbiamo ottenuto nel numero antecedente.

4. La determinazione delle costanti A e B dipende dai valori di z e di y nel caso di $a = 0$. Per conoscere con sicurezza quali siano questi particolari valori prendo ad esprimere y in una serie convergente, quando a è piccolissima. Ponendo in luogo di cos. ax il suo sviluppo in serie trovo

$$y = \int e^{-bx} . x^{n-1} dx \left(1 - \frac{a^2 x^2}{2} + \frac{a^4 x^4}{2.3.4} - \&c. \right)$$

Ora se chiamiamo $\Gamma(b)$ il valore dell'integrale $\int e^{-bx} . x^{n-1} dx$ da 0 ad $\frac{1}{0}$, abbiamo tra i medesimi limiti $\int e^{-bx} . x^{n+1} dx = \frac{d^2 \Gamma(b)}{db^2}$, $\int e^{-bx} . x^{n+3} dx = \frac{d^4 \Gamma(b)}{db^4}$, &c. dunque sarà

$$y = \Gamma(b) - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{d^2 \Gamma(b)}{db^2} + \frac{a^4}{2.3.4} \cdot \frac{d^4 \Gamma(b)}{db^4} - \&c.$$

E nella stessa maniera troveremo

$$z = - a . \frac{d \Gamma(b)}{db} + \frac{a^3}{2.3} \cdot \frac{d^3 \Gamma(b)}{db^3} - \frac{a^5}{2.3.4.5} \cdot \frac{d^5 . \Gamma(b)}{db^5} + \&c.$$

Siccome adunque le funzioni $\frac{d . \Gamma(b)}{db}$, $\frac{d^2 . \Gamma(b)}{db^2}$, &c. non sono infinite nei casi contemplati da noi, nei quali b ed n sono > 0, apparisce evidentemente che annullandosi a è $y = \Gamma(b)$, e $z = 0$. Abbiamo pertanto, per determinare le costanti A e B, l'equazioni $\Gamma(b) = \frac{A}{b^n}$ cos. B, $0 = \frac{A}{b^n}$ sen. B, le quali ci danno $B = i\pi$, ove i è un numero intero qualunque, π il rapporto della circonferenza del circolo al diametro, ed $A = \pm b^n . \Gamma(b)$ secondo che i è pari o dispari, e per conseguenza

$$z = \frac{b^n \, \Gamma(b)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}} \text{ sen. } nt$$

$$y = \frac{b^n \, \Gamma(b)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}} \text{ cos. } nt \, .$$

5. Possiamo render più semplici quest' espressioni riducendo $\Gamma(b)$ per ogni valore di b al caso di $b = 1$. Poichè integrando per parti abbiamo

$$\int e^{-bx} . x^n dx = - \frac{e^{-bx} . x^n}{b} + \frac{n}{b} \int e^{-bx} . x^{n-1} dx$$

e quindi tra i limiti 0 ed $\frac{1}{0}$

$$\frac{d \cdot \Gamma(b)}{db} = - \int e^{-bx} . x^n dx = - \frac{n}{b} \Gamma(b)$$

la qual' equazione integrata ci dà $\Gamma(b) = \frac{\Gamma(1)}{b^n}$. Sarà dunque

$$z = \frac{\Gamma(1)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}} \text{ sen. } nt$$

$$y = \frac{\Gamma(1)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}} \text{ cos. } nt$$

ove $\Gamma(1)$ rappresenta il valore dell' integrale $\int e^{-x} . x^{n-1} dx$ tra i limiti 0 ed $\frac{1}{0}$.

6. La medesima riduzione suol farsi comunemente così: nella formola $\int e^{-bx} . x^{n-1} dx$ si pone x in luogo di bx, e siccome dopo la sostituzione diventa $\frac{1}{b^n} \int e^{-x} . x^{n-1} dx$, se ne conclude immediatamente che tra i limiti 0 ed $\frac{1}{0}$ sia

$b^n\int e^{-bx}.x^{n-1}dx = \int e^{-x}.x^{n-1}dx$. Questo ragionamento però non può usarsi che con molta precauzione, perchè applicandolo all' integrale $\int\frac{e^{-bx}dx}{x}$, ed osservando che la sostituzione di bx in luogo di x ne fa sparire la b, c' inganneremmo se da ciò deducessimo che l' integrale $\int\frac{e^{-bx}dx}{x}$ da 0 ad $\frac{1}{0}$ è indipendente da b. Infatti

$$\frac{d.\int\frac{e^{-bx}dx}{x}}{db} = -\int e^{-bx}dx = -\frac{1}{b},$$

ed integrando abbiamo $\int\frac{e^{-bx}dx}{x} = \mathrm{C} - \log.b$. Posta $b = 1$ si trova la costante $\mathrm{C} = \int\frac{e^{-x}dx}{x}$; dunque

$$\int\frac{e^{-bx}-e^{-x}}{x}dx = -\log.b.$$

Lo stesso, se bisognasse, si potrebbe dimostrare in altro modo. Ponendo $1+b-1$ in luogo di b, ed invece di $e^{-(b-1)x}$ il suo sviluppo in serie, avremo

$$\int\frac{e^{-bx}-e^{-x}}{x}dx =$$
$$-\int e^{-x}dx\left[b-1-\frac{(b-1)^2}{2}x+\frac{(b-1)^3}{2.3}x^2-\&c.\right].$$

Ma tra i limiti 0 ed $\frac{1}{0}$ è $\int e^{-x}dx = 1$, $\int e^{-x}xdx = 1$, $\int e^{-x}x^2dx = 1.2$, e generalmente denotando i un numero intero positivo è $\int e^{-x}.x^i dx = 1.2.3\ldots i$; perciò

$$\int\frac{e^{-bx}-e^{-x}}{x}dx = -(b-1)+\frac{(b-1)^2}{2}-\frac{(b-1)^3}{3}+\&c. = -\log.b.$$

Nè ciò deve recare alcuna maraviglia, perchè sebbene per la sostituzione di x in luogo di bx l' integrale $\int\frac{e^{-bx}dx}{x}$ si cangi in $\int\frac{e^{-x}dx}{x}$, e ne scomparisca la b, essa però si ritrova nei limiti, i quali non sono 0 ed ∞ come prima, ma $0.b$ ed $\infty.b$, ed avuto riguardo alla variazione di b in questi limiti $\frac{d.\int\frac{e^{-x}dx}{x}}{db}$ non è zero, ma $= -\frac{1}{b}$. Poichè rappresentando col segno $\psi(x)$ l' integrale indefinito $\int\frac{e^{-x}dx}{x}$ avremo, tra i limiti $0.b$ ed $\infty.b$, $\int\frac{e^{-x}dx}{x} = \psi(\infty.b) - \psi(0.b)$. Ma siccome $\frac{d.\psi(x)}{dx} = \frac{e^{-x}}{x}$, sarà $\frac{d.\psi(\infty.b)}{db} = \frac{e^{-\infty b}}{b} = 0$, e $\frac{d.\psi(0.b)}{db} = \frac{1}{b}$.

7. Si può facilmente assegnare in generale la condizione, a cui si deve soddisfare, perchè in un integrale qualunque $\int dx\,\mathrm{F}(x)$ da 0 ad $\frac{1}{0}$ sia permesso di mettere cx in luogo di x, essendo c una costante, ed insieme supporre mantenuti i medesimi limiti. Affinchè l' integrale $\int c\,dx\,\mathrm{F}(cx)$, in cui dopo la sostituzione si cangia $\int dx\mathrm{F}(x)$, conservi il medesimo valore, è necessario che sia questo indipendente da c, e quindi ne sia nullo tra i limiti dati il differenziale preso per rapporto a c. Abbiamo adunque la condizione

$$(a) \qquad 0 = \frac{d\int c\,dx\,\mathrm{F}(cx)}{dc} = \int dx\,\mathrm{F}(cx) + \int c\,dx\,\frac{d.\mathrm{F}(cx)}{dc}.$$

Ma essendo $c\frac{d.\mathrm{F}(cx)}{dc} = x\frac{d.\mathrm{F}(cx)}{dx}$, si trova integrando per parti

$$\int c\,dx\,\frac{d.\mathrm{F}(cx)}{dc} = \int x\,dx\,\frac{d\,\mathrm{F}(cx)}{dx} = x\mathrm{F}(cx) - \int dx\,\mathrm{F}(cx),$$

sostituito il qual valore l'equazione (a) diventa

$$0 = x\,\mathrm{F}(cx)$$

e deve verificarsi tra i limiti 0 ed $\frac{1}{0}$, perchè salvo il valore dell' integrale e conservati i medesimi limiti sia permessa la sostituzione di cx in luogo di x.

Se ne facciamo l' applicazione all' integrale

$\int e^{-bx} . x^{n-1} dx \,\text{sen}. ax$, avremo la condizione

$$0 = e^{-bcx} . x^{n} \,\text{sen}. acx,$$

la quale è soddisfatta nei limiti 0 ed $\frac{1}{0}$ quando b è > 0, ed $n =$, o > 0, ma non lo sarebbe nel caso di b zero o di n negativa. Pertanto, quantunque la sostituzione di x in luogo di ax faccia sparire la quantità a dall'integrale $\int \frac{dx \,\text{sen}. ax}{x}$, questa sola circostanza non ci autorizza a conchiudere, che tra i limiti 0 ed $\frac{1}{0}$ sia $\int \frac{dx \,\text{sen}. ax}{x}$ indipendente da a.

8. Il caso di $n = 0$ non è compreso nei valori di z e di y trovati di sopra (4). Riandando infatti i ragionamenti precedenti vedremo che non hanno luogo in questo caso l' equazioni (1) e (2), ma si devono ad esse sostituir le seguenti

$$\frac{dz}{da} = \frac{1}{b} + \frac{a}{b} . \frac{dy}{da}$$

$$\frac{dy}{da} = -\frac{a}{b} . \frac{dz}{da}$$

oppure le altre

$$\frac{dz}{db} = \frac{a}{b} . \frac{dy}{db}$$

$$\frac{dy}{db} = -\frac{1}{b} - \frac{a}{b} . \frac{dz}{db}$$

dalle prime o dalle seconde delle quali facilmente si deduce

$$\int \frac{e^{-bx} dx \,\text{sen}. ax}{x} = \text{Arc} \left(\text{tang}. = \frac{a}{b} \right)$$

$$\int \frac{e^{-bx} - e^{-x}}{x} dx \cos. ax = \frac{1}{2} \log. \frac{1+a^2}{b^2+a^2}.$$

9. Quantunque i valori trovati (4) di z ed y siano tali sotto l' espressa condizione di $b > 0$, e debba per conseguenza escludersi dai medesimi il caso di $b = 0$, pure scordandosi di ciò l' Eulero il primo, ed altri dopo di lui pongono $b = 0$ nelle formole generali, ed ammettono come legittimi

i resultati particolari $\int dx \,\text{sen.}\, ax = \frac{1}{a}$, $\int dx \cos. ax = 0$, &c. $\int \frac{dx \,\text{sen.}\, ax}{x} = \frac{\pi}{2}$ cioè all' arco di 90. gradi. È evidente che quest' equazioni non potendosi riguardare come in tal modo dimostrate, hanno bisogno di altre prove.

Siccome le formole $\int dx \,\text{sen.}\, ax$ ed $\int dx \cos. ax$ ammettono l' integrazione indefinita, i valori trovati per questo mezzo dei medesimi integrali tra i limiti 0 ed $\frac{1}{0}$ possono somministrare la conferma dei resultamenti precedenti. Essendo $\int dx \,\text{sen.}\, ax = -\frac{\cos. ax}{a}$, ed $\int dx \cos. ax = \frac{\text{sen.}\, ax}{a}$, avremo tra i limiti 0 ed $\frac{1}{0}$, $\int dx \,\text{sen.}\, ax = \frac{1 - \cos. \frac{a}{0}}{a}$, $\int dx \cos. ax = \frac{\text{sen.} \frac{a}{0}}{a}$. Ora perchè le due quantità $\frac{1 - \cos. \frac{a}{0}}{a}$ e $\frac{\text{sen.} \frac{a}{0}}{a}$ si riducano respettivamente ad $\frac{1}{a}$ e zero, bisogna supporre nel medesimo tempo $\cos. \frac{a}{0} = 0$, e $\text{sen.} \frac{a}{0} = 0$, lo che non può farsi a motivo dell'equazione $\left(\cos. \frac{a}{0}\right)^2 + \left(\text{sen.} \frac{a}{0}\right)^2 = 1$.

10. Sembra che il seno dell' arco infinito, il quale non si riferisce piuttosto ad un punto che ad un altro della circonferenza, possa essere rappresentato da un numero qualunque m compreso tra i limiti $+1$ e -1; e così pure il coseno dell' arco infinito sia espresso da un numero indeterminato n, ma compreso tra i medesimi limiti $+1$ e -1; questi due numeri m ed n non sono però indipendenti tra loro essendo legati insieme per mezzo dell' equazione $m^2 + n^2 = 1$. Ma quantunque essi non possano esser nulli nel medesimo tempo, contuttociò zero è la somma di tutti i valori tanto dell' uno che dell' altro, e per conseguenza $\frac{1}{a}$ è il medio arit-

metico tra tutti i valori della quantità $\frac{1-\cos.\frac{a}{0}}{a}$, e zero il medio aritmentico tra tutti i valori della quantità $\frac{\text{sen}.\frac{a}{0}}{a}$. Possono pertanto ammettersi contemporaneamente in un certo senso ambedue l' equazioni

$$\frac{1-\cos.\frac{a}{0}}{a} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{\text{sen}.\frac{a}{0}}{a} = 0$$

quando cioè s' intenda che il secondo membro esprima non il valore assoluto del primo, ma il medio aritmetico tra tutti i valori, che questo può prendere.

Supposte tra i limiti 0 ed $\frac{1}{0}$ l'equazioni $\int dx \text{sen}.ax = \frac{1}{a}$, $\int dx \cos.ax = 0$, se ne deducono col mezzo della differenziazione le seguenti $\int xdx \cos.ax = -\frac{1}{a^2}$ ed $\int xdx \text{sen}.ax = 0$, le quali possono ancora ricavarsi dai valori di y e z ponendovi $b = 0$, ed $n = 2$. L' integrazione indefinita ci dà

$$\int xdx \cos.ax = \frac{x \text{sen}.ax}{a} + \frac{\cos.ax}{a^2}$$

$$\int xdx \text{sen}.ax = -\frac{x \cos.ax}{a} + \frac{\text{sen}.ax}{a^2},$$

ma nè la quantità $\frac{x \text{sen}.ax}{a} + \frac{\cos.ax}{a^2}$ presa tra i limiti 0 ed $\frac{1}{0}$ può divenire $= -\frac{1}{a^2}$, nè la quantità $-\frac{x\cos.ax}{a} + \frac{\text{sen}.ax}{a^2}$ può ridursi a zero, se non quando si consideri il medio aritmetico tra tutti i loro valori. E simili osservazioni hanno luogo in generale relativamente alle altre equazioni, che si ricavano dalle precedenti mediante l' ulteriore differenziazione relativamente ad a, o inopportunamente si deducano dai valori generali di y e di z, facendovi $b = 0$.

Passiamo ad altre considerazioni. Il Sig. Poisson nella citata Memoria prosegue le sue dotte ricerche sopra una classe molto estesa d' integrali definiti, ma noi ci ristringeremo per brevità ad un caso particolare, cioè a quello di $\int \frac{dx \cos ax}{1+x^2}$ tra i limiti 0 ed $\frac{1}{0}$. Chiamando y il valore di questo integrale definito egli giunge all' equazione

$$0 = y - \frac{d^2 y}{da^2} - \int dx \cos. ax$$

che poi riduce a $0 = y - \frac{d^2 y}{da^2}$ supponendo $\int dx \cos. ax = 0$. Questa circostanza (9) lascia nella mente qualche scrupolo sull' esattezza della soluzione. Oltre di che per determinare il valore dell' integrale $\int \frac{x dx \,\text{sen}. ax}{1+x^2}$ nel caso di $a = 0$ il Sig. Poisson vi pone x in luogo di ax, dopo la qual sostituzione diventa $\int \frac{x dx \,\text{sen}. x}{a^2+x^2}$, e si muta in $\int \frac{dx \,\text{sen}. x}{x}$, quando a è zero.

Non sembra primieramente che questo modo di ragionare possa senza dimostrazione ammettersi in generale, e ne avremo una prova convincente applicandolo all' integrale $\int \frac{x \,\text{sen}. ax - \cos. ax}{1+x^2} dx$, il quale per i ritrovati del Sig. Poisson sarebbe $= 0$ per qualunque valore di a. Postovi x in luogo di ax questo integrale si cangerebbe in $\int \frac{x \,\text{sen}. x - a \cos. x}{a^2+x^2} dx$, e qualora nel caso di a zero fosse permesso sopprimerne prima dell' integrazione i termini moltiplicati per a, diventerebbe $= \int \frac{dx \,\text{sen}. x}{x}$. In secondo luogo è da osservarsi, che i limiti dell' integrale $\int \frac{x dx \,\text{sen}. x}{a^2+x^2}$ non sono propriamente 0 ed $\frac{1}{0}$, quali erano prima della sostituzione, ma $0 . a$ ed $\frac{1}{0} . a$, e questi nel caso di

a zero diventano 0.0 ed $\frac{1}{0}.0$, cioè 0 ed 1. (Si veda il seguente n.° 13.).

Ponendo in luogo della quantità $\frac{1}{1+x^2}$ il suo sviluppo in serie abbiamo

$$\int \frac{dx \cos. ax}{1+x^2} = \int dx \cos. ax\,(1 - x^2 + x^4 - \&c.)\,,$$

e se tra i limiti 0 ed $\frac{1}{0}$ fossero realmente nulli gl' integrali $\int dx \cos. ax$, $\int x^2 dx \cos. ax$, $\int x^4 dx \cos. ax$, &c., ne dovremmo concludere $\int \frac{dx \cos. ax}{1+x^2} = 0$. Questa conseguenza, che non sarebbe facilmente ammessa relativamente al valore assoluto di quell' integrale, ci somministra un altro motivo di dubitare dell' equazione $\int dx \cos. ax = 0$. La medesima equazione non implicherebbe forse contraddizione veruna nel concetto del n.° 10, nel quale gl' integrali $\int dx \cos. ax$, $\int x^2 dx \cos. ax$, &c. sono tutti nulli senza contrasto, quando cioè si considerasse il medio aritmetico tra tutti i possibili valori.

12. Non ignoro che il resultato a cui è giunto il Sig. Poisson, si accorda con questo, che è stato ottenuto con altri metodi, ma anche questi sembrano soggetti a qualche difficoltà. Il Signor Laplace prende a considerare l' integrale doppio

$$z = \int\int e^{-y^2(1+x^2)}.\,2y\,dy\,dx \cos. ax$$

tra i limiti 0 ed $\frac{1}{0}$ per ambedue le variabili x ed y, ed integrando in primo luogo relativamente alla y trova $z = \int \frac{dx \cos. ax}{1+x^2}$. Per altra parte incominciando le integrazioni dalla x, ed osservando che $\int e^{-y^2x^2} dx \cos. ax = \frac{\sqrt{\pi}}{2y}\, e^{-\frac{a^2}{4y^2}}$ ne deduce $z = \sqrt{\pi} \int dy\, e^{-y^2 - \frac{a^2}{4y^2}}$, e siccome $\int dy\, e^{-y^2 - \frac{a^2}{4y^2}} = \frac{e^{-a}\sqrt{\pi}}{2}$, conchiude finalmente essere z cioè $\int\frac{dx\cos.ax}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}.e^{-a}$.

Niuna osservazione può farsi intorno alla prima integrazione, perchè $\int e^{-y^2(1+x^2)}.2ydy$ conserva la medesima forma $\frac{1}{1+x^2}$ per tutti i valori della x da zero all'infinito; ma non è lo stesso della seconda integrazione. In questa si ammette che sia $\int e^{-y^2x^2}dx\cos.ax=\frac{\sqrt{\pi}}{2y}e^{-\frac{a^2}{4y^2}}$ per tutti i valori che può prendere la y, tra i quali è compreso anche lo zero, cioè si suppone che sia $\int dx\cos.ax=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{\pi}}{0}$, lo che in qualunque modo è molto lontano dal vero. Bisognerebbe adunque dimostrare che una tale supposizione non può influire sul risultamento finale, ed alterarne il valore.

Per mostrare con qualch'esempio, che la nostra objezione non è forse priva affatto di fondamento, applichiamo il metodo del Sig. Laplace alla formola $z=\int\int e^{-y^2x}.2ydydx$ tra i limiti 0 ed $\frac{1}{0}$ tanto per la x che per la y. Avremo da una parte $z=\int\frac{dx}{x}$, dall'altra $z=2\int\frac{dy}{y}$, lo che porterebbe alla strana conseguenza che fosse $2\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dx}{x}$, e quindi $\int\frac{dx}{x}=0$ tra i limiti 0 ed $\frac{1}{0}$. Cessa ogni difficoltà, se le integrazioni si fanno tra i limiti 1 ed $\frac{1}{0}$, perchè i due valori di z, che se ne ottengono, cioè $\int\frac{e^{-x}dx}{x}$ e $2\int\frac{e^{-y^2}dy}{y}$ sono evidentemente eguali.

Se prendiamo ad esaminare il valore z dell' integrale $\int\int e^{-xy}dxdy\,\mathrm{sen}.ax$, e primieramente integriamo per rapporto ad y da zero all'infinito, troviamo $z=\int\frac{dx\,\mathrm{sen}.ax}{x}$, ed integrando relativamente alla x abbiamo (5) $\int e^{-xy} dx\,\mathrm{sen}.ax = \frac{a}{a^2+y^2}$, e quindi $z=\int\frac{a\,dy}{a^2+y^2}=\frac{\pi}{2}$. Ma quì apparisce chiaramente, che mentre supponghiamo essere $\frac{a}{a^2+y^2}$ il valore di $\int e^{-xy} dx\,\mathrm{sen}.\,ax$ anche nel caso di y zero, ammettiamo per dato quello che è in questione, cioè supponghiamo che sia $\int dx\,\mathrm{sen}.ax=\frac{1}{a}$.

13. Il Signor Legendre nelle sue eccellenti Esercitazioni sopra il Calcolo Integrale, dubitando forse anch' esso dell' equazione $\int dx\cos.\,ax=0$ ha immaginato un ripiego ingegnoso per evitarla. Cercando il valore dell'integrale $\int\frac{dx\cos.\,ax}{1+x^2}$ tra i limiti 0 e $\frac{2i\pi}{a}$, ove i è un numero intero e 2π la circonferenza del circolo che ha per raggio l'unità, egli assegna con tutto il rigore l'equazione differenziale, da cui dipende la risoluzione del problema propostosi. Ma nell'applicazione, che ne fà alla ricerca dello stesso integrale tra i limiti 0 ed $\frac{1}{0}$, lascia nello spirito qualche incertezza la supposizione, che l' arco infinito termini precisamente dopo un numero intero di circonferenze, o dopo lo stesso numero intero diviso per a. Poichè sebbene posto i un numero intero infinito e b un numero finito la quantità $2i\pi+b$ possa riguardarsi come eguale a $2i\pi$, non è però $\mathrm{sen}.\,(2i\pi+b)=\mathrm{sen}.2i\pi$ cioè zero, ma $=\mathrm{sen}.b$.

Per toglierci questo dubbio, seguitando le traccie del Sig. Legendre cerchiamo il valore Z dell'integrale $\int\frac{dx\cos.\,ax}{1+x^2}$ preso tra i limiti 0 e $\frac{2i\pi+b}{a}$, ove b è una quantità indipendente da a, e tenendo conto della variazione di a nel secondo limite troveremo

$$\frac{dZ}{da}=-\int\frac{x\,dx\,\mathrm{sen}.ax}{1+x^2}-\frac{(2i\pi+b)\cos b}{a^2+(2i\pi+b)^2}$$

e differenziando di nuovo

$$\frac{d^2Z}{da^2} = -\int\frac{x^2dx\cos.\,ax}{1+x^2} + \frac{(2i\pi+b)^2\text{sen}.\,b}{a[a^2+(2i\pi+b)^2]} + \frac{2a(2i\pi+b)\cos.\,b}{[a^2+(2i\pi+b)^2]^2},$$

e quindi

$$0 = Z - \frac{d^2Z}{da^2} - \int dx\cos.\,ax + \frac{(2i\pi+b)^2\text{sen}.\,b}{a[a^2+(2i\pi+b)^2]} + \frac{2a(2i\pi+b)\cos.\,b}{[a^2+(2i\pi+b)^2]^2}.$$

Ma siccome $\int dx\cos.\,ax = \frac{\text{sen}.\,ax}{b}$, tra i limiti 0 e $\frac{2i\pi+b}{a}$ è $= \frac{\text{sen}.\,b}{a}$, avremo finalmente

$$0 = Z - \frac{d^2Z}{da^2} - \frac{\text{sen}.\,b}{a} + \frac{(2i\pi+b)^2\text{sen}.\,b}{a[a^2+(2i\pi+b)^2]} + \frac{2a(2i\pi+b)\cos.\,b}{[a^2+(2i\pi+b)^2]^2}.$$

Quando il numero i è infinito, il termine $\frac{2a(2i\pi+b)\cos.\,b}{[a^2+(2i\pi+b)^2]^2}$ si annulla, il termine $\frac{(2i\pi+b)^2\text{sen}.\,b}{a[a^2+(2i\pi+b)^2]}$ diviene $= \frac{\text{sen}.\,b}{a}$, e perciò sparisce b dall' equazione, che si riduce a

$$0 = Z - \frac{d^2Z}{da^2}.$$

E quì giova avvertire che si giunge al medesimo risultamento, senza che sia necessario di porre l' infinito sotto la forma $2i\pi$ o sotto la forma $2i\pi+b$. Infatti chiamando Z' l'integrale $\int\frac{dx\cos.\,ax}{1+x^2}$ tra i limiti 0 e $\frac{c}{a}$, ed operando come sopra avremo

$$0 = Z' - \frac{d^2Z'}{da^2} - \frac{\text{sen}.\,c}{a} + \frac{c^2\text{sen}.\,c}{a(a^2+c^2)} + \frac{2ac\cos.\,c}{(a^2+c^2)^2},$$

la qual' equazione, posta c infinita, si cangia in

$$0 = Z' - \frac{d^2Z'}{da^2}.$$

Sembra adunque potersi con ogni sicurezza concludere, che a questa ultima equazione deve soddisfare il valore dell' integrale $\int\frac{dx\cos.\,ax}{1+x^2}$ preso tra i limiti 0 ed $\frac{\infty}{a}$, ma siamo incerti se sia permesso di sostituire a questi i limiti 0 ed ∞. Poichè cercandosi direttamente il valore y dell' integrale

$\int\frac{dx\cos.ax}{1+x^2}$ tra i limiti 0 e $2i\pi+b$ si giunge all'equazione

$$y-\frac{d^2y}{da^2}=\int dx\cos.\,ax=\frac{\text{sen}.a(2i\pi+b)}{a}$$

ove il termine $\frac{\text{sen}.a(2i\pi+b)}{a}$ non si annulla per ogni valore di b, comunque sia il numero i finito o infinito, e nè pur divien zero ponendosi col Sig. Legendre $b=0$, se non quando $2a$ è un numero intero.

Se non tenendo conto di questa difficoltà vogliamo dedurre dall' equazione

$$0=y-\frac{d^2y}{da^2}$$

l' integrale $\int\frac{dx\cos.ax}{1+x^2}$ da 0 ad $\frac{1}{0}$, rimane al compimento della ricerca la determinazione delle costanti C e C' nel valore di $y=Ce^{a}+C'e^{-a}$. Il Sig. Legendre riflette che la prima dev' esser nulla per la natura dell'integrale $\int\frac{dx\cos.ax}{1+x^2}$, e la seconda eguale al valore dello stesso integrale nel caso di $a=0$, e ponendo l' unità in luogo di cos.ax e poi integrando trova $C'=\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$; ma questa seconda parte ha bisogno di esser dimostrata. Convien cioè far conoscere il motivo per cui nel caso di $a=0$ si possa prima dell'integrazione porre l'unità invece di cos.ax e dedurne $\int\frac{dx\cos.0x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$, e nel medesimo caso non sia permesso di porre zero in luogo di sen.ax, e concluderne $\int\frac{xdx\,\text{sen}.0x}{1+x^2}=0$.

Sembrami, se non m' inganno, che alla richiesta dimostrazione possa supplirsi così. Ponendo in luogo di cos.ax il suo sviluppo in serie avremo

$$\int\frac{dx\cos.\,ax}{1+x^2}=\int\frac{dx}{1+x^2}\left(1-\frac{a^2x^2}{2}+\frac{a^4x^4}{2.3.4}-\&\text{c.}\right)$$

Ora facendo le integrazioni da zero ad $\frac{1}{a}$ troviamo

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\mathrm{Arc}\left(\text{tang. }\frac{1}{a}\right)=\mathrm{A}$$

$$\int\frac{x^2dx}{1+x^2}=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{1}{a}-\mathrm{A}$$

$$\int\frac{x^4dx}{1+x^2}=\int\left(x^2-\frac{x^2}{1+x^2}\right)dx=\frac{1}{3a^3}-\frac{1}{a}+\mathrm{A}$$

&c.

Dunque sostituendo questi valori avremo tra i limiti o ed $\frac{1}{a}$

$$\int\frac{dx\cos.\,ax}{1+x^2}=\mathrm{A}+\mathrm{P}$$

essendo P una quantità che svanisce insieme con a, e perciò posta $a=0$ sarà tra i limiti o ed $\frac{1}{0}$

$$\int\frac{dx\cos.\,0x}{1+x^2}=\mathrm{Arc}\left(\text{tang.}=\frac{1}{0}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Ma qualora sia riconosciuto legittimo il precedente ragionamento, incontreremo un nuovo imbarazzo applicandolo alla ricerca del valore, che prende tra i limiti o ed $\frac{1}{0}$ l'integrale $\int\frac{xdx\,\mathrm{sen.}\,ax}{1+x^2}$ quando a è zero. Poichè sostituendo a sen.ax il suo sviluppo in serie avremo

$$\int\frac{xdx\,\mathrm{sen.}\,ax}{1+x^2}=\int\frac{dx}{1+x^2}\left(ax^2-\frac{a^3x^4}{2.3}+\frac{a^5x^6}{2.3.4.5}-\&c.\right)$$

e ponendo in luogo di $\int\frac{x^2dx}{1+x^2}$, $\int\frac{x^4dx}{1+x^2}$, &c. i valori precedenti troveremo tra i limiti o ed $\frac{1}{a}$

$$\int\frac{xdx\,\mathrm{sen.}\,ax}{1+x^2}=1-\frac{1}{2.3.3}+\frac{1}{2.3.4.5.5}-\frac{1}{2.3.4.5.6.7.7}+\&c.+\mathrm{Q}$$

ove Q si annulla con a. Pertanto posta $a=0$ sarebbe tra i limiti o ed $\frac{1}{0}$

$$\int \frac{x dx \,\text{sen}.0x}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{2.3.3} + \frac{1}{2.3.4.5.5} - \&c. = 0{,}946083$$

cioè molto diverso da $\frac{\pi}{2}$, valore comunemente attribuito al medesimo integrale.

Merita di essere osservato, che la stessa serie

$$1 - \frac{1}{2.3.3} + \frac{1}{2.3.4.5.5} - \frac{1}{2\ldots 7.7} + \&c.$$

rappresenta ancora l'integrale $\int \frac{dx \,\text{sen}.ax}{x}$ tra i limiti 0 ed $\frac{1}{a}$, com' è facile verificare. Questo integrale adunque è indipendente da a, e per conseguenza $= \int \frac{dx \,\text{sen}.x}{x}$ tra i limiti 0 ed 1, e fors' anco $= \int \frac{dx \,\text{sen}.0x}{x}$ tra i limiti 0 ed $\frac{1}{0}$.

Si trova in simil guisa tra i limiti 0 ed $\frac{1}{a}$

$$\int \frac{1-\cos.ax}{x} dx = \frac{1}{2.2} - \frac{1}{2.3.4.4} + \frac{1}{2.3.4.5.6.6} - \&c. = 0{,}239811,$$

ed ha il medesimo valore $\int \frac{1-\cos.x}{x} dx$ tra i limiti 0 ed 1, e pare che sia lo stesso quello dell'integrale $\int \frac{1-\cos.0x}{x} dx$ tra i limiti 0 ed $\frac{1}{0}$.

I dubbj da me accennati ed altri simili, che per brevità tralascio, potranno forse dalla sagacità degli Analisti essere facilmente dileguati. Ma siccome non mi è riescito, per quanto vi abbia meditato, di trovarne per me stesso uno scioglimento, che mi acquietasse pienamente lo spirito, così bramerei che un gran Geometra, come il Sig. Legendre, il quale ha portato tanta accuratezza in altre parti della Matematica, prendesse la cura di schiarir le difficoltà, che presentano alcuni principj ammessi nella teoria importante degl' integrali definiti.

14. Prima di terminar questa Memoria indicherò un nuovo metodo per trovare i valori degl'integrali definiti in principio contemplati, il quale può esser utile in altre circostanze. Ritenute le medesime denominazioni abbiamo

$$\frac{d^2y}{db^2} = \int e^{-bx} . x^{n+1} dx \cos . ax, \quad \frac{d^2y}{da^2} = -\int e^{-bx} . x^{n+1} dx \cos . ax$$

e quindi l'equazione

$$\frac{d^2y}{db^2} + \frac{d^2y}{da^2} = 0$$

la quale ha per integrale

$$y = \psi(b + a\sqrt{-1}) + \phi(b - a\sqrt{-1}).$$

La determinazione delle funzioni arbitrarie ψ e ϕ dipende dai valori di y e di $\frac{dy}{da}$, quando a è zero. Ora essendosi da noi dimostrato (4) che in questo caso è $y = \Gamma(b)$, e $\frac{dy}{da} = 0$, avremo indicando col segno $\psi'(u)$ la funzione $\frac{d.\psi(u)}{du}$

$$\psi(b) + \phi(b) = \Gamma(b)$$

$$\psi'(b) - \phi'(b) = 0$$

cioè integrando $\psi(b) - \phi(b) = c$, essendo c una costante indipendente da b. Sarà dunque $\psi(b) = \frac{\Gamma(b)+c}{2}$, $\phi(b) = \frac{\Gamma(b)-c}{2}$, e per conseguenza

$$y = \frac{\Gamma(b + a\sqrt{-1}) + \Gamma(b - a\sqrt{-1})}{2}$$

e posto in luogo di $\Gamma(b)$ il suo valore $\frac{\Gamma(1)}{b^n}$ (5)

$$y = \Gamma(1) . \frac{(b + a\sqrt{-1})^{-n} + (b + a\sqrt{-1})^{-n}}{2}$$

la qual'espressione col mezzo delle consuete formole inservienti alla riduzione delle quantità immaginarie si trasforma in quella trovata al n.° 5.

15. L' integrale definito $z = \int e^{-bx} . x^{n-1} dx \operatorname{sen.} ax$ conduce alla medesima equazione

$$\frac{d^2z}{db^2} + \frac{d^2z}{da^2} = 0$$

e quindi allo stesso integrale

$$z = \psi(b + a\sqrt{-1}) + \phi(b - a\sqrt{-1})$$

ma le funzioni arbitrarie debbono determinarsi diversamente. E siccome nel caso di a zero è (4) $z = 0$, e $\frac{dz}{da} = -\frac{d.\Gamma(b)}{db}$, avremo

$$\psi(b) + \phi(b) = 0$$

$$\sqrt{-1}\,[\psi'(b) - \phi'(b)] = -\frac{d.\Gamma(b)}{db}$$

cioè $\psi(b) - \phi(b) = \frac{c' - \Gamma(b)}{\sqrt{-1}}$, e questa equazione combinata coll' altra $\psi(b) + \phi(b) = 0$ ci darà $\psi(b) = \frac{c' - \Gamma(b)}{2\sqrt{-1}}$, $\phi(b) = \frac{\Gamma(b) - c'}{2\sqrt{-1}}$, e perciò

$$z = \frac{\Gamma(b - a\sqrt{-1}) - \Gamma(b + a\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

cioè sostituendovi il valore di $\Gamma(b)$

$$z = \Gamma(1) . \frac{(b - a\sqrt{-1})^{-n} - (b + a\sqrt{-1})^{-n}}{2\sqrt{-1}}$$

la qual formola per la riduzione delle quantità immaginarie diventerà lo stesso valore di z del n.° 5.

16. In questa soluzione non è escluso, come nell' altra, il caso di $n = 0$. Abbiamo allora (6), $\Gamma(b) = \int \frac{e^{-x} dx}{x} - \log. b$, e quindi

$$\int \frac{e^{-bx} \cos. ax - e^{-x}}{x} dx = -\frac{\log.(a + b\sqrt{-1}) + \log.(a - b\sqrt{-1})}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} \log.(a^2 + b^2)$$

$$\int \frac{e^{-bx} dx \operatorname{sen.} ax}{x} = \frac{\log.(b + a\sqrt{-1}) - \log.(b - a\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$
$$= Arc\left(\text{tang.} = \frac{a}{b}\right)$$

com' è noto.

17. Senza ricorrere all' equazioni $\frac{d^2y}{db^2} + \frac{d^2y}{da^2} = 0$ e $\frac{d^2z}{db^2} + \frac{d^2z}{da^2} = 0$, potevamo ottener l'intento con la semplice sostituzione alle quantità $\cos. ax$ e $\operatorname{sen.} ax$ del loro sviluppo in serie. Infatti così facendo abbiamo trovato (4)

$$y = \Gamma(b) - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{d^2\Gamma(b)}{db^2} + \frac{a^4}{2.3.4} \cdot \frac{d^4.\Gamma(b)}{db^4} - \&c.$$

$$z = -a\,\frac{d.\Gamma(b)}{db} + \frac{a^3}{2.3} \cdot \frac{d^3.\Gamma(b)}{db^3} - \frac{a^5}{2.3\;4.5} \cdot \frac{d^5\Gamma(b)}{db^5} + \&c.$$

che è quanto dire

$$y = \frac{\Gamma(b - a\sqrt{-1}) + \Gamma(b + a\sqrt{-1})}{2}$$
$$z = \frac{\Gamma(b - a\sqrt{-1}) - \Gamma(b + a\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

18. Potremo ancora porre in luogo di $\cos. ax$ e $\operatorname{sen.} ax$ i loro valori espressi per l'esponenziali immaginarie, e siccome dopo questa sostituzione y e z diventano

$$y = \frac{1}{2}\int e^{-(b-a\sqrt{-1})x} dx + \frac{1}{2}\int e^{-(b+a\sqrt{-1})x} dx$$

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\int e^{-(b-a\sqrt{-1})x} dx - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\int e^{-(b+a\sqrt{-1})x} dx$$

senza altro ragionamento ne dedurremo a colpo d' occhio i resultamenti precedenti. E questa sembra la più semplice soluzione del problema.

19. Più generalmente, qualora tra i limiti 0 ed $\frac{1}{0}$ si conosca il valore $F(b)$ dell' integrale $\int e^{-bx}.X dx$, ove X è una funzione di x che non contenga b, se nella funzione $F(b)$ por-

remo in luogo di b prima $b-a\sqrt{-1}$ e poi $b+a\sqrt{-1}$, la semisomma di questi due resultati darà il valore dell'integrale $\int e^{-bx}.Xdx\cos.ax$ da 0 ad $\frac{1}{0}$, e la loro semidifferenza divisa per $\sqrt{-1}$ somministrerà il valore dell' integrale $\int e^{-bx}.Xdx\,\text{sen}.ax$ tra i medesimi limiti. È per altro necessaria la condizione, che $\frac{d.F(b)}{db}$ non sia infinita, perchè altrimenti non potremmo dimostrare che annullandosi a, sia $\int e^{-bx}.Xdx\cos.ax=F(b)$, ed $\int e^{-bx}.Xdx\,\text{sen}.ax=0$.

SULL' INTEGRAZIONE DELL' EQUAZIONE

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(1 - \frac{i(i+1)}{x^2}\right)y = 0$$

MEMORIA

DEL PROFESSOR PIETRO PAOLI

Ricevuta adì 8. Ottobre 1827.

Il Sig. Prof. Plana nel Tomo XXVI delle Memorie della Reale Accademia di Torino da alcune relazioni osservate da lui tra i termini delle serie, che rappresentano l'integrale dell' equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(1 - \frac{i(i+1)}{x^2}\right)y = 0$$

ha dedotto un mezzo elegante e diverso dai metodi ordinarj per esprimerne l'integrale in termini finiti, quando i è un numero intero. Siccome è importante che siano promossi tutti i differenti artifizj, con i quali possono superarsi le difficoltà che presenta l' integrazione dell'equazioni differenziali, ho creduto bene di mostrare una via più diretta e più semplice ed insieme indipendente dalla considerazione delle serie per giungere al medesimo risultamento.

All'equazione proposta moltiplicata per una funzione M di x aggiungendo il differenziale della medesima equazione avremo

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \mathrm{M}\frac{d^2y}{dx^2} + \left(1 - \frac{i(i+1)}{x^2}\right)\left(\frac{dy}{dx} + \mathrm{M}y\right) + \frac{2i(i+1)}{x^3}y = 0.$$

Ponghiamo

$$\frac{dy}{dx} + \mathrm{M}y = z$$

ed osservando che

$$\frac{d^3y}{dx^3} + M\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx^2} - 2\frac{dM}{dx}\cdot\frac{dy}{dx} - \frac{d^2M}{dx^2}\cdot y$$

$$= \frac{d^2z}{dx^2} - 2\frac{dM}{dx}\cdot z + \left(2\frac{dM}{dx} - \frac{d^2M}{dx^2}\right) y$$

otterremo con la sostituzione di questo valore

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \left(1 - \frac{i(i+1)}{x^2} - 2\frac{dM}{dx}\right)z + \left(2M\frac{dM}{dx} - \frac{d^2M}{dx^2} + \frac{2i(i+1)}{x^3}\right)y = 0.$$

Per ridurre l' ultima equazione ad una forma simile a quella della proposta eliminandone la y facciamo

$$2M\frac{dM}{dx} - \frac{d^2M}{dx^2} + \frac{2i(i+1)}{x^3} = 0$$

ed integrando avremo

$$M^2 - \frac{dM}{dx} - \frac{i(i+1)}{x^2} = c.$$

Ora se lasciassimo questa equazione in tutta la sua generalità, incontreremmo per integrarla le stesse difficoltà, che presenta la proposta; ma siccome non abbiamo bisogno che di un valore particolare di M porremo la costante $c = 0$. L'equazione in M diventa allora quella del Conte Riccati in un caso integrabile, e facilmente vedremo che ad essa soddisfà

$$M = -\frac{i+1}{x}.$$

Sostituito il valore di M sarà

$$z = \frac{dy}{dx} - \frac{i+1}{x}\,y$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \left(1 - \frac{(i+1)(i+2)}{x^2}\right)z = 0.$$

E se paragoniamo questa ultima equazione con la proposta, vedremo che la seconda si cangia nella prima, allorchè vi si ponga $i+1$ in luogo di i. Pertanto qualora si conosca l'integrale $y = X$ della proposta nel caso di $i = n$, sarà $y = \frac{dX}{dx} - \frac{n+1}{x}\cdot X$, quando $i = n + 1$.

Chiamando y_0, y_1, y_2, &c. i valori di y corrispondenti ad $i = 0, 1, 2,$ &c. avremo l' equazione a differenze miste

$$y_i = \frac{dy_{i-1}}{dx} - \frac{i}{x} y_{i-1} = x^i . \frac{d.x^{-i} \; y_{x-1}}{dx}$$

per mezzo della quale conosciuto $y_0 = a \text{sen.}(x + b)$ potremo successivamente trovare i valori di y_1, y_2 &c. e dedurne il valor generale di y nel modo seguente. Avremo primieramente

$$y_1 = \frac{x.d.\frac{a\,\text{sen.}(x+b)}{x}}{dx} = a\cos.(x + b) - \frac{a\,\text{sen.}(x+b)}{x}$$

e posto $b - 90^\circ$ in luogo di b, lo che è permesso

$$y_1 = a\,\text{sen.}(x + b) + \frac{a\cos.(x+b)}{x}.$$

Così pure sarà

$$y_2 = x^2 \frac{d.\frac{y_1}{x^2}}{dx} = a\cos.(x + b)\left(1 - \frac{3}{x^2}\right) - \frac{3a\,\text{sen.}(x+b)}{x}$$

e cangiando b in $b - 90^\circ$

$$y_2 = a\,\text{sen.}(x + b)\left(1 - \frac{3}{x^2}\right) + a\cos.(x + b).\frac{3}{x}.$$

In simil guisa troveremo

$$y_3 = a\,\text{sen.}(x + b)\left(1 - \frac{15}{x^2}\right) + a\cos.(x + b)\left(\frac{6}{x} - \frac{15}{x^3}\right)$$

$$y_4 = a\,\text{sen.}(x + b)\left(1 - \frac{45}{x^2} + \frac{105}{x^4}\right) + a\cos.(x + b)\left(\frac{10}{x} - \frac{105}{x^3}\right)$$

&c.

Da ciò apparisce, che avrà y in generale la forma

$$y = a\,\text{sen.}(x + b)\left(1 - \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_4}{x^4} - \frac{c_6}{x^6} + \&c.\right)$$

$$+ a\cos.(x + b)\left(\frac{c_1}{x} - \frac{c_3}{x^3} + \frac{c_5}{x^5} - \&c.\right)$$

essendo i coefficienti c_1, c_2, c_3, &c. funzioni di i. Per determinarli sostituiamo questo valore di y nella proposta, e paragonando tra loro separatamente i termini moltiplicati per sen. $(x+b)$ e cos. $(x+b)$ avremo l'equazioni

$$2c_1 - i(i+1) = 0$$

$$2.2c_2 - [i(i+1) - 1.2]c_1 = 0$$

$$2.3c_3 - [i(i+1) - 2.3]c_2 = 0$$

$$2.4c_4 - [i(i+1) - 3.4]c_3 = 0$$

ed in generale

$$2nc_n - [i(i+1) - n(n-1)]c_{n-1} = 0$$

cioè

$$c_n = \frac{(i+n)(i-n+1)}{2n} . c_{n-1}$$

onde si deduce

$$c_n = \frac{(i+n)(i+n-1)\ldots i(i-1)(i-2)\ldots(i-n+1)}{2.4.6\ldots 2n}$$

a motivo di $c_0 = 1$.

Sostituiti questi valori avremo y espressa in termini finiti, allorchè sarà i un numero intero positivo o negativo. Ma dal modo con cui abbiamo determinato i coefficienti c_1, c_2 &c. si comprende, che il valore trovato di y soddisfarà alla proposta anche quando i non è numero intero, se non che sarà allora espresso da una serie infinita.

All'equazione

$$M^2 - \frac{dM}{dx} - \frac{i(i+1)}{x^2} = 0$$

possiamo ancora soddisfare ponendo $M = \frac{i}{x}$, sostituito il qual valore abbiamo

$$z = \frac{dy}{dx} + \frac{i}{x}\, y$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\left(1-\frac{(i-1)i}{x^2}\right)z=0$$

ed in quest' ultima equazione si cangia la proposta, se vi si muta i in $i-1$. Sarà dunque

$$y_{i-1}=\frac{dy_i}{dx}+\frac{1}{x}\,y_i=\frac{1}{x^i}\cdot\frac{d.x^iy_i}{dx},$$

ed integrando avremo

$$y_i=\frac{1}{x^i}\int x^i.y_{i-1}\,dx,$$

col mezzo della qual' equazione in un modo più analogo a quello seguitato dal Sig. Plana troveremo i valori successivi di y_i ed il valore generale di y. Ma questo metodo procedendo per integrazioni deve riguardarsi come men semplice del precedente, il quale non richiede che differenziazioni.

Se facciamo $y=x^n u$, la proposta diventerà

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{2n}{x}\cdot\frac{du}{dx}+\left(1+\frac{n(n-1)-i(i+1)}{x^2}\right)u=0$$

e posta $n=-i$ si cangerà in

$$\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{2i}{x}\cdot\frac{du}{dx}+u=0.$$

Introducendo adesso in luogo di x un' altra variabile t, che ne sia funzione, l'equazione precedente si trasformerà in

$$(a)\qquad \frac{d^2u}{dt^2}\cdot\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+\frac{du}{dt}\left(\frac{d^2t}{dx^2}-\frac{2i}{x}\cdot\frac{dt}{dx}\right)+u=0.$$

Determiniamo la funzione t in modo, che sia

$$\frac{d^2t}{dx^2}-\frac{2i}{x}\cdot\frac{dt}{dx}=0,$$

ed avremo integrando $x^{-2i}.\frac{dt}{dx}=c$, ed integrando di nuovo $t=\frac{cx^{2i+1}}{2i+1}+c'$, o più semplicemente $t=x^{2i+1}$ posta $c=2i+1$ e $c'=0$, e quindi $x=t^{\frac{1}{2i+1}}$. Sostituiti questi valori l'equazione (a) diventerà

$$(b) \quad \frac{d^2u}{dt^2} + (2.i+1^2)^3 t^{\frac{4i}{2i+1}} . u = 0.$$

Conosciuto pertanto il valore y, che soddisfà alla proposta, avremo quello di u cioè l'integrale dell'equazione (b), se nella quantità $\frac{y}{x^i}$ porremo $t^{\frac{1}{2i+1}}$ in luogo di x.

L'Eulero nel suo Calcolo Integrale osservò la medesima relazione tra la proposta e l' equazione (b), e siccome aveva già assegnato l' integrale di questa, conviene ancora attribuirgli la prima integrazione dell' altra, che ha formato il soggetto di questa breve Memoria.

SULLA LEGGE
DELLE VARIAZIONI ORARIE DEL BAROMETRO
MEMORIA
DELL'ASTRONOMO FRANCESCO CARLINI

Ricevuta adì 5. *Novembre* 1827.

1. Dopo l'invenzione del tubo Torricelliano molte e molte ipotesi sono state proposte per ispiegarne i diversi fenomeni, e quello specialmente delle continue ed irregolari oscillazioni dell' altezza del mercurio in esso contenuto. Non v' ha dubbio che le cause che lo producono debbono essere in gran numero ed assai complicate, e per ciò non è meraviglia se tutte quelle ipotesi che si sono fondate sopra un solo principio non hanno potuto reggere al paragone de' fatti. Se in simil genere di ricerche riuscirà mai ai fisici di fare qualche passo, non sarà già coll' immaginare degli ingegnosi sistemi, ma col separare quant' è possibile i diversi termini, dei quali compongonsi quelle variazioni, onde poterli esaminare disgiuntamente gli uni dagli altri. Nel far ciò dobbiamo proporci per norma la strada che è stata battuta dagli antichi astronomi nello studiare i fenomeni del moto degli astri. Questi, sebbene ignari del vero sistema della natura, erano pur arrivati a forza d' osservazioni e di ragionati confronti a riconoscere, almeno prossimamente, le principali ineguaglianze del moto del Sole, della Luna e de' pianeti.

2. L' analogia che sussiste fra i moti dell' Atmosfera ed altri fenomeni naturali già conosciuti deve servirci di guida, onde presupporre i periodi che possono avere alcune delle ineguaglianze che si vogliono esaminare, prese separatamente dalle altre. Stabiliti poi questi periodi basterà prendere

delle quantità medie fra un gran numero di altezze barometriche osservate per rispetto a ciascuno di essi in circostanze pari, ed allora si verrà a separare il coefficiente dell'ineguaglianza cercata dalla riunione complicatissima di tutte le altre.

3. Il fenomeno che ha una maggiore analogia con questo delle oscillazioni atmosferiche si è quello delle ondulazioni del mare, le quali si compongono del flusso solare che ha un periodo medio di 12 ore, del flusso lunare che ha un periodo medio di $12^h\,25'$, e finalmente delle ondulazioni che per la loro apparente irregolarità chiameremo, sebbene impropriamente, accidentali. Nei movimenti dell' atmosfera debbon sussistere delle analoghe variazioni; ed infatti oltre le ondulazione accidentali sono già state avvertite quelle più regolari che dipendono dall'azione del Sole e della Luna. Una essenziale differenza però ha luogo fra i fenomeni dell' aria, e quelli dell' Oceano che sopra abbiamo accennati: ed è che in questo le oscillazioni accidentali sono generalmente meno estese, e di periodo più breve che le regolari; mentre ne' moti atmosferici le ineguaglianze accidentali sono le più notabili, e le regolari appena si rendono percettibili nel medio di un gran numero d' osservazioni.

4. Un' altra circostanza che è particolare ai fenomeni atmosferici e che ha giovato assai a metter gli osservatori sulla via di studiarne le leggi, sì è che le variazioni accidentali le quali ne' nostri climi sono considerabilissime ed assorbono, per così esprimerci, quelle regolari, divengono affatto nulle nelle vicinanze dell'equatore, cosicchè le ineguaglianze orarie ivi si presentano quasi spontanee all' attenzione dell' osservatore.

5. Il Cel. (Humboldt), che nel suo viaggio alle regioni equinoziali (Rélation historique T. III. pag. 270.) ha tessuta la storia di ciò che è stato osservato e scritto intorno a questo fenomeno, osserva che la prima scoperta è dovuta ai Sigg. Varin des Hayes e de Glos. In un viaggio alle isole dell' America che essi fecero per ordine del Re di Francia

nell' anno 1682. (vedi Mèm. de l' Acad. des Sciences Tom. VIII. pag. 452.) lo accennarono, sebbene in termini non del tutto precisi, dicendo „ che a Gorea il barometro è generalmente più basso, quando il termometro „ è più alto, e generalmente più alto la notte che il giorno, di 2 fino a 4 linee e che questo istrumento fa maggior variazione dalla mattina alla sera, che dalla sera alla mattina. „ Ad un' indicazione vaga ed inesatta si riducono del pari le osservazioni del P.^{e} Bozè, al quale alcuni Fisici attribuiscono a torto il merito d' avere scoperto nel 1690. a Pondicheri ed a Batavia la regolarità delle variazioni orarie nei paesi posti fra i due tropici. In una lettera inserita nel Giornale letterario dell'Aja anno 1722. trovasi per la prima volta una descrizione abbastanza precisa di coteste variazioni „ In questa parte della Guiana Olandese, dice l' anonimo autore della lettera suddetta, il barometro sale ogni giorno regolarmente dalle ore nove, sino alle undici e mezzo della mattina, indi discende sin „ verso le due o le tre della sera per ritornare all' altezza „ di prima. Nelle corrispondenti ore poi della notte le variazioni si ripetono nell' ordine medesimo „.

6. Le leggi stabilite dall' osservatore Olandese furono confermate dal P.^{e} Boudier alle Indie Orientali, dagli Accademici Francesi al Perù, dal Sig. Tibault de Chassalon alle Antille, dal Sig. Adanson al Senegal, e da altri in diversi luoghi posti in vicinanza della linea. Nelle zone nostre temperate era cosa assai più difficile il riconoscere, in mezzo alle tante perturbazioni atmosferiche, queste piccole variazioni periodiche del barometro; eppure esse non isfuggirono all' attenzione del diligentissimo Ab. Chiminello già Astronomo di Padova. Le sue prime ricerche su questo fenomeno trovansi in una dissertazione letta il 20. Gennajo 1780. ed inserita nel volume primo dei Saggi dell' Accademia Patavina. L' autore comincia dall' annunciare che col considerare alcune serie di osservazioni barometriche agevol-

mente si rileva un doppio flusso e riflusso quotidiano dell' atmosfera non modificato in varii tempi dell' anno che dalla differente temperatura delle stagioni „. Nei primi giorni, „ egli dice, delle mie osservazioni un semplice passeggiero „ confronto mi fece vedere confusamente il fenomeno, e mi „ si avvalorò subito l'opinione della sua esistenza per l' asserzione di alcuni recenti Fisici, i quali sospettano che qual„ che causa generale non per anche conosciuta faccia alle „ volte comparire l'accidentale variazione del barometro tutto all' opposto di quello che vorrebbe l' alterato peso dei „ vapori „. In un altro luogo poi si studia di dedurre dalle sue proprie osservazioni e da alcuni vaghi raziocinj quale dovrebb'essere sotto l' equatore la quantità della diurna variazione; il che mostra ad evidenza ch' egli non avea alcuna notizia delle analoghe osservazioni ch' erano già state fatte in America.

7. Non seguiremo l' autore nei tentativi poco felici fatti per dare una spiegazione teorica del fenomeno; ma non lasceremo di rilevare ch'egli nella descrizione di esso ha fatto qualche passo di più degli altri osservatori; avendo scoperto non solo la diversità che passa fra i massimi e minimi diurni e i notturni, ma ben anche la notabile varietà sull' ora in cui hanno luogo nelle diverse stagioni i due minimi; il che meglio apparirà dai calcoli che verremo esponendo in questa Memoria.

8. Troppo difficile impresa sarebbe il cercare per via teorica la legge delle oscillazioni dell'atmosfera, le quali dipendono da tante e diverse cause fra di loro combinate e confuse. Perciò il cel. Laplace nella sua Meccanica celeste si è ristretto alla considerazione delle oscillazioni che chiameremo dinamiche, e che dipendono unicamente dalle attrazioni della Luna e del Sole sulle molecole dell' aria che ci circonda. Le limitazioni però ch' egli ha dovuto porre al problema per facilitarne la soluzione e l' incertezza che rimane sopra diversi essenziali elementi, non gli permisero di giungere ad es-

pressioni dalle quali si possa dedurre con sicurezza l'assoluta grandezza delle oscillazioni, e i tempi del loro massimo e minimo. Ciò nulla ostante le indicazioni del calcolo possono utilmente servire di guida nelle ricerche da istituirsi col sussidio delle immediate osservazioni.

9. Il flusso atmosferico che abbiamo chiamato dinamico è prodotto dalle tre cause seguenti 1.° dall' azione diretta del Sole e della Luna; 2.° dall' elevazione ed abbassamento periodico dell' Oceano che è la base mobile dell' atmosfera; 3.° dalla variazione nella forza attrattiva esercitata dalla massa delle acque in conseguenza del cambiamento che succede nella loro figura. Non è cosa facile il riconoscere separatamente l'effetto di ciascheduna di queste tre cause; il Sig. Laplace è però d'opinione che la seconda sia quella che vi ha maggiore influenza. Nei calcoli esposti dall' autore nella sua Meccanica celeste, T. I. pag. 105. e T. II. pag. 294, egli fa astrazione dalla variazione del calore a differenti latitudini ed a differenti altezze, e suppone la densità dell' aria in ciascun punto semplicemente proporzionale alla forza comprimente; fra le diverse ipotesi poi che possono farsi sulla profondità media del mare, e sull' altezza media dell' atmosfera, egli ritiene per maggior comodo del calcolo la prima d' $\frac{1}{722}$ del raggio terrestre e la seconda del doppio maggiore, poste le quali cose giunge ad esprimere l' altezza b del barometro sopra la media B per mezzo d' una formula che dipende dalla latitudine del luogo, dagli angoli orarj del Sole e della Luna, e dalle rispettive loro declinazioni. Per la latitudine di 45° questa formula darebbe

$$\begin{aligned} b = \mathrm{B} - \overset{\text{mill.}}{0,}\ & 013279\,(\cos.^2 v + e.\cos^2.v^1) \\ - \overset{\text{mill.}}{0,}\ & 011544\,(\cos.^2 v \cos.2h + e \cos.^2 v' \cos.2h'); \end{aligned}$$

dove v e v' sono le declinazioni dei due astri suddetti, h ed h' gli angoli orarj ed e il rapporto delle forze rispettive colle quali tendono a sollevare le molecole dell' atmosfera. Da ciò conchiude che il periodo del flusso atmosferico prodotto dal Sole debb'essere della metà d'un giorno solare, e il periodo del flusso prodotto dalla Luna la metà d'un giorno lunare. In un altro luogo poi (Connaissance des tems pour 1826.) ritornando su quest' argomento, osserva che „ la hauteur du baromètre due „ au flux solaire redevenant chaque jour la même à la mê„ me heure, ce flux se confond avec la variation diurne „ qu' il modifie et il ne peut être distingué par les obser„ vations faites à l' observatoire royal. „

10. Questo passo può dar luogo ad alcune speciali considerazioni. È chiaro che quì l' autore oltre il flusso dinamico, ossia prodotto dalle attrazioni celesti, riconosce l' esistenza di altre variazioni diurne, le quali ritornano le stesse alle medesime ore solari, e che per conseguenza debbon essere prodotte anch' esse dall' azione del Sole. Ora, per quanto noi sappiamo, quest'astro non agisce sul nostro pianeta che in due modi; cioè per mezzo dell' attrazione e per mezzo de' raggi calorifici e luminosi. Ciò adunque che l' autore chiama variazione diurna e che noi chiameremo flusso fisico dell' atmosfera, deve necessariamente dipendere dal calor solare, il quale su di essa agisce, sia direttamente dilatandola e facendola più leggiera, sia indirettamente rendendola idonea a contenere in maggior copia i vapori. Ma comunque ciò avvenga, poichè le vicende del calor solare hanno per noi un periodo di 24 ore, anche le variazioni barometriche che ne dipendono, od almeno la parte principale di esse, avrà un eguale periodo; dunque le variazioni orarie del barometro saranno composte di due termini, l' uno che abbiamo chiamato dinamico (*) il cui periodo sarà di 12 ore, l'altro che abbiamo detto fisico il cui periodo sarà di 24 ore. Ora an-

---

(*) Le variazioni del barometro dipendenti dall' angolo orario della Luna formano anch' esse parte del flusso dinamico. La loro influenza però si elide quasi interamente allorchè si paragonano le altezze medie orarie risultanti da uno o più mesi d' osservazione.

corchè questi due termini si combinino continuamente fra di loro e ritornino gli stessi alle medesime ore, sarà sempre possibile, dacchè hanno un periodo differente, il disgiungerli l' uno dall' altro; nel modo appunto con cui nella teoria della Luna si arriva a separare i coefficienti di due termini d' una ineguaglianza che dipendono da argomenti l' uno multiplo dell' altro. Questa separazione dei due termini che compongono la variazione oraria o variazione solare del Barometro è l'oggetto che mi sono specialmente prefisso nella presente Memoria.

11. Nella state dello scorso anno ho procurato di riunire un buon numero di altezze barometriche osservate ad intervalli eguali di tempo, e combinate con quelle del termometro interno e dell'igrometro, affine di riconoscere le relazioni che possono sussistere nelle variazioni atmosferiche indicate da ciascuno di questi stromenti. Le mie osservazioni cominciarono il dì 28 Maggio e furono continuate, colla sola interruzione di tre giorni, fino al 29 Giugno; esse venivano ripetute, sì di giorno che di notte, di quattro in quattro ore; avendole poi sottomesse ad un esame preliminare mi accorsi che volendo riconoscere con più sicurezza l' andamento delle oscillazioni barometriche, conveniva che le osservazioni si succedessero a minore intervallo ed almeno di due in due ore. Cominciai per ciò tosto una nuova serie su tale sistema, e la continuai fino alla metà di Luglio. Per trarre poi partito anche dalle osservazioni precedenti pensai di collegarle fra loro in questo modo. Per le ore 0, 4, 8, 12, 16, 20 ritenni il medio di tutte le osservazioni in numero di 50 per ciascun ora; indi calcolati i medii delle ultime 20 fatte di due in due ore cercai la differenza fra le semisomme delle altezze barometriche corrispondenti alle ore suddette, e quelle corrispondenti alle ore intermedie. Questa differenza, che è quantità molto piccola, applicata alla semisomma delle altezze che risultano dal medio di tutte le 50 altezze, hanno dato con molta approssimazione quelle

che sarebbero risultate nelle ore intermedie se fossero state determinate con altrettante osservazioni. Questa specie d'interpolazione è stata eseguita dopo che furono applicate a ciascuna quantità media le correzioni necessarie per ridurle alla temperatura del ghiaccio.

12. Poichè quì si trattava di ricercare, non le altezze assolute, ma le piccole variazioni delle altezze medesime, ho giudicato conveniente di non toccare mai il galleggiante per ricondurlo alla coincidenza, riducendo così l'error proprio di ciascuna osservazione a quello solo che può commettersi nel collimare coll'anello scorrevole che porta l'indice e il nonio, ponendolo tangente alla superficie convessa del mercurio nella canna. Questa collimazione poi si faceva sempre coll'occhio armato di lente, e traguardando contro il lume.

13. Per riconoscere l'influenza che la variazione di livello del mercurio entro il pozzetto può avere sui risultati finali del calcolo supponiamo che in origine l'indice del galleggiante sia stato posto al punto di coincidenza, mentre l'altezza del mercurio nella canna riferita alla divisione della scala fissa fosse $= p$ e la temperatura del mercurio fosse $= o$; supponiamo inoltre che successivamente venga a crescere prima la pressione atmosferica, poi la temperatura; è chiaro che nell'un caso e nell'altro le altezze del mercurio varieranno tanto nella canna quanto nel pozzetto, con questa differenza che nel primo crescerà l'una e diminuirà l'altra, e nel secondo cresceranno tutte e due. Per convincerci di ciò facciamo da prima che la pressione barometrica p si aumenti di n rimanendo costante la temperatura; una porzione di mercurio dal pozzetto passerà nella canna, e ne passerà tanta che basti a far sì che la differenza d'altezza de' due livelli sia $= p + n$; se dunque il livello non si rimette a sito, l'altezza p' del barometro riferita alla scala fissa sarà $p' = p + n - nr^2$, chiamando r il rapporto fra il diametro della canna e quello del pozzetto che supporremo di figua cilindrica.

14. Fingiamo ora che tale essendo la pressione barometrica cresca la temperatura sino a t gradi, la massa del mercurio rimarrà la medesima nèi due tubi comunicanti; ma dilatandosi essa crescerà proporzionalmente in ciascuno. Sia q l'altezza del mercurio nel cilindro quando la temperatura è eguale a zero e la pressione $=p$; divenuta la pressione $=p+n$ l'altezza q si cangerà, per quel che s'è detto, in $q-nr^2$, e portato il mercurio alla temperatura t l'altezza medesima diverrà $(q-nr^2)(1+kt)$, indicando con k la dilatazione del mercurio per ogni grado del termometro di Reaumur. L'altezza del mercurio nella canna al di sopra del livello sarà allora $=(p+n)(1+kt)$, e l'altezza apparente segnata sulla scala fissa sarà

$$p''=(p+n)(1+kt)-nr^2(1+kt)+qkt;$$

d'onde si deduce $p+n(1-r^2)=\frac{p''}{1+kt}-\frac{qkt}{1+kt}$, che porremo $=b$.

15. Nel nostro barometro si ha il diametro della canna $=$ linee 3, il diametro del pozzetto $=$ linee 18, onde $r=\frac{1}{6}$, $r^2=\frac{1}{36}$; e l'altezza media del fluido nel pozzetto $q=$ linee 18,2. Il valore di k si ritiene comunemente $=\frac{1}{4330}$. Per ridurre adunque le fatte osservazioni, prese da prima le rispettive quantità medie delle altezze p'' corrispondenti, separatamente, a ciascun'ora d'osservazione, e prese pure le rispettive quantità medie delle temperature t indicate dal termometro unito al barometro, ho calcolato il valore del termine $\frac{p''}{1+kt}$, che è l'altezza barometrica ridotta colla solita regola alla temperatura del ghiaccio. A quest'altezza ridotta ho poi applicata la piccola correzione $-\frac{18,2.kt}{1+kt}$, onde avere il valore di b. Calcolando allora coi metodi che verranno esposti in

appresso i coefficienti delle ineguaglianze orarie, invece delle ineguaglianze assolute, mi risultarono le apparenti, rappresentate da $n(1-r^2)$; divise poi queste per $1-r^2=0,9722$ ottenni le ineguaglianze assolute n che si volevano determinare.

16. Ommettendo di scrivere quì le singole osservazioni che occuperebbero troppo spazio, riferiremo le sole quantità medie del barometro, e del termometro competenti a ciascun' ora.

Altezze barometriche osservate di due in due ore dal 29 giugno al 19 luglio 1826; medio di 20 osservazioni.

Ore di t vero astron.	Barom. osservato $=p''$	Term. unito $=t$	Barom. ridotto $=b$	Semisomma del preced. e del seg.	Differenza
	lin.		lin.		
0	334,580	21°,28	332,8547	lin.	lin.
2	334,438	21, 57	332,6898	332,6752	+0, 0147
4	334,270	21, 91	332,4957		
6	334,188	21, 65	332,4346	332,5347	—0, 1001
8	334,278	21, 04	332,5738		
10	334,335	19, 96	332,7173	332,7097	+0, 0076
12	334,416	19, 37	332,8457		
14	334,366	18, 85	332,8379	332,8401	—0, 0022
16	334,340	18, 57	332,8346		
18	334,384	18, 65	332,8716	332,9091	—0, 0375
20	334,565	19, 50	332,9836		
22	334,635	21, 21	332,9154	332,9191	—0, 0037.

Altezze barometriche osservate di quattro in quattr'ore dal dì 28 maggio al 19 luglio; medio di 50 osservazioni. (*)

(*) Le altezze barometriche delle quali si tratta in questa Memoria essendo tutte espresse in linee e frazioni decimali di linea del piede francese, tralasceremo d'ora in avanti d'apporre la parola *linee* al di sopra di ciascun numero.

Ore	p''	t	b	Ore	Semisomma	Differenza	b interpolato
0	334,4008	19,282	332,8375	2	332,6835	+0,0147	332,6982
4	334,1088	19,496	332,5296	6	332,5399	—0,1001	332,4398
8	334,1566	18,882	332,5502	..10	332,6981	+0,0076	332,7057
12	334,2998	17,930	332,8461	..14	332,8296	—0,0022	332,8247
16	334,1984	17,154	332,8078	..18	332,8811	—0,0375	332,8436
20	334,4090	17,936	332,9544	..22	332,8960	—0,0037	332,8923

I valori di b dati nella 4^a e nella 8' colonna della seconda tabella sono quelli di cui faremo uso nelle seguenti operazioni.

17. Prima di accingerci a dedurre dalle osservazioni che abbiamo raccolte l' espressione delle periodiche variazioni dell' atmosfera, conviene assicurarci se il numero delle osservazioni medesime sia sufficiente a fare quasi interamente sparire dalle quantità medie l' influenza delle alterazioni accidentali. Per riconoscere se ciò si verifica non possiamo quì valerci del solito criterio delle differenze di diversi ordini, il quale trova la sua applicazione allorchè si tratta dell' esame d' una funzione rappresentante una curva del genere parabolico, od allorchè la funzione stessa, sebbene di tutt' altra natura, sia calcolata per diversi valori della variabile assai vicini fra loro. Nel caso nostro la funzione che rappresenta le variazioni delle altezze barometriche debb'essere composta d' una serie di seni di archi, i quali nei successivi intervalli di due ore possono variare di 30° o di 60° o d' un maggior numero di gradi, e quindi convien far uso d' un altro metodo per riconoscerne le regolarità.

18. L' analisi delle differenze successive delle serie di simil genere forma il soggetto d' una Memoria dell' illustre Lagrange inserita nel volume delle Effemeridi astronomiche di Berlino per l' anno 1783. pag. 41. della quale riferiremo quì

quella parte che è necessaria all' intelligenza delle applicazioni che ne faremo in appresso.

L' autore considera una serie il cui termine generale sia della forma

$$A_n = a\sin.(\alpha + n\phi) + b\sin.(\beta + n\theta) + c\sin.(\gamma + n\psi) + \text{ecc.}$$

e dando successivamente ad n i valori -3, -2, -1, 0, $+1$, $+2$, ecc. suppone che siano noti i valori corrispondenti di A_n, cioè

$$A_{-3},\ A_{-2},\ A_{-1},\ A_0,\ A_1,\ A_2 \text{ ec.}$$

Se, per cominciare da un caso più semplice, si ritiene che A_n non sia composto che del solo termine $a\sin.(\alpha + n\phi)$, si avrà

$$A_{-3} = a\sin.(\alpha - 3\phi) \qquad A_0 = a\sin.\alpha \qquad A_1 = a\sin.(\alpha + \phi)$$

$$A_{-2} = a\sin.(\alpha - 2\phi) \qquad A_2 = a\sin.(\alpha + 2\phi)$$

$$A_{-1} = a\sin.(\alpha - \phi) \qquad A_3 = a\sin.(\alpha + 3\phi).$$

Rappresentando ora con B_{-3}, B_{-2}, B_{-1}, B_1, B_2, B_3 ecc. le successive differenze fra A_{-3}, A_{-2}, A_{-1} ecc., si avrà

$$B_{-3} = 2a\sin.\tfrac{1}{2}\phi\cos.(\alpha - \tfrac{5}{2}\phi),\ B_1 = 2a\sin.\tfrac{1}{2}\phi\cos.(\alpha + \tfrac{1}{2}\phi)$$

$$B_{-2} = 2a\sin.\tfrac{1}{2}\phi.\cos.(\alpha - \tfrac{3}{2}\phi),\ B_2 = 2a\sin.\tfrac{1}{2}\phi\cos.(\alpha + \tfrac{3}{2}\phi)$$

$$B_{-1} = 2a\sin.\tfrac{1}{2}\phi.\cos.(\alpha - \tfrac{1}{2}\phi),\ B_3 = 2a\sin.\tfrac{1}{2}\phi\cos.(\alpha + \tfrac{5}{2}\phi)$$

19. Siano ora C_{-2}, C_{-1}, C_0, C_1, C_2 ecc. le differenze seconde
D_{-2} D_{-1} D_1 D_2 ecc. le differenze terze,
ecc.

sarà

$$C_0 = -4\,a\,\sin.^2\tfrac{1}{2}\varphi\sin.\,\alpha$$

$$C_{-2} = -4a\sin^2.\tfrac{1}{2}\varphi.\sin.(\alpha-2\varphi),\quad C_1 = -4a\sin^2.\tfrac{1}{2}\varphi\sin.(\alpha+\varphi)$$

$$C_{-1} = -4a\sin^2.\tfrac{1}{2}\varphi\sin.(\alpha-\varphi),\quad C_2 = -4a\sin^2.\tfrac{1}{2}\varphi\sin.(\alpha+2\varphi)$$

ecc.

e successivamente

$$D_{-2} = -8a\sin^3.\tfrac{1}{2}\varphi\cos.(\alpha-\tfrac{3}{2}\varphi),\quad D_1 = -8a\sin^3.\tfrac{1}{2}\varphi\cos.(\alpha+\tfrac{1}{2}\varphi)$$

$$D_{-1} = -8a\sin^3.\tfrac{1}{2}\varphi\cos.(\alpha-\tfrac{1}{2}\varphi),\quad D_2 = -8a\sin^3.\tfrac{1}{2}\varphi\cos.(\alpha+\tfrac{3}{2}\varphi)$$

ecc.

20. Facciasi per analogia nella serie delle differenze d'ordine dispari,

$$B_0 = \tfrac{1}{2}(B_{-1}+B_1),\qquad D_0 = \tfrac{1}{2}(D_{-1}+D_1)\qquad \text{ecc.}$$

si avranno i valori seguenti, che procedono con una notabile regolarità

$$A_0 = \quad a\sin.\alpha \qquad\qquad = +2^0 a\sin.\,\alpha\sin.^0\tfrac{1}{2}\varphi.$$

$$B_0 = \quad 2a\cos.\alpha\sin.\tfrac{1}{2}\varphi\cos.\tfrac{1}{2}\varphi \qquad = +2^0 a\cos.\,\alpha\sin.^0\tfrac{1}{2}\varphi.\sin.\varphi$$

$$C_0 = -4a\sin.\alpha\sin.^2\tfrac{1}{2}\varphi \qquad = -2^2 a\sin.\,\alpha\sin.^2\tfrac{1}{2}\varphi.$$

$$D_0 = -8a\cos.\alpha\sin.^3\tfrac{1}{2}\varphi\cos.\tfrac{1}{2}\varphi \qquad = -2^2 a\cos.\,\alpha\sin.^2\tfrac{1}{2}\varphi.\sin.\varphi$$

$$E_0 = \quad 16a\sin.\alpha\sin.^4\tfrac{1}{2}\varphi \qquad = +2^4 a\sin.\,\alpha\sin.^4\tfrac{1}{2}\varphi.$$

$$F_0 = \quad 32a\cos.\alpha\sin.^5\tfrac{1}{2}\varphi\cos.\tfrac{1}{2}\varphi \qquad = +2^4 a\cos.\,\alpha\sin.^4\tfrac{1}{2}\varphi\sin.\varphi.$$

ecc.

21. Ora è facile il vedere che se nell'espressione di A_n si conservano molti termini, come $a\sin.(\alpha+n\varphi)+b\sin.(\beta+n\theta)+$ ec. le serie A_0, C_0, E_0, ecc., B_0, D_0, ecc. consisteranno d'altrettante progressioni geometriche, quanti sono i termini considerati, e quindi verranno a costituire due serie del genere di quelle dette ricorrenti. Ora per la nota proprietà di queste serie se si cercheranno i valori successivi dei rapporti $\frac{C_0}{A_0}$, $\frac{E_0}{C^0}$ ecc.; $\frac{D_0}{B_0}$, $\frac{F_0}{D_0}$, ecc., dovranno questi rapporti convergere verso un valore costante, e questo valore sarà in entrambe le serie $=-2^2\sin.^2\frac{1}{2}\varphi$, supponendo che il coefficiente a di $\sin.(\alpha+n\varphi)$ sia il maggiore fra i coefficienti che entrano nell' espressione di A_n.

22. Viceversa se i valori di A_n si suppongono dati in numeri, e se prendendo le differenze successive nell'ordine precedentemente indicato si giunga ad una serie di rapporti $\frac{C_0}{A_0}$, $\frac{E_0}{C_0}$, ecc., $\frac{D_0}{B_J}$, $\frac{F_0}{D_0}$, ecc., i quali convergano verso un medesimo numero costante, si avrà un indizio che il valore generale A_n può rappresentarsi per mezzo d' una funzione della forma

$$a\sin.(\alpha+n\varphi)+b\sin.(\beta+n\theta)+\text{ecc.}$$

23. Per applicare questo criterio alla nostra serie dei valori di b ottenuti al n.° 16. cominceremo dal ridurli alla sola parte variabile sottraendo da ciascuno il medio aritmetico di tutti; stabiliremo inoltre l'indice $n=0$ a 12^h, ossia a mezzanotte, l'indice $n=1$ a 14^h, l'indice $n=2$ a 16^h, e retrocedendo, l' indice $n=-1$ a 10^h, l'indice $n=-2$ ad 8^h, ecc.; ciò posto si avrà

n	A	B	C	D	E	F	G	H	I
−5	−0, 0460								
		−1686							
−4	−0, 2146		+ 788						
		− 898		+1214					
−3	−0, 3044		+2002		−2765				
		+1104		−1551		+3714			
−2	−0, 1940		+ 451		+ 949		−5528		
		+1555		− 602		−1814		+11337	
−1	−0, 0385		− 151		− 865		+5809		−25452
		+1404		−1467		+3995		−14115	
0	+0, 1019		−1618		+3130		−8306		+27654
		− 214		+1663		−4311		+13539	
+1	+0, 0805		+ 45		−1181		+5233		−22137
		− 169		+ 482		+ 922		− 8598	
+2	+0, 0636		+ 527		− 259		−3365		
		+ 358		+ 223		−2443			
+3	+0, 0994		+ 750		−2702				
		+1108		−2479					
+4	+0, 2102		−1729						
		− 621							
+5	+0, 1481								

d'onde risultano le due serie

$A_0 = +\,0{,}1019$ $\quad B_0 = +\,0{,}0595$

$C_0 = -\,0{,}1618$ $\quad D_0 = +\,0{,}0098$

$E_0 = +\,0{,}3130$ $\quad F_0 = -\,0{,}0158$

$G_0 = -\,0{,}8306$ $\quad H_0 = +\,0{,}0288$

$I_0 = +\,2{,}7654$ $\quad K_0 = +\,0{,}1657.$

La prima procede con termini alternativi, e somministra i rapporti $\frac{A_0}{C_0}=-1,6$, $\frac{E_0}{C_0}=-1,9$, $\frac{G_0}{E_0}=-2,7$, $\frac{I_0}{G_0}=3,3$, i quali procedono con una certa regolarità; la seconda poi è composta di termini tanto piccoli che non può trarsi da essa un indizio nè favorevole nè contrario alla forma che volevamo attribuire alla funzione esprimente i valori di b.

24. Possiamo dunque con qualche fondamento ritenere che questi valori dovranno rappresentarsi per mezzo di un termine costante e di alcuni termini variabili della forma $a\,\sin.(\alpha'+n\varphi)+b\,\sin.(\beta+n\psi)+$ ecc. In conseguenza poi delle considerazioni esposte al n.° 10, supponendo che il primo di questi termini rappresenti il flusso dinamico ed il secondo il flusso fisico dell'atmosfera, esprimeremo il valore generale di b corrispondente all' ora H di tempo vero astronomico con

$$b=x+a\sin.(\alpha+15.^\circ\mathrm{H})+b\sin.(\beta+30.^\circ\mathrm{H});$$

oppure con quest' altra equivalente all' esposta, ma più comoda all' eliminazione delle incognite nella quale abbiamo fatto $15^\circ\mathrm{H}=h$,

$$b=x+y\sin.h+y'\cos.h+z\sin.2h+z'\cos.2h.$$

Diamo ora successivamente ad h i valori 0, 2, 4, ... 22, e siano b°, b'; b''. . . . . b^{XI} i corrispondenti valori di b risultanti dal medio delle altezze osservate; avremo dodici equazioni della forma

$$\begin{array}{lllll}
x+y\sin.0^\circ & +y'\cos.0 & +z\sin.0^\circ & +z'\cos.0^\circ & =b^\circ \\
x+y\sin.30 & +y'\cos.30 & +z\sin.60 & +z'\cos.60 & =b' \\
x+y\sin.60 & +y'\cos.60 & +z\sin.120 & +z'\cos.120 & =b'' \\
\vdots & & & & \vdots \\
x+y\sin.330 & +y'\cos.330 & +z\sin.300 & +z'\cos.300 & =b^{\mathrm{XI}}.
\end{array}$$

25. Essendo le equazioni da risolversi in maggior numero delle incognite ci serviremo nella risoluzione del metodo de' minimi quadrati, il quale oltre al somministrare il valor

più probabile delle quantità che si cercano, ci condurrà in questo caso a cinque equazioni nelle quali le incognite saranno già da se stesse separate, e ci risparmierà il lavoro della eliminazione. Infatti secondo i principj di questo metodo cominciando dalla prima delle cinque equazioni composte si otterrà essa riunendo in una somma le dodici equazioni date. Ora indicando col segno Σ la somma dei termini analoghi delle dodici equazioni si avrà, per rispetto all' incognita x, $\Sigma x = 12\,x$; indi sommando i coefficienti di y ed osservando che gli angoli di cui debbono sommarsi i seni si stendono per intervalli eguali ad un' intera circonferenza, si otterrà $\Sigma \sin. h = 0$. Allo stesso modo si troverà che si annullano nelle somme i coefficienti di y', z, z'; la prima equazione composta risulta adunque

$$12\,x = \Sigma\,b.$$

26. La seconda delle equazioni composte si ottiene moltiplicando ciascuna delle date pel coefficiente rispettivo di x; cosicchè sarà della forma

$$x\Sigma \sin. h + y\Sigma \sin.^2 h + y'\Sigma \sin. h \cos. h$$

$$+ z\Sigma \sin. h \sin. 2h + z'\Sigma \sin. h \cos. 2h = \Sigma b \sin. h.$$

Ossia

$$\begin{aligned} x\Sigma.\sin.h + y\Sigma.\tfrac{1}{2} &+ \tfrac{1}{2}y'\Sigma \sin. 2h + \tfrac{1}{2}z\Sigma \sin. h - \tfrac{1}{2}z'\Sigma.\sin.h \\ - \tfrac{1}{2}y\Sigma \sin. h &\qquad\qquad\qquad + \tfrac{1}{2}z\Sigma \sin.3h + \tfrac{1}{2}z'\Sigma \sin.3h \end{aligned}$$

$$= \Sigma.\,b \sin.2h.$$

Ma poichè le somme di $\sin.h$, $\sin. 2h$, $\sin. 3h$, riduconsi tutte a zero, si avrà semplicemente

$$y\Sigma\,\tfrac{1}{2} = 6y = \Sigma.b \sin. h.$$

Componendo allo stesso modo le altre equazioni troveremo agevolmente che le cinque equazioni risultanti dal metodo de' minimi quadrati sono

$$12x = \Sigma\, b$$

$$6y = \Sigma . b \text{ sin.} h$$

$$6y' = \Sigma . b \text{ cos. } h$$

$$6z = \Sigma . b \text{ sin. } 2h$$

$$6z' = \Sigma . b \text{ cos. } 2h\,;$$

cosicchè non rimane che da formare i secondi termini delle equazioni sommando prima i valori di b: sommandoli poi di nuovo dopo averli moltiplicati rispettivamente per sin. 0°, sin. 30°, sin. 60°, ecc., per cos. 0°, cos. 30°, cos. 60° ecc., per sin. 0°, sin. 60°, sin. 120°, ecc., per cos. 0°, cos. 60°, cos. 120° ecc.

27. Se nell' eseguire le accennate moltipliche si fa attenzione al ritorno de' medesimi seni e coseni nei diversi punti della circonferenza si vedrà agevolmente che il valore di $\Sigma . b \text{ sin.} h$ è espresso da

$$\begin{aligned} 6y = \Sigma . b \text{sin.} h = {} & \tfrac{1}{2}\left(b' + b^{v} - b^{v''} - b^{xi} \right) \\ & + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(b'' + b^{\prime v} - b^{v'''} - b^{x} \right) \\ & + 1.\left(b''' - b^{\prime x} \right), \end{aligned}$$

e colla medesima avvertenza si troverà

$$\begin{aligned} 6y' = \Sigma . b \text{cos.} h = {} & 1.\left(b^{0} - b^{v'} \right) \\ & + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(b' - b^{v} - b^{v''} + b^{xi} \right) \\ & + \tfrac{1}{2}\left(b'' - b^{\prime v} - b^{v'''} + b^{x} \right) \end{aligned}$$

$$6z = \Sigma b \sin.\, 2h = \frac{\sqrt{3}}{2}\,(b^{\prime}+b^{\prime\prime}-b^{\prime v}-b^{v}+b^{v\prime}+b^{v\prime\prime\prime}-b^{x}-b^{xi})$$

$$6z' = \Sigma b \cos.\, 2h = 1.\,(b^{\circ}-b^{\prime\prime\prime}+b^{v\prime}-b^{ix})$$

$$+\frac{1}{2}\,(b^{\prime}-b^{\prime\prime}-b^{\prime v}+b^{v}+b^{v\prime\prime}-b^{v\prime\prime\prime}-b^{x}+b^{xi}).$$

28. Nel caso nostro prendendo i valori di b ritrovati al N.° 16, avremo

H = 0,	$b^{\circ} = 332{,}8375$
2	$b^{\prime} = 332{,}6982$
4	$b^{\prime\prime} = 332{,}5296$
6	$b^{\prime\prime\prime} = 332{,}4398$
8	$b^{\prime v} = 332{,}5502$
10	$b^{v} = 332{,}7057$
12	$b^{v\prime} = 332{,}8461$
14	$b^{v\prime\prime} = 332{,}8247$
16	$b^{v\prime\prime\prime} = 332{,}8078$
18	$b^{ix} = 332{,}8436$
20	$b^{x} = 332{,}9544$
22	$b^{xi} = 332{,}8923$

fatta la somma e dividendola per 12 sarà dunque

$$x = 332\,,\,7442.$$

Formando successivamente i valori delle altre somme avremo

$$\Sigma.b\sin.h = -\frac{1}{2}.0{,}3131 - \frac{\sqrt{3}}{2}\,0{,}6824 - 0{,}4038 = -1{,}1513$$

$$\Sigma.b\cos.\ h = +\frac{1}{2}.0{,}1256 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,0{,}0601 - 0{,}0086 = +0{,}1062$$

$$\Sigma.b\sin.2h = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,0{,}2423 \qquad = -0{,}2098$$

$$\Sigma.b\cos.2h = +\ 0{,}4002 + \frac{1}{2}\,0{,}2789 \qquad = +0{,}5397$$

onde risulta

$$x = 332{,}7442,\quad y = -\,0{,}1919,\quad y' = +\,0{,}0177$$
$$z = -\,0{,}0350,\quad z' = +\,0{,}0900$$

e quindi

$$b = 332{,}7442 - 0{,}1919\,\mathrm{sin}.h + 0{,}0177\,\mathrm{cos}.h$$
$$- \,0{,}0350\,\mathrm{sin}.2h + 0{,}0900\,\mathrm{cos}.2h.$$

29. Vediamo ora sino a qual segno la nostra formula corrisponda alle singole osservazioni. Sostituendo in essa successivamente gli archi 0°, 30°, 60°, ec. in luogo di t, si ottiene

h	y sin. h	y' cos. h	z sin. $2h$	z'cos. $2h$	valore di b		differenza
					calcolato	osservato	
0°	—0, 0000	+0, 0177	—0, 0000	+0, 0900	332, 8519	332, 8375	—0, 0144
30	—0, 0960	+0, 0153	—0, 0303	+0, 0450	332, 6782	332, 6982	+0, 0200
60	—0, 1662	+0, 0088	—0, 0303	—0, 0450	332, 5115	332, 5296	+0, 0181
90	—0, 1919	+0, 0000	—0, 0000	—0, 0900	332, 4623	332, 4398	—0, 0225
120	—0, 1662	—0, 0088	+0, 0303	—0, 0450	332, 5545	332, 5502	—0, 0043
150	—0, 0960	—0, 0153	+0, 0303	+0, 0450	332, 7082	332, 7057	—0, 0025
180	—0, 0000	—0, 0177	+0, 0000	+0, 0900	332, 8165	332, 8461	+0, 0296
210	+0, 0960	—0, 0153	—0, 0303	+0, 0450	332, 8396	332, 8247	—0, 0149
240	+0, 1662	—0, 0088	—0, 0303	—0, 0450	332, 8263	332, 8078	—0, 0185
270	+0, 1919	—0, 0000	—0, 0000	—0, 0900	332, 8461	332, 8436	—0, 0025
300	+0, 1662	+0, 0088	+0, 0303	—0, 0450	332, 9045	332, 9544	+0, 0499
330	+0, 0960	+0, 0153	+0, 0303	+0, 0450	332, 9308	332, 8923	—0, 0385

Il massimo errore non arriva a 5 centesimi di linea, ed il minimo non arriva a 2 centesimi; possiamo dunque sperare che anche i coefficienti delle ineguaglianze sieno determinati entro questo limite di esattezza.

30. Si potrà ora ridurre il valore di b ad una forma più compendiosa riunendo i seni e i coseni del medesimo angolo, e si avrà

$$b = 332{,}7442 + 0{,}1927\,\mathrm{sin}.(174\,.44' + h) + 0{,}0965\,\mathrm{sin}.(111.^{\circ}15' + 2h).$$

Ma per ciò che si è avvertito al n.° 15 i coefficienti delle trovate ineguaglianze debbono dividersi per $1 - r^2 = 0,9722$, oppure moltiplicarsi per $\frac{36}{35}$ onde ottenere il loro valore assoluto; avremo dunque infine

$$\begin{aligned} b = 332,7442 &+ 0,1982 \sin.(174^\circ.44' + h) \\ &+ 0,0993 \sin.(111^\circ.15' + 2h). \end{aligned}$$

31. Dall' esame delle osservazioni fatte di due in due ore, e meglio ancora dalla formula precedente che le rappresenta, si scorge che l' altezza del barometro nel corso della giornata ha due massimi e due minimi. Infatti eguagliando a zero il differenziale del valore di b si ha

$$+ 0,1982 \cos.(174^\circ.44' + h) + 0,1986 \cos.(111^\circ.15' + 2h) = 0.$$

Poichè questa equazione non può risolversi per via diretta, cominciamo dal supporre che i coefficienti dei due coseni siano eguali, si avrà allora

$$\cos.(174^\circ.44' + h) = -\cos.(111^\circ.15' + 2h) = \cos.(291^\circ.15' + 2h),$$

e si otterrà una delle radici cercate ponendo

$$174^\circ.44' + h = 291^\circ.15' + 2h, \quad \text{e quindi } h = 243^\circ.29'.$$

Le altre radici si avranno mettendo successivamente

$$\begin{array}{lcl} 174^\circ.44' + h = 360^\circ - 291^\circ.15' + 2h & & h = -35^\circ.20' = 324^\circ.40' \\ 174.\,44 + h = 2 \times 360 - 291.\,15 + 2h & \text{onde} & h = 84.\,40 \\ 174.\,44 + h = 3 \times 360 - 291.\,15 + 2h & \text{risulta} & h = 204.\,40. \end{array}$$

32. Sia ora h' uno di questi valori approssimati di h; cosicchè si abbia $h = h' + \theta$, e siano i due coefficienti dell' espressione di b l' uno $= p - \omega$, l' altro $= p + \omega$, essendo p il loro valor medio ed ω una quantità molto piccola; facciasi inoltre l' angolo $174^\circ.44' = m$, l'angolo $291^\circ.15'. = n$, si avrà l' equazione

$$(p - \omega) \cos.(m + h' + \theta) = (p + \omega) \cos.(n + 2h' + 2\theta).$$

Svolgendo e trascurando le quantità di second' ordine per rispetto ad ω ed a θ, avremo

$$p\theta\cos.(m+h') - \omega\cos.(m+h') - p\theta\sin.(m+h')$$
$$= p\cos.(n+2h') + \omega\cos.(n+2h') - 2p\theta\sin.(n+2h'),$$

ed ommettendo i primi termini dei due membri che si elidono

$$p\theta[2\sin.(n+2h') - \sin.(m+h')] = \omega[\cos.(n+2h') + \cos.(m+h')]$$

onde

$$\theta = \frac{\omega}{p}\,\frac{\cos.(n+2h')+\cos\,(m+h')}{2\sin.(n+2h')-\sin.(m+h')} = \frac{2\,\omega}{p}\,\frac{\cos.(m+h')}{2\sin.(n+2h')-\sin.(m+h')}.$$

Restituendo i valori numerici si ha per ciascuna delle radici cercate poste per ordine delle loro grandezze

$$\begin{array}{llll}
h' = 84^\circ.40', & \theta = -\,0{,}00009 = -\,0',4, & h = & 84^\circ.40' \\
204.\,40 & \ -\,0{,}00147 = -\,6 & & 204.\,34 \\
243.\,29 & \ +\,0{,}00096 = +\,4 & & 243.\,33 \\
324.\,40 & \ -\,0{,}00060 = -\,3 & & 324.\,43.
\end{array}$$

Gli archi h divisi per 15 daranno le ore solari alle quali corrispondono i massimi e i minimi, ed i valori di questi si otterranno dall' espressione di b sostituendo in essa i suddetti valori di h; si avrà per tal modo

Nella stagione estiva

ore dei massimi e dei minimi		altezze massime e minime	escursioni del barometro
$5^h.\,39'$	min.	332, 4517	+0, 3914
13. 38.	mass.	332, 8431	—0, 0147
16. 14.	min.	332, 8284	+0, 1094
21. 39.	mass.	332, 9378	—0, 4861 ,

ove per escursione del barometro intendiamo dinotare la differenza tra i successivi massimi e minimi.

33. Le altezze barometriche nella State e nel nostro clima hanno dunque un minimo a $5^h\,\frac{1}{2}$, un massimo ad $1^h\,\frac{1}{2}$ dopo mezza notte, un minimo a 4^h del mattino ed un massimo a $9^h\,\frac{1}{2}$; queste per ciò sarebbero le ore più favorevoli per le osservazioni del barometro, quando non si avesse altro in mira che di determinare il valore di cotesti massimi e minimi; ma sarebbero all' opposto le meno vantaggiose quando si volessero riconoscere le ore in cui le massime e le minime altezze hanno luogo precisamente. Laonde chi volesse conoscere e l' una e l' altra circostanza di questo singolare fenomeno o dovrà osservare otto volte al giorno, cioè vicino al tempo in cui le ineguaglianze sono successivamente massime positive, nulle e massime negative, oppure (ciò che riuscirà sempre più comodo, e più regolare) potrà osservare, come noi abbiamo fatto, ad intervalli uniformemente distribuiti nel corso della giornata per poi cavarne fuori col calcolo il valore delle costanti che rappresentano le leggi delle giornaliere variazioni del barometro.

34. Dall' esame che abbiamo sin quì istituito siamo condotti a conchiudere che a torto alcuni Fisici Francesi, volendo prescrivere agli osservatori le ore più opportune in cui notare le altezze del barometro, asserirono che per averne la quantità media bastava istituire le osservazioni in due tempi della giornata, in uno de' quali avesse luogo un massimo e nell' altra un minimo. Essi non avvertirono che in una funzione composta di più termini variabili non basta prendere la semisomma d' uno de' suoi massimi e d' uno de' suoi minimi per avere la parte costante della funzione medesima. Per esempio nel caso delle osservazioni estive di Milano, delle quali abbiam trovata l' espressione generale, si ha

il massimo antemeridiano a $21^h.39'$ = 332, 9378
il minimo pomeridiano a 5. 39 = 332, 4517
semisomma 332, 6947

mentre il vero termine costante è 332, 7442.

35. Un'altra circostanza che conveniva aver presente prima di stabilire una norma generale per le osservazioni barometriche si è quella, già avvertita dal Chiminello, che le ore delle massime e delle minime altezze non sono le medesime in tutti i tempi dell'anno. Per esaminare il fenomeno anche sotto questo aspetto, ho voluto ripetere le osservazioni orarie nelle vicinanze dello scorso solstizio jemale. Siccome nell'accennata stagione sarebbe riuscita un' opera oltre modo faticosa l'osservare ad ogni due ore sì di giorno che di notte gli stromenti meteorologici, ho procurato di supplire alle osservazioni successive nel modo seguente. Avendo stabilito di continuare le osservazioni per 40 giorni, ho diviso questo intervallo di tempo in quattro decine. Nella prima e terza decina furono esse istituite a 0, 4, 8, 12, 16, 20 ore contate dal mezzodì, e nella seconda e quarta a 0, 2, 6, 10, 14, 18, 22 ore. I medii delle osservazioni nelle ore diverse hanno dato

Altezze barometriche osservate dal dì 1 Dicembre 1826. al 12. Gennajo 1827.

Prima e terza decina

Ore	Barom. $=p''$	Term. $=t$	Barom. ridotto
0	333, 1155	8, 185	332, 4526
4	332, 9695	7, 985	332, 3231
8	333, 0110	7, 680	332, 3892
12	332, 9650	7, 435	332, 3629
16	332, 9130	7, 180	332, 3317
20	333, 1215	7, 075	332, 5483

Seconda e quarta decina

Ore	Barom. $=p''$	Term. $=t$	Barom. ridotto
0	331, 9528	7, 676	331, 3332
2	331, 7085	7, 776	331, 0812
6	331, 6243	7, 314	331, 0344
10	331, 6814	7, 290	331, 0933
14	331, 5886	7, 110	331, 0150
18	331, 5790	6, 867	331, 0252
22	331, 8871	7, 457	331, 2852

36. Le osservazioni fatte in diverse serie di giorni non sono immediatamente comparabili tra di loro, contenendo esse una quantità costante diversa e dipendente dalle oscillazioni

irregolari dell' atmosfera. Per ridurle all' uniformità convien conoscere la differenza delle due quantità costanti; ad ottenere la quale prenderemo nelle due precedenti tabelle il medio aritmetico delle osservazioni fatte di 4 in 4 ore. Sappiamo infatti che in questi medii si distruggono necessariamente tutte le ineguaglianze che possono essere espresse dai seni e coseni di archi aliquoti della circonferenza. Avremo in tal modo chiamando β°, β'', β'^{v}, ecc. le altezze ridotte della prima serie, e $\beta_{\prime}$, $\beta_{\prime\prime\prime}$, β_{v}, ecc. quelle della seconda

nella prima serie $\frac{1}{6}(\beta^{\circ}+\beta''+\beta'^{v}+\beta^{v'}+\beta^{v'''}+\beta^{x})=332,4013$

nella seconda $\frac{1}{6}(\beta_{\prime}+\beta_{\prime\prime\prime}+\beta_{v}+\beta_{v''}+\beta_{ix}+\beta_{xi})=331,0891.$

La semidifferenza dei due medii è $=0,6561$ che aggiungeremo ai numeri della prima serie e sottrarremo da quelli della seconda onde avere i valori definitivi delle altezze b; e poichè in tal modo si ottengono due valori, tra loro poco diversi, di b°, assumeremo il medio frai due; saranno dunque i valori di b da adoperarsi nel calcolo.

$H = 0^{h}$	$b^{\circ} = 331,8929$
2	$b' = 331,7373$
4	$b'' = 331,6670$
6	$b''' = 331,6905$
8	$b'^{v} = 331,7331$
10	$b^{v} = 331,7494$
12	$b^{v'} = 331,7068$
14	$b^{v''} = 331,6711$
16	$b^{v'''} = 331,6756$
18	$b^{ix} = 331,6813$
20	$b^{x} = 331,8922$
22	$b^{xi} = 331,9413$

37. Operando come al n.° 28 si trova

$$\Sigma b\sin.\ h = -\tfrac{1}{2}.0{,}1257 - \tfrac{\sqrt{3}}{2}.0{,}1677 + 0{,}0092 = -0{,}1988$$

$$\Sigma b\cos.\ h = -\tfrac{1}{2}\ 0{,}1505 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\ 0{,}2581 + 0{,}1861 = +0{,}3344$$

$$\Sigma b\sin.2h = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\ 0{,}5650 \qquad = -0{,}2825$$

$$\Sigma b\cos.2h = +0{,}2279 + \tfrac{1}{2}\ 0{,}1312 \qquad = +0{,}2935$$

e quindi

$$\begin{aligned} b = {} & 331{,}7532 - 0{,}0331\sin.h + 0{,}0557\cos.h \\ & - 0{,}0471\sin.2h + 0{,}0489\cos.2h. \end{aligned}$$

38. Questa formola paragonata colle osservazioni dà le differenze seguenti

h	valore di b		differenza	h	valore di b		differenza
0°	331,8578	331,8929	+0,0351	180°	331,7464	331,7069	−0,0395
30	331,7686	331,7373	−0,0313	210	331,7050	331,6711	−0,0341
60	331,6871	331,6670	−0,0201	240	331,6887	331,6756	−0,0131
90	331,6712	331,6905	+0,0193	270	331,7374	331,6813	−0,0561
120	331,7129	331,7331	+0,0202	300	331,8261	331,8922	+0,0661
150	331,7536	331,7494	−0,0042	330	331,8834	331,9413	+0,0579

Riducendo poi ad un solo i termini che contengono il seno ed il coseno del medesimo angolo, e moltiplicando i coefficienti per $\frac{36}{35}$ si avrà il valore definitivo di b nel solstizio jemale

$$\begin{aligned} b = {} & 331{,}7532 + 0{,}0667\sin.(120°.44' + h) \\ & + 0{,}0698\sin.(133°.54' + 2h) \end{aligned}$$

mentre nel solstizio estivo s'era trovato

$$\begin{aligned} b = {} & 332{,}7442 + 0{,}1982\sin.(174.44 + h) \\ & + 0{,}0993\sin.(111.15 + 2h). \end{aligned}$$

Nel paragone di queste due formole non deve farsi alcuna attenzione alla diversità d'una linea che s'incontra sul termine costante, la quale diversità può dipendere da molte cause accidentali e specialmente dalla situazione dell' indice del galleggiante che per le ragioni già esposte non ci siamo curati di ricondurre ad ogni volta al punto di coincidenza. Ma ciò che merita d'essere considerato è la differenza che si scorge tanto sui coefficienti delle due ineguaglianze, quanto sugli angoli costanti che entrano nei loro argomenti; questa differenza influisce notabilmente sull'ore dei massimi, e dei minimi e sulle escursioni del barometro.

39. Per trovare i massimi e i minimi delle altezze barometriche in tempo d'inverno avremo a risolvere l' equazione

$$+0{,}0667\cos.(120^\circ.44'+h)+0{,}1396\cos.(133^\circ.54'+h)=0.$$

Con alcuni tentativi si trova che i valori approssimati delle radici di quest' equazione sono

$$h'=80^\circ,\ h'=160^\circ,\ h'=235^\circ,\ h'=335^\circ.$$

Sia anche quì $h=h'+\theta$, e l'equazione da risolversi sia espressa generalmente da

$$p\cos.(m+h'+\theta)+q\cos.(n+2h'+2\theta)=0,$$

si avrà svolgendo e trascurando le quantità di second'ordine

$$p\cos.(m+h')+q\cos.(n+2h')$$
$$-\theta[p\sin.(m+h')+2q\sin.(n+2h')]=0$$

e quindi $\theta=\frac{p\cos.(m+h')+q\cos.(n+2h')}{p\sin.(m+h')+2q\sin.(n+2h')}$.

Sostituendo i numeri si ottiene:

Nella stagione jemale

valori di h	ore dei massimi e dei minimi		altezze massime e minime	escursioni del barometro
81°.10'	$5^h.25'$	minimo	331,6672	+ 0,0902
160. 47	10. 43	massimo	331,7574	— 0,0720
233. 51	15. 35	minimo	331,6854	+ 0,2037
336. 21	22. 25	massimo	331,8891	—0,2209.

40. Paragonando questi tempi con quelli del n.° 32. vedremo subito che non solo le ore de' minimi, come già avvertì il Chiminello, ma anche quelle de' massimi sono soggette ad una notabile variazione. Le escursioni poi del barometro sono anch' esse molto diverse, cioè la prima e l' ultima della giornata notabilmente maggiori in estate e le due intermedie maggiori in inverno. Ma invece d'arrestarci al paragone degli effetti composti potremo trovare maggiori lumi sulla natura del fenomeno confrontando separatamente i termini esprimenti l' oscillazione dinamica.

Per rendere poi più chiaro l'esame che siamo per intraprendere abbiamo delineato nell'unita figura, ed in una scala cento volte maggiore del vero, la curva rappresentata dalle diverse formule che abbiamo ritrovate.

41. Nelle figure 1.ª e 2.ª la linea punteggiata rappresenta l'oscillazione fisica ossia il termine

$\overset{\text{lin.}}{19,}\ 82\ \mathrm{sin.}(174°44'+h)$ pel solstizio estivo, fig. 1.ª;

ed il termine

$16,\ 67\ \mathrm{sin.}(120.\ 44+h)$ pel solstizio jemale, fig. 2.ª;

ov'è da avvertirsi che sull'asse delle ascisse ogni linea del piede di Parigi corrisponde a 5°, o a 20' di tempo, e sull'asse delle ordinate corrisponde ad un centesimo di linea. La linea segnata a piccoli tratti rappresenta nelle due figure l' oscillazione dinamica cioè nella 1.ª il termine $9{,}93\mathrm{sin.}(111°.15'+2h)$ e nella 2.ª il termine $6,\ 98\ \mathrm{sin.}\ (\ 133°.54'\ +2h\ )$. Finalmente la linea continua esprime l' oscillazione totale, ed è costrutta con questa legge che le sue ordinate sono sempre la somma delle ordinate corrispondenti delle altre due curve.

42. Dalla semplice ispezione di queste due figure facilmente apparisce che l' oscillazione dinamica e semidiurna segue un andamento poco diverso nelle due stagioni; ciò che rilevasi ancora dalla formula analitica che la esprime. Nè forse si anderebbe lungi dal vero col supporre che la diversità, la quale sul coefficiente non arriva a tre centesimi di linea,

provenisse unicamente dalle incertezze che possono rimanere sui medii delle altezze osservate. Se così fosse, continuando poi molti anni questo genere di osservazioni si dovrebbe trovare il coefficiente estivo ora maggiore ed ora minore dell'altro, ed allora si potrebbe assumere come valor comune il medio fra tutte le determinazioni.

Ma questa supposizione non può in alcun modo aver luogo nella oscillazione fisica, la quale è quasi tre volte più grande nell'estate che nell'inverno. Nè si durerà fatica a render ragione di questa notabile disparità, sol che si rifletta che anche le variazioni della temperatura dell'aria sono assai maggiori nell'estate che nell'inverno. Questa coincidenza dei due fenomeni rende adunque assai probabile l'ipotesi che abbiamo fatta; che una porzione delle variazioni orarie del barometro sia prodotta dall'azione del calore del Sole sull'atmosfera.

43. Per venire a qualche paragone più immediato fra la causa ed il supposto effetto gioverà esprimere con una formula analitica le temperature medie dell'aria esterna, che sono state osservate ne' medesimi giorni in cui si sono fatte le osservazioni del barometro. Egli è ben vero che ad istituire un compiuto esame del fenomeno converrebbe conoscere le vicissitudini diurne del calore non solo alla superficie della terra, ma ne' diversi strati dell'atmosfera fin dove questa conserva una sensibile densità; ma poichè questi dati ci mancano, ci basterà riscontrare fra l'espressione dell'oscillazione fisica del barometro e quella della temperatura dell'aria nelle diverse ore del giorno una qualche, ancorchè imperfetta corrispondenza.

44. Le osservazioni orarie della temperatura dell'aria esterna fatte nella state dell'anno scorso non furono continuate che per 12 giorni dal dì 15 al dì 26 di Luglio, e corrispondono prossimamente al tempo dell'anno in cui suole aver luogo il massimo calore: il termometro si teneva esposto durante la notte ad una finestra verso mezzodì in luogo

interamente libero ed aperto, e durante il giorno si trasferiva ad una finestra verso tramontana che corrisponde a un cortile chiuso da ogni lato. Il medio delle dodici osservazioni ha dato

ore		term. Réaum.	ore		term. Réaum.
0	t°	+20,38	12	$t^{v'}$	+16,70
2	t'	21,49	14	$t^{v''}$	16,11
4	t''	21,67	16	$t^{v'''}$	15,65
6	t'''	20,47	18	t^{IX}	16,11
8	$t^{\prime v}$	18,81	20	t^{X}	17,78
10	t^{v}	17,54	22	t^{XI}	19,62 .

45. Cominciamo dal supporre che l'altezza del termometro corrispondente all'ora H sia rappresentata dalla formula

$$t = x + y\sin.h + y'\cos.h \qquad \text{posto } h = 15^{\circ}.\text{H},$$

si avranno dodici equazioni a risolvere, cioè

$$\begin{aligned} x + y\sin.0^{\circ} &+ y'\cos.0 &= t^{\circ} \\ x + y\sin.30 &+ y'\cos.30 &= t' \\ &\vdots& \\ x + y\sin.330 &+ y'\cos.330 &= t^{\text{XI}}, \end{aligned}$$

le quali col metodo de' minimi quadrati si riducono alle tre

$$12x = \Sigma t$$

$$6y = (t''' - t^{\text{IX}}) + \frac{1}{2}(t' + t^{v} - t^{v''} - t^{\text{XI}}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(t'' + t^{\prime v} - t^{v'''} - t^{\text{X}})$$

$$6y' = (t^{\circ} - t^{v'}) + \frac{1}{2}(t' - t^{\prime v} - t^{v''} + t^{\text{X}}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(t' - t^{v} - t^{v''} + t^{\text{XI}})$$

ossia

$$12x = 222,33$$

$$6y = +4,36 + \frac{1}{2}.\ 3,29 + \frac{\sqrt{3}}{2}.7,05 = 12,11$$

$$6y' = +3,68 + \frac{1}{2}\cdot 4,99 + \frac{\sqrt{3}}{2}.7,46 = 12,63$$

e quindi

$$t = 18{,}527 + 2{,}018\sin.h + 2{,}105\cos.h.$$

46. Per vedere se i due termini introdotti nella formula bastano a rappresentare le variazioni diurne del calore ho paragonato la formula stessa coll' osservazione ed ho avuto

H	valore di t calcolato	valore di t osservato	differenza
0	21, 54	20, 38	—0, 16
2	21, 36	21, 49	+0, 13
4	21, 28	21, 67	+0, 39
6	20, 54	20, 47	—0, 07
8	19, 27	18, 81	—0, 46
10	17, 71	17, 54	—0, 17
12	16, 51	16, 70	+0, 19
14	15, 70	16, 11	+0, 41
16	15, 81	15, 65	—0, 16
18	16, 51	16, 11	—0, 40
20	17, 79	17, 78	—0, 01
22	19, 34	19, 62	+0, 28

47. Poichè le differenze cambiano sei volte di segno si vede che per avvicinarci maggiormente alle osservazioni gioverà aggiungere alla formula stabilita due altri termini dipendenti dall'angolo $3h$, cioè $+\xi\sin.3h + \xi'\cos.3h$. Questi termini introdotti nelle equazioni danno subito

$$6\xi = t^{\prime} - t^{\prime\prime\prime} + t^{v} - t^{v\prime\prime} + t^{\mathrm{IX}} - t^{\mathrm{XI}} = -1{,}12$$

$$6\xi' = t^{\circ} - t^{\prime\prime} + t^{\prime v} - t^{v\prime} + t^{v\prime\prime\prime} - t^{x} = -1{,}31.$$

Applicando ai valori calcolati la correzione proveniente da questi due termini la somma dei quadrati degli errori risulta soltanto di 0,4216; mentre nella prima la somma medesima arrivava a 0,8878; si ha dunque motivo di credere che non sia affatto superflua l'aggiunta dei due piccolissimi termini dipendenti da $3h$.

48. I termini dipendenti dal doppio dell' angolo orario risultano ancora più piccoli, ma per una singolarità, alla quale è difficile assegnare una causa, essi riescono assai considerabili (come vedremo fra poco) nell'espressione delle temperature nella stagione invernale. Per conservare una certa

analogia aggiungeremo anche quì i due termini

$$z\,\mathrm{sin.}\,2h + z'\mathrm{cos.}\,2h\,,$$

i quali per mezzo delle formole del n.° 27. risultano

$$+\,0{,}169\,\mathrm{sin.}\,2h + 0{,}154\,\mathrm{cos.}\,2h.$$

Il valor totale di t sarà dunque

$$\begin{aligned} t = 18{,}527 &+ 2{,}018\mathrm{sin.}h + 0{,}169\mathrm{sin.}2h - 0{,}187\mathrm{sin.}3h \\ &+ 2{,}105\mathrm{cos.}h + 0{,}154\mathrm{cos.}2h - 0{,}218\mathrm{cos.}3h \end{aligned}$$

oppure

$$\begin{aligned} t = 18{,}527 &+ 2{,}916\mathrm{sin.}(46^\circ.12' + h) \\ &+ 0{,}216\mathrm{sin.}(38.\ 28 + 2h) \\ &- 0{,}287\mathrm{sin.}(49.\ 23 + 3h). \end{aligned}$$

Questa formula paragonata coll'osservazione dà

h	valore di t		differenza	h	valore di t		differenza
	calcolato	osservato			calcolato	osservato	
0°	20, 58	20, 38	—0, 20	180°	16, 81	16, 70	—0, 11
30	21, 40	21, 49	+0, 09	210	16, 11	16, 11	—0, 00
60	21, 61	21, 67	+0, 06	240	15, 57	15, 65	+0, 08
90	20, 56	20, 47	—0, 09	270	16, 15	16, 11	—0, 04
120	18, 77	18, 81	+0, 04	300	17, 82	17, 78	—0, 04
150	17, 46	17, 54	+0, 08	330	19, 47	19, 62	+0, 15

ove la somma dei quadrati degli errori non è più che di 0, 1072.

49. Più numerose furono le osservazioni termometriche, fatte nella stagione jemale, le quali del pari che le barometriche sono state ripetute in ore diverse nelle quattro decine di giorni. Combinando le quantità medie nel modo esposto al n.° 36. si ottenne

Prima e terza decina	
ore	termom.
0	+4,615
4	+4,345
8	+3,440
12	+2,325
16	+1,560
20	+1,850

Seconda e quarta decina	
ore	termom.
0	+4,771
2	+5,062
6	+3,967
10	+3,176
14	+2,671
18	+2,043
22	+3,810

ore		medj adottati termom.
0	t^{0}	+4,693
2	t'	+4,846
4	t''	+4,561
6	t'''	+3,751
8	t^{iv}	+3,656
10	t^{v}	+2,960
12	t^{v}	+2,541
14	$t^{v''}$	+2,455
16	$t^{v'''}$	+1,776
18	t^{ix}	+1,827
20	t^{x}	+2,066
22	t^{xi}	+3,594.

Da queste osservazioni si deduce

$$12x = 38,726$$

$$6y = +1,924 + \frac{1}{2}.1,757 + \frac{\sqrt{3}}{2}.4,375 = 6,591$$

$$6y' = +2,154 + \frac{1}{2}.1,195 + \frac{\sqrt{3}}{2}.3,025 = 5,371$$

$$6z = +\frac{\sqrt{3}}{2}.1,362 = 1,180$$

$$6z' = +1,656 + \frac{1}{2}.1,796 = 2,554$$

$$6\xi = -0,167$$

$$6\xi' = +0,957$$

e quindi

$$t = 3,227 + 1,098.\sin.h + 0,197.\sin.2h - 0,028\sin.3h$$
$$+ 0,895\cos.h + 0,426.\cos.2h + 0,160\cos.3h$$

ossia $t = 3,227 + 1,417\sin.(39^{\circ}.11' + h)$
$+ 0,469\sin.(65.13 + 2h)$
$+ 0,162\sin.(99.53 + 3h)$

e confrontando il calcolo coll' osservazione si trova

h							
0°	+4, 708	+4, 693	—0, 015	180°	+2, 596	+2, 541	—0, 057
30	+4, 906	+4, 846	—0, 060	210	+2, 312	+2, 455	+0, 143
60	+4, 422	+4, 561	+0, 139	240	+1, 946	+1, 776	—0, 170
90	+3, 927	+3, 751	—0, 176	270	+1, 675	+1, 827	+0, 152
120	+3, 508	+3, 656	+0, 148	300	+2, 180	+2, 066	—0, 114
150	+3, 016	+2, 960	—0, 056	330	+3, 524	+3, 594	+0, 170.

49. Cercando colla formula precedente e con quella del n.° 47. le ore dei massimi e dei minimi del calore si trova

nell' estate massimo calore a	$3^h.22'$	+ 21,661	escursione
			6,090
minimo	16 4	+ 15,571	
nell'inverno massimo calore	1. 21	+ 4,952	
			3,277
minimo	17. 58	+ 1,675.	

Queste determinazioni bastano all' uopo nostro per indagare le corrispondenze che possono aver luogo fralle variazioni del calore e le oscillazioni dell' atmosfera, del resto poi se si volesse stabilire con grande esattezza la legge delle variazioni diurne della temperatura converrebbe che le osservazioni fossero in maggior numero e fatte con quelle precauzioni che sono necessarie a diminuire l'influenza delle cause locali e specialmente quella dei riflessi calorifici provenienti dai corpi circostanti.

50. Possiamo ora porre a confronto il termine esprimente l'oscillazione dell' atmosfera nelle due opposte stagioni, coll' espressione della variazione oraria del termometro, e le ore rispettive del massimo e del minimo, affine di vedere se fra questi diversi elementi sussista una qualche relazione.

Riunendo i risultati ottenuti precedentemente abbiamo

		estate	inverno
oscillazione fisica del barom.		$+0,1982\sin.(174^\circ.44'+h)$	$+0,0667\sin.(120^\circ.44'+h)$
	ora del mass.	$18^h.21'$	$21^h.57'$
	ora del min.	6. 21	9. 57
	escursione	0, 3964	0, 1334
variaz. del ter.		$+2,916\sin.(46^\circ.12'+h)+$ecc.	$+1,417\sin.(39^\circ.11'+h)+$ec.
	ora del mass.	$3^h.22'$.	$1^h.21'$
	ora del min.	16. 4	17. 58
	escursione	6, 090	3, 277.

Il coefficiente dell' oscillazione fisica del pari che quello della variazione termometrica riescono maggiori nella state che nell'inverno: nel primo fenomeno il rapporto de' coefficienti jemale ed estivo è di 1:3; nel secondo di 1:2 e poco più. Le ore dei massimi dell' oscillazione atmosferica sembrano corrispondere a quelle dei minimi del calore, rimanendo però sempre in ritardo di alcune ore. Questo ritardo che è importante di considerare risulta

	nell'estate	nell' inverno
ritardo del massimo atmosferico sul minimo termometrico	$2.^h17'$	$3^h.24'$
ritardo del minimo atmosferico sul massimo termometrico	2. 59	8. 36.

51. Le variazioni orarie dell' umidità dell' aria vanno soggette a maggiori irregolarità: sì perchè su di esse influiscono maggiormente le circostanze locali ed i fenomeni atmosferici che hanno luogo alla superficie della terra, quanto perchè i gradi dell' igrometro, che sono indicati dai nostri stromenti, sono una funzione composta dell' umidità dell'aria e della disposizione di essa a contenere in maggior o minore

copia i vapori. Ciò nulla ostante avendo raccolti i medii d'un discreto numero d'osservazioni dell'igrometro fatte nelle diverse ore del giorno, ho veduto che con qualche precisione si potevano anch'esse rappresentare per mezzo d'una funzione del seno e del coseno dell'angolo orario.

Poichè quest'espressione si ottiene colle medesime formule e coi medesimi processi esposti precedentemente, ci basterà riferire i medii delle osservazioni igrometriche ed il confronto colla formula che da essi è stata dedotta. Le osservazioni di cui si tratta sono fatte con un igrometro a capello recentemente costrutto a Ginevra, il quale, come si è già detto del termometro, si esponeva nelle ore della notte ad una finestra verso mezzodì e nelle ore del giorno ad un'altra verso settentrione.

52. Chiamando i il grado dell'igrometro corrispondente all'angolo orario h, si è trovato

verso il solstizio estivo

$$i = 83{,}3 - 0{,}60 \sin. h - 5{,}53 \cos. h = 83{,}3 + 8{,}53 \sin. (220^\circ + h)$$

verso il solstizio jemale

$$i = 89{,}4 - 5{,}62 \sin. h - 1{,}16 \cos. h = 89{,}4 + 1{,}83 \sin. (219^\circ + h).$$

ore	grado dell' igrometro		differenza	grado dell' igrometro		differenza
	calco.	osser.		calco.	osser.	
0	77,8	77,7	− 0,1	88,2	87,9	− 0,3
2	75,3	74,1	− 1,2	87,7	87,1	− 0,6
4	74,9	72,5	− 2,4	87,6	88,1	+ 0,5
6	76,8	77,3	+ 0,5	88,0	88,6	+ 0,6
8	80,4	82,6	+ 2,2	88,7	88,0	− 0,7
10	84,8	86,0	+ 1,2	89,7	90,5	+ 0,8
12	88,8	87,7	− 1,1	90,6	90,1	− 0,5
14	91,3	89,3	− 2,0	91,1	90,6	− 0,5
16	91,7	91,9	+ 0,2	91,2	91,6	+ 0,4
18	89,8	90,8	+ 1,0	90,8	90,6	− 0,2
20	86,2	86,3	+ 0,1	90,1	91,0	+ 0,9
22	81,8	83,3	+ 1,5	89,1	88,8	− 0,3

Il coefficiente della variazione è nella State quattro volte e mezzo maggiore che nell' inverno: ma i massimi e minimi cadono quasi precisamente nelle medesime ore cioè

massima umidità a $15^h \frac{1}{4}$

minima a $3 \frac{1}{4}$.

Le ore indicate dei massimi e minimi igrometrici riceverebbero forse qualche notabile mutazione, se nella formula che gli esprime s' introducessero i termini dipendenti dal doppio e dal triplo dell' angolo orario: ma questo genere d'istromenti è ancora troppo imperfetto per potervi applicare con qualche vantaggio una serie composta d' un maggior numero di termini oltre i primi già computati.

53. Fin quì abbiamo considerati i fenomeni atmosferici osservati in un sol punto del globo; resterebbe ora a vedersi quali mutazioni possono essi subire non solo nelle diverse latitudini, ma ben anche sotto lo stesso parallelo, in differenti costituzioni del suolo. Noi sappiamo infatti che l' ampiezza delle maree dipende anch' essa moltissimo dalla configurazione delle coste; onde avviene che le elevazioni delle acque sono assai piccole presso le isole del mar Pacifico; ed all' opposto assai considerevoli sulle coste d' Europa bagnate dal mar Atlantico. Per esplorare le variazioni delle maree atmosferiche converrebbe avere un buon numero d'osservazioni barometriche fatte regolarmente in diversi punti del globo, e convenientemente distribuite nelle diverse ore sì del giorno che della notte. Ma quì dobbiamo confessare che nel gran numero d' osservazioni meteorologiche che si fanno in varj luoghi, pochissime sono quelle che riuniscono le condizioni richieste onde potervi applicare i metodi di calcolo che abbiamo sin quì spiegato. Divengono perciò pregievolissime quelle continuate pel corso d' un intero anno dal diligentissimo Chiminello, delle quali egli ha pubblicate le quantità medie corrispondenti a ciascun ora, ed alle diverse sta-

gioni dell' anno, e che si trovano nel volume sopra citato dei Saggi dell'Accademia di Padova.

54. Esaminiamo prima di tutto le osservazioni estive fatte nel 1778 e registrate nella tabella annessa all' accennata Memoria sotto la lettera C. Le altezze barometriche essendo, come pare, di già corrette dalla dilatazione del mercurio, non hanno bisogno di altra riduzione fuorchè di quella delle parti 160^{me} di linea in frazioni decimali. Fatta questa riduzione si ha

ore		valore di b	ore		valore di b
0	b^{o}	334, 1062	12	$b^{v'}$	333, 9687
2	b'	333, 9687	14	$b^{v''}$	333, 9750
4	b''	333, 8125	16	$b^{v'''}$	333, 9375
6	b'''	333, 7250	18	b^{IX}	334, 0125
8	$b^{\prime v}$	333, 8250	20	b^{X}	334, 1375
10	b^{v}	333, 9500	22	b^{XI}	334, 1812.

Applicando a questa serie d'osservazioni le formole del n.° 27, troviamo

$$12x=4007,5998$$

$$\Sigma.b\sin.\ h=-\frac{1}{2}\times 0,2375-\frac{\sqrt{3}}{2}.\,0,4375-0,2875=-0,7851$$

$$\Sigma.b\cos.\ h=+\frac{1}{2}.\ \ 0,1875+\frac{\sqrt{3}}{2}.\,0,2249+0,1375=+0,4260$$

$$\Sigma.b\sin.2h=-\frac{\sqrt{3}}{2}.\ \ 0,4000 \qquad =-0,3464$$

$$\Sigma.b\cos.2h=+\frac{1}{2}.\ \ 0,3624 \qquad =+0,5186.$$

Avremo dunque

$$x=333,9666,\quad y=-0,1308,\quad y'=+0,0710$$
$$z=-0,0577,\quad z'=+0,0864$$

E di quì deriva l'espressione cercata

$$b = 333{,}9666 + 0{,}1488 \sin.(151.^\circ 31' + h)$$
$$+ 0{,}1039 \sin.(123.^\circ 44' + 2h)$$

la quale paragonata colle immediate osservazioni dà

h	valore di b		diffe-renza	h	valore di b		diffe-renza
	calcolato	osservato			calcolato	osservato	
0°	334,1240	334,1062	—0,0178	180°	333,9820	333,9687	—0,0133
30	333,9559	333,9687	+0,0128	210	333,9637	333,9750	+0,0113
60	333,7956	333,8125	+0,0169	240	333,9512	333,9375	—0,0137
90	333,7494	333,7250	—0,0244	270	334,0110	334,0125	+0,0015
120	333,8246	333,8250	+0,0004	300	334,1222	334,1375	+0,0153
150	333,9329	333,9500	+0,0171	330	334,1867	334,1812	—0,0055

Quì l'accordo è maraviglioso, e deve certamente attribuirsi alla scrupolosa esattezza che il Chiminello ha messo nel fare le sue osservazioni, e che io non ho saputo imitare. Intanto l'esito di questo confronto cospira a dimostrare che la separazione delle due ineguaglianze esiste realmente in natura, e si rende tanto più manifesta quanto più le quantità osservate riescono indipendenti dalle alterazioni accidentali.

55. Applicheremo le stesse formule alle osservazioni jemali di Padova, le quali, da quanto oscuramente si accenna nella Memoria del Chiminello, pare che risultino dal medio delle osservazioni dal 1.^{mo} Gennajo al 6 Febbrajo del 1778 e dal 10 Ottobre al 22 Dicembre dello stesso anno. Ridotte le parti 160^{me} di linea in decimali questi medii danno ciò che segue.

ore		valore di b	ore		valore di b
0	b^{0}	337,1250	12	b^{vi}	337,2312
2	b'	336,8937	14	b^{vii}	337,0000
4	b''	336,9250	16	b^{viii}	336,9375
6	b'''	337,0250	18	b^{ix}	336,9187
8	b^{iv}	337,1625	20	b^{x}	337,0125
10	b^{v}	337,2687	22	b^{xi}	337,2125

$$12.x = 4044{,}7123$$

$$\Sigma.\, b \sin.\ h = -\tfrac{1}{2}.\,0{,}0501 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}.0{,}1375 + 0{,}1063 = +\,0{,}2004$$

$$\Sigma.\, b \cos.\ h = -\tfrac{1}{2}.\,0{,}1625 - \tfrac{\sqrt{3}}{2}.\,0{,}1625 - 0{,}1063 = -\,0{,}3282$$

$$\Sigma.\, b \sin.\, 2h = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}.\,0{,}9000 = -\,0{,}7794$$

$$\Sigma.\, b \cos.2h = +\tfrac{1}{2}.\,0{,}3374 + 0{,}4125 = +\,0{,}5812$$

e quindi

$$b = 337{,}0594 + 0{,}0334 \sin.h - 0{,}0547 \cos.h - 0{,}1299 \sin.2h$$
$$+\,0{,}0969.\cos.2h. = 337{,}0594 + 0{,}0641 \sin.(301.^\circ 24' + h)$$
$$+\,0{,}1621.\sin.(143^\circ.57' + 2h).$$

Paragonando ora il calcolo coll'osservazione abbiamo

h	valore di b		differenza	h	valore di b		differenza
	calcolato	osservato			calcolato	osservato	
0°	337,1016	337,1250	+0,0234	180°	337,2110	337,2315	+0,0202
30	336,9646	336,8937	—0,0709	210	337,0260	337,0000	—0,0260
60	336,9000	336,9250	+0,0250	240	336,8970	336,9375	+0,0405
90	336,9959	337,0250	+0,0291	270	336,9291	336,9187	—0,0104
120	337,1798	337,1625	—0,0173	300	337,0671	337,0125	—0,0546
150	337,2844	337,2687	—0,0157	330	337,1562	337,2125	+0,0563

56. Le ore dei massimi e dei minimi che risultano dalle

osservazioni di Padova sono alquanto differenti da quelle che abbiamo trovate per Milano; infatti differenziando le espressioni di b che abbiamo ultimamente ottenute si ha

nell'estate

$$+0{,}1488\cos.(151.^\circ 31' + h) + 0{,}2078\cos.(123.^\circ 44' + 2h) = 0$$

nell' inverno

$$+0{,}0641\cos.(301.\ 24 + h) + 0{,}3242\cos.(143.\ 37 + 2h) = 0$$

le quali risolute danno

nell' estate

valori di h	ore dei massimi e dei minimi		altezze massime e minime	escursioni
84°.32′	5^h.38′	minimo	333,7475	+ 0,2346
183. 17	12. 13	massimo	333,9811	— 0,0334
232. 42	17. 31	minimo	333,9487	+ 0,2384
331. 39	22. 7	massimo	334,1871	— 0,4396

nell' inverno

valori di h	ore dei massimi e dei minimi		altezze massime e minime	escursioni
57. 39	3. 51	minimo	336,8892	+ 0,3954
152. 56	10. 12	massimo	337,2853	—0, 3964
248. 58	16. 36	minimo	336,8889	+0, 2687
333. 53	22. 15	massimo	337,1576	—0,2677.

57. Le formule dedotte dalle osservazioni di Padova confermano dunque pienamente le conclusioni che avevamo dedotte dalle nostre cioè 1.^mo Che le oscillazioni diurne atmosferiche sono composte di due parti l'una dipendente dall'angolo orario, l'altra dal doppio dello stesso angolo; 2.^do che il coefficiente della prima parte cioè dell' oscillazione procedente dalle vicissitudini del calore, è due o tre volte maggiore nell'estate che nell' inverno; 3.^zo che la varietà è assai più piccola sul coefficiente della seconda parte proveniente dall'atrrazione solare; 4.^to che le ore dei massimi e dei minimi non so-

no le stesse nella stagione estiva e nella jemale; osservandosi che il massimo della sera e i due minimi vengono più presto in inverno che in estate, mentre il massimo della mattina viene alquanto più tardi. Ma acciò queste nostre conclusioni appariscano più chiaramente riuniremo in un sol prospetto il risultato de' calcoli precedenti, e lasciando anche quì da parte il paragone del termine costante del valore di *b*, il quale trattandosi di osservazioni istituite in luoghi diversi e con diversi stromenti deve dipendere non solo dagli elementi accennati al numero 38, ma ancora dalla grossezza della canna, dalla maggiore o minor purezza del mercurio e dalla diversa elevazione del luogo di osservazione sul livello del mare

		Milano		Padova	
		estate	inverno	estate	inverno
Flusso fisico	coefficiente	+0, 1982	+0, 0667	+0, 1488	+0, 0641
	costante dell'argomento	174°.44'	120°.44'	151°. 31'	301°. 24'
Flusso dinam.	coefficiente	+0, 0993	+0, 0698	+0, 1039	+0, 1621
	costante dell'argomento	111°.15'	133°.54'	123°.44'	147°.17
minimo della sera		$5.^h\ 39'$	$5.^h\ 25'$	$5.^h\ 38'$	$3^h.\ 51'$
escursione		0,3914	0,0902	0,2346	0,3954
massimo della notte		$13.^h\ 38'$	$10.^h\ 43'$	$12.^h 13'$	$10.^h 12'$
escursione		0, 0147	0,0720	0, 0334	0, 3964
minimo della mattina . . .		$16^h.14'$	$15^h.35'$	$17.^h 31'$	$16^h.36'$
escursione		0, 1094	0, 2037	0, 2384	0, 2687
massimo della mattina . . .		$21.^h 39'$	$22^h.25'$	$22.^h 7'$	$22.^h 15'$
escursione		0, 4861	0, 2209	0, 4396	0,2677.

58. Ecco dunque che non solo in diverse stagioni, ma anche nella stagione medesima ed in luoghi poco fra di loro discosti, cambiansi notabilmente gli elementi tutti delle oscillazioni atmosferiche; la qual varietà sempre più ci conferma nella nostra opinione che i Fisici francesi si sono troppo af-

frettati nel voler prescrivere le ore in cui d'ora in avanti dovrebbe da tutti osservarsi il barometro. Essi hanno assunto come cognito e come costante ciò che era in realtà ed incognito e variabile, cioè il tempo al quale nei diversi punti del globo e nelle diverse stagioni corrispondono le massime e le minime altezze; ed hanno inoltre preso equivoco nel supporre che basti assumere la semisomma d' un massimo, e d' un minimo per avere il termine costante d' una funzione variabile.

È bensì vero che se nelle osservazioni estive di Padova si prendesse la semisomma del minimo della mattina, e del massimo della sera, si avrebbe, per una accidentale combinazione, un medio che pochissimo differirebbe dal termine costante dato dal calcolo fatto a rigore; ma questa combinazione non sussiste più nelle osservazioni jemali dalle quali risulta una differenza alquanto considerabile, siccome avevamo trovato colle nostre.

Infatti si ha nell' inverno a Padova.

massimo della mattina	337,1576
minimo della sera	336.8899
semisomma	337,0237
termine costante del valore di *b*	337,0594
differenza	0,0357.

59. Dopo aver indicati i punti intorno ai quali le osservazioni di Milano e di Padova si confermano reciprocamente, non ometteremo di notare alcune non lievi discordanze che rimangono da spiegarsi e che fanno desiderare di poter raccogliere e sottomettere ad esame un maggior numero di buone osservazioni.

In primo luogo avevamo già avvertito che il coefficiente dell' oscillazione dinamica per Milano è alquanto minore in estate che in inverno; ma che la differenza essendo tenuissima, vi era motivo di credere che dovesse attribuirsi alle piccole incertezze delle osservazioni. Ma ora vediamo che nelle osservazioni Padovane questa differenza risulta di segno contrario ed assai più considerabile, giacchè si ha nell'estate questo coefficiente = 0,1039 e nell' inverno = 0,1621. In secondo luogo incontriamo una differenza enorme, cioè di quasi 180°, sulla costante dell'argomento da cui dipende l'oscillazione fisica nell' inverno dedotta dalle osservazioni di Padova; la qual differenza equivale ad un passaggio del coefficiente dal positivo al negativo. Infatti se si conviene di prendere le costanti di tutti gli argomenti nel primo o nel secondo quadrante, si avranno per le oscillazioni fisiche le seguenti espressioni.

Milano + 0,1982sin.(174.°44 + h), + 0,0667sin.(151°.31' + h)
Padova + 0. 1488sin.(151. 31 + h), − 0,0641sin.(121. 24 + h)

Queste essenziali discordanze ci fanno nascere qualche dubbio sull'esattezza dei metodi coi quali il Chiminello deve aver fatta la riduzione delle altezze barometriche ad una temperatura costante; intorno ai quali non si trova nella sua Memoria una soddisfacente spiegazione.

60. Può nascere oltre a ciò il sospetto che le differenze che si presentano negli istituiti paragoni, e che abbiamo attribuito alle circostanze locali ed alla diversità della posizione geografica, derivino, almeno in parte, dall' epoche assai discoste in cui le osservazioni sono state fatte; potendo benissimo accadere che siccome nei diversi anni sono varie le temperature, le direzioni dei venti dominanti ed altre simili circostanze dell' atmosfera, così vadano soggetti a notabili alterazioni gli elementi dai quali dipendono le oscillazioni dell' atmosfera medesima. Per separare per quanto è possibile nell' incredibile complicazione de' fenomeni della natura le cause diverse che abbiamo accennate, gioverebbe moltissimo che il paragone delle quantità medie osservate in diversi luoghi si facesse sopra osservazioni contemporanee e fatte con uniformità di metodi e di istromenti. Sebbene ci manchi una raccolta di altezze barometriche osservate, che pienamente soddisfacciano alle accennate condizioni, procureremo di trarre qualche profitto da una serie d'osservazioni meteorologiche

fatte nell' anno 1823 in molte parti d' Italia, delle quali per un fortunato incontro abbiamo avuto comunicazione.

61. Nel suddetto anno 1823 l'Accademia delle scienze di Berlino con lettere circolari dirette alla maggior parte degli Astronomi di Europa, gli eccitò ad intraprendere una serie d'osservazioni contemporanee del barometro e del termometro. Queste osservazioni dovevano essere continuate dal dì 18 di Giugno al 18 di Luglio ed essere ripetute di due in due ore dalle 8 della mattina alle 10 della sera inclusivamente. Noi ignoriamo lo scopo preciso d' un tale invito ed il motivo pel quale dagl'istanti prefissi alle osservazioni vennero escluse le ore della notte, ma tutto ciò verrà pienamente chiarito allorchè il Sig. Magg. Oersfeld, a cui fu affidato dall'Accademia suddetta l'incarico di discutere il complesso delle osservazioni raccolte, avrà pubblicato il frutto delle sue dotte ricerche. Nella sola Italia superiore si ebbero le osservazioni corrispondenti fatte in 7 diversi luoghi; cioè a Milano, a Pavia, a Torino, a Padova, a Modena, a Bologna ed a Firenze; e di tutte queste avendo io potuto conservar copia non volli ommettere di applicarle alla ricerca delle variazioni orarie del barometro. Egli è ben vero che la mancanza delle osservazioni notturne, rompendo la continuità, rende l' eliminazione più laboriosa e nel tempo stesso meno esatti i valori che dall' eliminazione si deducono; ma ciò nulla ostante non sarà senza qualche utilità il vedere che nessuna delle serie che sottoporremo al calcolo; si sottrae dalle leggi generali delle oscillazioni che avevamo dedotte dalle sole osservazioni di Padova e di Milano.

62. Poichè troppo spazio occuperebbe in questa Memoria l' esposizione di tutte le osservazioni originali, ci limiteremo a trascrivere i medii delle altezze del barometro e del termometro unito, corrispondenti alle diverse ore di osservazione. Avvertiremo soltanto che dalla somma totale si sono ommessi quei giorni nei quali la serie delle osservazioni era rimasta incompleta; di modo che i medii che quì si riferiscono

risultano alcuni da 25, alcuni da 27, altri da 28, da 29 o da 31 termini.

Altezze medie del barometro osservate dal 18 Giugno al 18 Luglio 1823.

Ore	Milano	Pavia	Torino	Padova	Modena	Bologna	Firenze
20	333,250	334,428	327,235	336,468	336,133	334,389	336,222
22	333,280	334,369	327.297	336,457	336,107	334,437	336,212
0	333,200	334,296	327,374	336,447	336,010	334,309	335,761
2	333,088	334,176	327,429	336,411	335,827	334,139	335,944
4	333,010	333,931	327,158	336,314	335 677	333,999	335;846
6	332,946	333,903	327,187	336,190	335,643	333,969	335,838
8	333,034	333,990	327,252	336,336	335,976	334,074	336,061
10	333,146	334,217	327,261	336,407	335,900	334,186	336,281

Altezze medie del termometro unito.

20	+17,53	+16,66	+17,87	+17,96	+19,23	+21,25	+19,69
22	18,20	17,29	20,52	18,38	19,60	21,24	19,03
0	18,79	17,73	23,55	18,70	20,09	21,10	19,40
2	19,02	18,15	25,28	18,86	20,58	21,3	19,83
4	18,93	18,42	25,48	18,98	20,85	21,37	20,26
6	18,68	18,39	22,90	18,81	20,79	21,11	20,34
8	18,30	17,95	20,84	18,58	20,63	20,64	20,12
10	17,86	17,39	18,80	18,29	20,26	20,58	18,69

Altezze medie del barometro ridotte alla temperatura zero.

20	331,906	333,146	325,890	335,079	334,647	332,725	334,777	$=b^{\circ}$
22	331,885	333,039	325,753	335,035	334,592	332,804	334,741	$=b'$
0	331,760	332,963	325,603	335,000	334,458	332,688	334,263	$=b''$
2	331,632	332,781	325,528	334,952	334,238	332,503	334,413	$=b'''$
4	331,560	332,516	325,244	334,846	334,068	332,359	334,282	$=b^{iv}$
6	331,516	332,491	325,466	334,730	334,039	332,349	334,268	$=b^{v}$
8	331,632	332,611	325,685	334,899	334,383	332,489	334,507	$=b^{vi}$
10	331,778	332,880	325,839	334,992	334,336	332,605	334,836	$=b^{vii}$

63. Poichè le osservazioni cominciano dalle 8 ore della mattina supporremo che l'angolo h sia contato dal medesimo istante, ed assumendo la forma del valore di b stabilita pre-

cedentemente porremo in generale

$$b = x + y\sin.h + y'\cos.h + z\sin.2h + z'\cos.2h.$$

Le otto ore di osservazione ci daranno dunque otto equazioni di questa medesima forma le quali trattate col metodo de' minimi quadrati si ridurranno alle cinqne seguenti

$$8x + y\Sigma\sin.h + y'\Sigma\cos.h + z\Sigma\sin.2h + z'\Sigma\cos.2h = \Sigma b$$

$$\begin{aligned} x\Sigma\sin.h + y\Sigma\sin.^2 h + y'\Sigma\sin.h\cos.h + z\Sigma\sin.h\sin.2h \\ + z'\Sigma\sin.h\cos.2h = \Sigma.b\sin.h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x\Sigma\cos.h + y\Sigma.\sin.h\cos.h + y'\Sigma\cos.^2 h + z\Sigma\cos.h\sin.2h \\ + z'\Sigma\cos.h\cos.2h = \Sigma.b\cos.h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x\Sigma\sin.2h + y\Sigma.\sin.h\sin.2h + y'\Sigma\sin.2h\cos.h + z\Sigma\sin.^2 2h \\ + z'\Sigma.\sin.2h\cos.2h = \Sigma.b\sin.2h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x\Sigma\cos.2h + y\Sigma.\sin.h\cos.2h + y'\Sigma.\cos.2h\cos.h + z\Sigma\sin.2h\cos.2h \\ + z'\Sigma\cos.^2 2h = \Sigma.b\cos.2h \end{aligned}$$

Ora si ha

$$\Sigma\sin.h = \sin.0^\circ + \sin.30^\circ \ldots\ldots + \sin.210^\circ = \frac{\cos.30^\circ}{\tan.15^\circ} = \frac{\sin.60^\circ}{\tan.15^\circ}$$

$$\Sigma\cos.h = \cos.0 + \cos.30 \ldots\ldots + \cos.210 = -\cos.30^\circ = -\sin.60^\circ$$

$$\Sigma\sin.2h = \sin.0 + \sin.60 \ldots\ldots + \sin.420 = \sin.60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\Sigma\cos.2h = 2\cos.^2 30^\circ = \frac{3}{2}$$

$$\Sigma\sin.^2 h = \Sigma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos.2h\right) = 4 - \frac{3}{4} = \frac{13}{4}$$

$$\Sigma\cos.^2 h = \Sigma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos.2h.\right) = 4 + \frac{3}{4} = \frac{19}{4}$$

$$\Sigma\sin.h\cos.h = \frac{1}{2}\Sigma\cos.2h = \frac{1}{2}\sin.60^\circ$$

$$\Sigma\sin.h\sin.2h = \Sigma\left(\frac{1}{2}\cos.h - \frac{1}{2}\cos.3h\right) = -\frac{1}{2}\sin.60^\circ$$

$$\Sigma.\sin.h\cos.2h = \Sigma\left(\frac{1}{2}\sin.3h - \frac{1}{2}\sin.h\right) = -\frac{1}{2}\frac{\sin.60^\circ}{\tan.15^\circ}$$

$$\Sigma.\cos.h\cos.2h = \Sigma\left(\frac{1}{2}\cos.h + \frac{1}{2}\cos.3h\right) = -\frac{1}{2}\sin.60^\circ$$

$$\Sigma.\cos.h\sin.2h = \Sigma\left(\frac{1}{2}\sin.h + \frac{1}{2}\sin.3h\right) = \frac{1}{2}\;\frac{\sin.60^\circ}{\tan.15^\circ}$$

$$\Sigma.\sin.^2 2h \quad = \Sigma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cos.4h\right) = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

$$\Sigma.\cos.^2 2h \quad = \Sigma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos.4h\right) = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

$$\Sigma.\sin.2h\cos.2h = \frac{1}{2}\,\Sigma\sin.4h = \sin.60^\circ$$

dunque le equazioni da risolversi saranno

$$+8x + \frac{\sin.60^\circ}{\tan.15^\circ}y - \sin.60^\circ y' + \sin.60^\circ.z + \frac{3}{2}z' = \Sigma b$$

$$+\frac{\sin.60^\circ}{\tan.15^\circ}.x + \frac{13}{4}y + \frac{\sin.60^\circ}{2}y' - \frac{\sin.60^\circ}{2}z - \frac{1}{2}\,\frac{\sin 60^\circ}{\tan.15^\circ}z' = \Sigma.b\sin.h$$

$$-\sin.60^\circ.x + \frac{\sin.60^\circ}{2}y + \frac{19}{4}y' + \frac{1}{2}\,\frac{\sin 60^\circ}{\tan.15^\circ}z - \frac{\sin.60}{2}z' = \Sigma.b\cos.h$$

$$+\sin.60^\circ.x - \frac{\sin.60^\circ}{2}y + \frac{1}{2}\,\frac{\sin.60^\circ}{\tan.15^\circ}y' + \frac{15}{4}z + \frac{\sin.60^\circ}{2}z' = \Sigma.b\sin.2h$$

$$+\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\,\frac{\sin.60^\circ}{\tan.15^\circ}y - \frac{1}{2}\sin.60^\circ.y + \frac{\sin.60^\circ}{2}z + \frac{17}{4}z' = \Sigma.b\cos.2h$$

ossia sostituendo i numeri

$$+8{,}00000.x + 3{,}23205.y - 0{,}86603.y' + 0{,}86603.z + 1{,}50000.z' = \Sigma.b$$

$$+3{,}23205.x + 3{,}25000.y + 0{,}43302.y' - 0{,}43302.z - 1{,}61602.z' = \Sigma.b\sin.h$$

$$-0{,}86603.x + 0{,}43302.y + 4{,}75000.y' + 3{,}23202.z - 0{,}86603.z' = \Sigma.b\cos.h$$

$$+0{,}86603.x - 0{,}43302.y + 3{,}23205.y' + 3{,}75000.z + 0{,}86603.z' = \Sigma.b\sin.2h$$

$$+1{,}50000.x - 1{,}61602.y - 0{,}86603.y' + 0{,}86603.z + 4{,}25000.z' = \Sigma.b\cos.2h.$$

64. I coefficienti numerici che entrano nei primi membri di queste equazioni rimangono i medesimi nelle diverse serie di osservazioni che si devono sottoporre al calcolo, cosicchè non resta che da formare per ciascuna di esse i valori dei secondi membri i quali si comporranno agevolmente osservando che si ha

$$\Sigma b = b^{\circ} + b' + b'' + b''' + b^{\prime v} + b^{v} + b^{v'} + b^{v''}$$

$$\Sigma . b \,\sin. h = \frac{1}{2}(b' + b^{v} - b^{v''}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(b'' + b^{\prime v}) + b'''$$

$$\Sigma . b \cos. h = \frac{1}{2}(b'' - b^{\prime v}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(b' - b^{v} - b^{v''}) + b^{\circ} - b^{v'}$$

$$\Sigma . b \sin. 2h = \frac{\sqrt{3}}{2}(b' + b'' - b^{\prime v} - b^{v} + b^{v''})$$

$$\Sigma . b \cos. 2h = \frac{1}{2}(b' - b'' - b^{\prime v} + b^{v} + b^{v''}) + b^{\circ} - b''' + b^{v'}.$$

65. Sostituendo ora le quantità date dalle osservazioni si avrà pei diversi luoghi di stazione

	Milano	Pavia	Torino	Padova	Modena	Bologna	Firenze
Σb.	+2653,669	2662,397	2605,008	2679,539	2674,761	2660,553	2676,087
$\Sigma b \sin. h$	+1071,896	1075,400	1051,867	1082,445	1080,347	1074,725	1080,476
$\Sigma b \cos. h$	− 286,634	287,067	281,553	289,596	288,606	287,212	289,306
$\Sigma b \sin. 2h$	+ 287,821	289,119	282,738	290,498	290,358	288,725	290,369
$\Sigma b \cos 2h$	+ 497,835	499,456	489,153	502,484	502,013	499,090	502,521

Formando poi con questi dati i diversi sistemi d' equazioni ed eliminando le incognite, si avranno per ciascuno di essi i valori seguenti di b

Milano $b = 331{,}7412 - 0{,}1513 . \sin. h + 0{,}1414 . \cos. h + 0{,}0535 . \sin. 2h - 0{,}0102 . \cos. 2$

Pavia $b = 332{,}9584 - 0{,}2981 . \quad + 0{,}2669 . \quad + 0{,}0657 \quad - 0{,}0885$

Torino $b = 325{,}7259 - 0{,}2587 . \quad + 0{,}1076 . \quad + 0{,}0932 \quad + 0{,}0355$

Padova $b = 335{,}0302 - 0{,}1645 . \quad + 0{,}1124 . \quad + 0{,}0348 \quad - 0{,}0691$

Modena $b = 334{,}3405 - 0{,}0294 . \quad + 0{,}1675 . \quad + 0{,}1278 \quad + 0{,}1111$

Bologna $b = 332{,}5908 - 0{,}0591 . \quad + 0{,}1420 . \quad + 0{,}1134 \quad + 0{,}0283$

Firenze $b = 334{,}7482 - 0{,}5075 . \quad + 0{,}1617 . \quad + 0{,}0063 \quad - 0{,}0832$

o sia, riunendo i seni e i coseni dello stesso angolo

Milano $b=331{,}7812+0{,}2071.\sin(136^\circ.56'+h)+0{,}0544.\sin.(349^\circ.13'+2h)$

Pavia $b=332{,}9584+0{,}4001.\sin.(138.\ 9+h)+0{,}1112.\sin.(306.\ 36+2h)$

Torino $b=332{,}7259+0{,}2811.\sin.(157.\ 30+h)+0{,}0997.\sin.(20.\ 50+2h)$

Padova $b=335{,}0302+0{,}1992.\sin.(145.\ 40+h)+0{,}0774.\sin.(296.\ 44+2h)$

Modena $b=334{,}3405+0{,}1701.\sin.(109.\ 57+h)+0{,}1693.\sin.(40.\ 59+2h)$

Bologna $b=332{,}5908+0{,}1539.\sin.(112.\ 35+h)+0{,}1169.\sin.(14.\ 11+2h)$

Firenze $b=334{,}7482+0{,}5326.\sin.(162.\ 20+h)+0{,}0836.\sin.(274.\ 19+2h)$.

66. I termini che esprimono l'oscillazione fisica dell'Atmosfera presentano una grande uniformità, essendo i coefficienti di $\sin.h$ tutti negativi, e quelli di $\cos.h$ tutti positivi: per lo che le costanti dell'argomento vengono ad esser tutte comprese nel secondo quadrante, e nei limiti di 110° a 162°. Lo stesso accordo sussiste per rispetto alle osservazioni fatte a Milano ed a Padova, fra queste dell'estate dell'anno 1823, e le altre degli anni 1827, 1778 calcolate di sopra. I termini all'opposto che rappresentano l'oscillazione dinamica vanno soggetti a notabili varietà di grandezza, e di segno le quali meritano d'esser più a lungo studiate. A noi basterà per ora l'aver mostrato come questi fenomeni, a primo aspetto tanto variabili, si possano fino ad un certo segno sottomettere alla precisione del calcolo.

67. Dopo avere discusse le piccole oscillazioni del barometro che dipendono dall'azione fisica e dinamica del sole passeremo ad esporre alcune indagini totalmente empiriche relative alle variazioni accidentali ed a lungo periodo che risultano dalle osservazioni contemporanee fatte nel 1823. Il primo fenomeno che ci si offre da considerare si è quello delle escursioni ossia delle differenze fralle massime e le minime altezze osservate in tempi successivi. È noto che queste escursioni sono assai minori nei luoghi più elevati; ma quì, dove le diversità di livello frai punti di stazione sono poco considerabili, troviamo che le più grandi escursioni non cor-

rispondono sempre alle minori elevazioni. Ecco in qual modo abbiamo formata la seguente tabella che rappresenta le circostanze di questo fenomeno. Dai registri delle osservazioni barometriche fatte nei diversi luoghi dal 18 Giugno al 18 Luglio 1823 abbiamo estratte le altezze massime e minime successive, escludendo però le piccole ondulazioni minori d'un quarto di linea, le quali possono attribuirsi alle oscillazioni orarie. Prese poi le successive differenze frai massimi e i minimi si ebbero i valori di ciascuna escursione. Fatta separatamente la somma di quelle osservate in ciascun luogo, e divisa per 12, che è il numero delle grandi oscillazioni le quali ebbero luogo nell'accennato intervallo di tempo, si ottennero i valori medii delle escursioni stesse che abbiamo scritti nella seconda colonna della tabella mettendoli per ordine di grandezza. A lato a questi abbiamo riferite le costanti delle altezze del barometro che possono servirci a riconoscere le rispettive differenze d' elevazione sul livello del mare.

Luoghi d'osservazione	Medio dell'escursione del Barometro	Alt. media barometrica
	lin.	lin.
Padova	2, 39	335, 03
Firenze	2, 47	334, 75
Milano	2, 83	331, 74
Bologna	3, 02	332, 59
Modena	3, 06	334, 34
Pavia	3, 13	332, 96
Torino	3, 16	325, 73.

È cosa ben singolare il vedere che in quest'intervallo di tempo le escursioni più considerabili si osservarono a Torino, cioè nel luogo più elevato, e le minori a Padova, cioè nel luogo più basso.

68. Passeremo ora al confronto dei tempi corrispondenti alle grandi oscillazioni atmosferiche, onde vedere se queste

sono contemporanee oppure successive pei luoghi posti sotto diversi meridiani o sotto diversi paralleli. Questo confronto suole farsi notando i tempi corrispondenti alle massime ed alle minime altezze barometriche; ma se ben si riflette si scorgerà che questi punti di paragone sono i meno opportuni all' intento, rimanendo di sua natura sempre incerto il preciso istante in cui ha luogo il massimo e il minimo d'una quantità che sia funzione del tempo. Noi abbiamo per ciò preferito di notare i momenti in cui per ciascun luogo il barometro giungeva all' altezza media fralla massima e la minima escursione precedente e seguente. Paragonando poi gl' istanti in cui il barometro arrivò nei diversi luoghi ai limiti suddetti, con quelli osservati a Milano, risultò l'anticipazione o il ritardo dedotto dal medio di undici termini come segue.

Pavia anticipazione, ore	$1^h, 9$
Torino ritardo	0, 5
Padova ritardo	3, 4
Modena anticipazione	0, 9
Bologna id.	0, 6
Firenze id.	2, 2

69. Supponiamo che il ritardo rispettivamente a Milano sia espresso da una costante incognita x moltiplicata per la differenza di longitudine, più un' altra incognita y moltiplicata per la differenza di latitudine, avremo le sei equazioni

$$\begin{aligned} 0\,x - 17.y &= -1^h{,}9 \\ -6\,x - 24.y &= +0{,}5 \\ +11.x - 4.y &= +3{,}4 \\ +7.x - 49.y &= -0{,}9 \\ +8.x - 58.y &= -0{,}6 \\ +8.x - 102.y &= -2{,}2. \end{aligned}$$

Alle quali applicando il metodo de' minimi quadrati si avrà

$$\begin{aligned} 334.\,x - 1523.\,y &= +\ 5{,}7 \\ -1523.\,y + 17050.\,y &= +\ 310{,}0 \end{aligned}$$

e quindi $x = +0{,}167, \quad y = +0{,}033.$

70. Sia α la longitudine, β la latitudine di Milano e siano $\alpha+p$, $\beta+q$ la longitudine e la latitudine di un altro paese, t il tempo in cui l'oscillazione atmosferica arriva a Milano al punto di mezzo della sua escursione, $t+\theta$ quello in cui vi arriva nel paese suddetto; si avrà (con quel grado di probabilità che si può attendere trattandosi di fenomeni tanto irregolari) $t+\theta=t+\frac{p}{6}+\frac{q}{30}$, ritenendo che p è espresso in minuti di tempo ed è positivo pei paesi posti all' Est di Milano; q è espresso in minuti di grado, ed è positivo pei paesi posti al Nord. I tempi t e θ poi sono espressi in ore e frazioni decimali di ora.

Se si vuole θ espresso in minuti di tempo si avrà

$$\theta = 10p + 2q.$$

71. Poichè in queste formule abbiamo indicato con θ l'ora contata sotto il meridiano rispettivo de' diversi luoghi, sarà facile il dedurre il corrispondente tempo θ' contato sotto il meridiano di Milano, giacchè si avrà $\theta'=\theta-p$; sarà dunque fatta la sostituzione

$$\theta' = 9p + 2q.$$

Questa formula ci mostra che, generalmente parlando, le oscillazioni atmosferiche si propagarono da Occidente in Oriente e dal Sud al Nord. Volendo poi conoscere prossimamente l'angolo di direzione della linea lungo la quale si fece la propagazione delle onde, convien ridurre la quantità p nella stessa unità di misura colla quale è espressa la quantità q, ed essendo sotto la nostra latitudine un minuto di tempo in longitudine $=10'$ di arco di circolo massimo sarà $\theta'=0{,}9\,p'+2q$, e la tangente della cercata inclinazione $=\frac{0{,}9}{2}=\tan.24^\circ$ contando quest' angolo di 24° dal Nord andando all' Est. La linea perpendicolare a questa e per conseguenza inclinata di 66° al meridiano andando dal Sud verso l'Est, segnerà la posizione dei luoghi nei quali le oscillazioni barometriche hanno dovuto essere contemporanee a quelle osservate a Milano.

Quest' ultima direzione non si allontana gran fatto da quella segnata dal continente d' Italia o dalle coste dell' Adriatico, cosicchè dalla configurazione stessa del nostro suolo potrebbe trarsi una spiegazione plausibile dei fenomeni che abbiamo quì preso ad esaminare.

72. Vediamo per ultimo se si verifica ciò che da alcuni è stato avvertito circa il verso pel quale più rapidamente si propagano le grandi oscillazioni atmosferiche. A questo fine converrà rappresentare con una espressione della forma $px+qy$ il valor medio delle anticipazioni o dei ritardi osservati, preso senza aver riguardo ai segni positivi e negativi. Questi medii risultano

per	Pavia	ore 2,1 onde si hanno le equazioni	$0.x+17.y=2,1$
	Torino	1,9	$6\,x+24.y=1,9$
	Padova	6,1	$11.x+4.y=6,1$
	Modena	1,8	$7.x+49.y=1,8$
	Bologna	2,5	$8.x+58.y=2,5$
	Firenze	2,5	$8.x+102.y=2,5$

dalle quali risulta

$$334.x+1811.y=131,1$$
$$1811.x+17010.y=593,9$$

e quindi $x=0,4670\,,\quad y=-0,0137.$

73. Se si esprime la differenza di longitudine in minuti di arco di circolo massimo; il coefficiente x si cambierà in $x=0,0467$ rimanendo $y=-0,0137$, onde può conchiudersi che le oscillazioni atmosferiche si propagarono tre o quattro volte più rapidamente in longitudine che in latitudine.

Queste conclusioni non devono considerarsi che come un abozzo di quelle che converrebbe dedurre dal paragone delle osservazioni continuate per un gran numero d'anni. Ciò nulla ostante non ci è sembrato del tutto inutile il presentar quì i risultati delle poche osservazioni delle quali potevamo far uso, sperando che da essi possa trarsi qualche norma per istabilire un piano generale d' osservazioni meteorologiche che riesca il più opportuno allo studio de' fenomeni atmosferici.

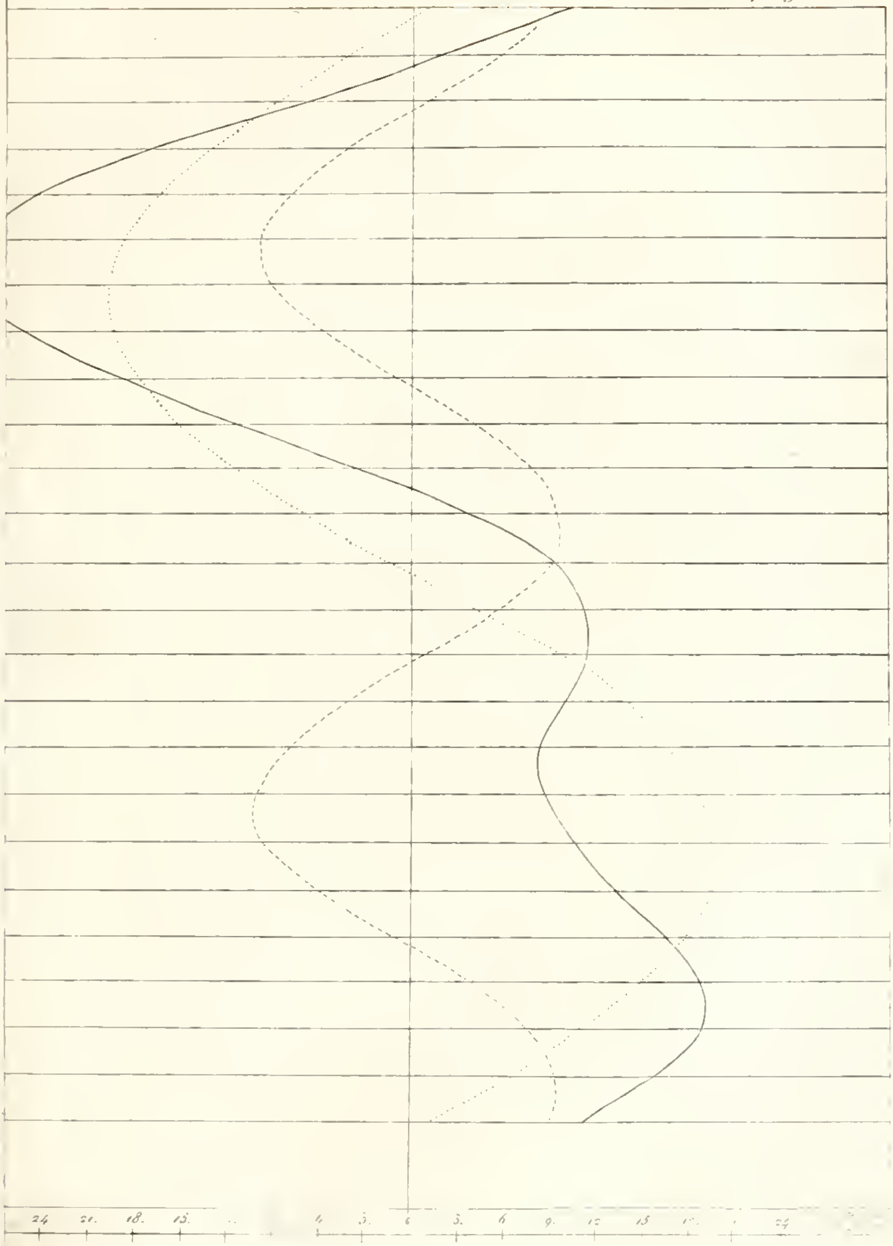


Figura 1.

to di 100 ad 1.

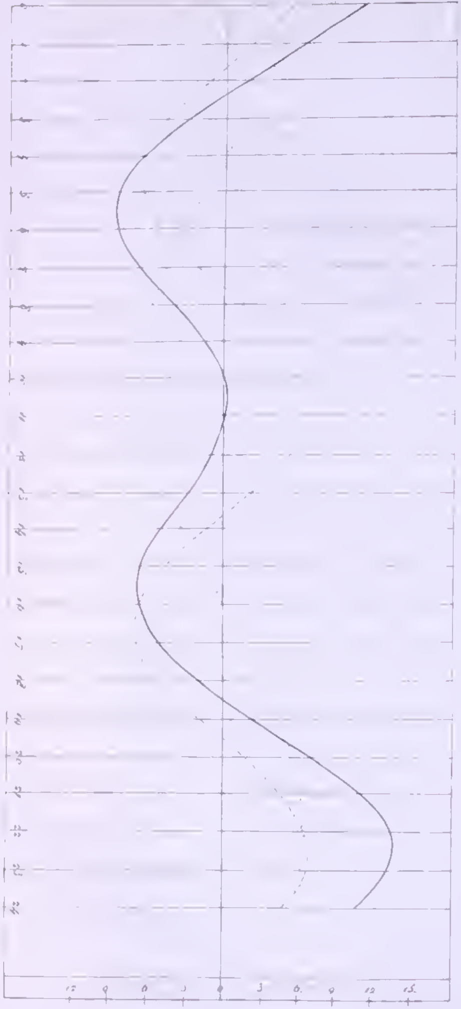


Fig. 2.

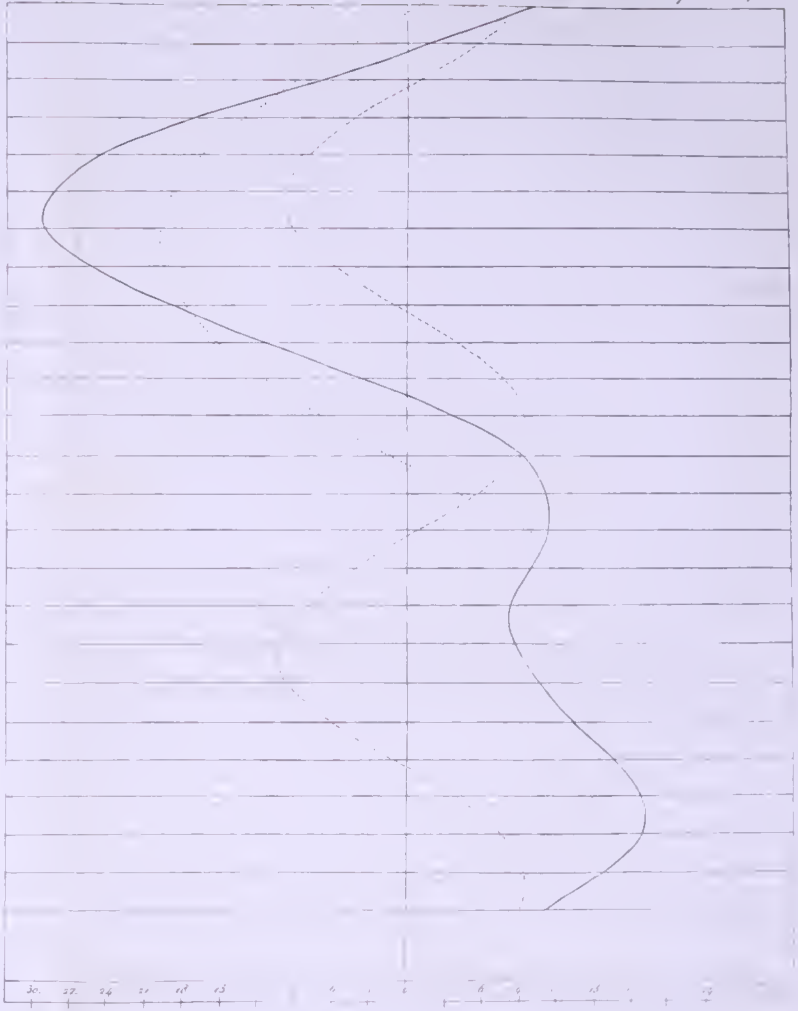


Figura 1.

Scala delle altezze nel rapporto di 100 ad 1

SOPRA ALCUNE PROPRIETÀ

DE' PIANI DE' MOMENTI PRINCIPALI E DELLE COPPIE DI FORZE EQUIVALENTI

MEMORIA

DEL SIG. INGEGNER GAETANO GIORGINI

Ricevuta adì 1. *Dicembre* 1827.

PRESENTATA DAL SOCIO

SIG. CAV. GIULIANO FRULLANI

APPROVATA DAL SOCIO

SIG. PROFESSOR GIUSEPPE TRAMONTINI

Per quanto molte belle proprietà de' momenti principali, e delle coppie di forze equivalenti sieno da varii anni conosciute (*a*), l'argomento non sembrandoci ancora del tutto esaurito, offeriamo ai geometri la seguente Memoria, onde essi giudichino se la maggior semplicità colla quale vengono esposte le principali proprietà del piano del minimo momento principale, meriti di essere ammessa ne' trattati speciali di meccanica, e se le cose aggiunte sieno di qualche importanza.

Rappresentino p', p'', p''', p^{iv} etc. le forze applicate ne'

(*a*) Poisson. Mecanique, Paris 1811.
Poinsot. Statique, Paris 1824.
Giorgini. Teoria analitica delle projezioni Lucca 1819.
Bordoni. Giornale di Pavia Tomo 4.° 1821.
Bordoni. Giornale di Pavia Tomo 5.° 1822.

punti x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z'''; x^{iv}, y^{iv}, z^{iv}, etc. di un sistema rigido: m', m'', m''', m^{iv}, etc. i momenti di tali forze. Intendasi inoltre generalmente per p_x, p_y, p_z le tre componenti di una qualsivoglia forza p, parallele ai tre assi coordinati rettangolari: per m_x, m_y, m_z i tre momenti componenti del momento m, perpendicolari ai tre assi indicati, i tre momenti cioè di rotazione della forza p attorno a tali assi. Posto che P sia la massima azione di traslazione ed M il massimo momento di rotazione del sistema (*b*) attorno all'origine delle coordinate, sappiamo che

$$P_z = \Sigma p'_x \ \ldots, P_y = \Sigma p'_y \ \ldots, P_z = \Sigma p'_z,$$
$$M_x = \Sigma m'_x \ \ldots, M_y = \Sigma m'_y \ \ldots, M_z = \Sigma m'_z .$$

Sappiamo inoltre che trasportando il centro de' momenti nel punto α, β, γ; i nuovi momenti di rotazione attorno a tre assi condotti per questo punto parallelamente a quelli delle coordinate, si hanno dalle formole

$$(1) \ldots\ldots M'_x = M_x - (\gamma P_y - \beta P_z) \ldots, M'_y = M_y - (\alpha P_z - \gamma P_x)$$
$$M'_z = M_z - (\beta P_x - \alpha P_y).$$

Ora è facile riconoscere che le altre proprietà de' momenti principali, e del minimo tra momenti principali esposte ne' trattati col metodo generale de' massimi e minimi divengono apparenti per loro stesse, mediante alcune facilissime trasformazioni di coordinate.

Si supponga effettivamente per asse degli z prescelta una retta parallela alla massima azione di traslazione P: saranno allora

$$P_z = P \ldots, P_y = 0 \ldots, P_x = 0$$

e le accennate formole diverranno

(*b*) Teoria analitica delle projezioni. Titolo VI.

$$M'_x = M_x + \beta P \,.\,.\,,\; M'_y = M_y - \alpha P \,.\,.\,,\; M'_z = M_z$$

e daranno

$$M'^2 = (M_x + \beta P)^2 + (M_y - \alpha P)^2 + M^2_z$$

per l'espressione del momento principale del sistema il di cui centro è nel punto α, β, γ.

Facendo adesso variare di situazione il centro α, β, γ, il momento principale diverrà evidentemente un minimo pei valori di α e β, che danno

$$M_x + \beta P = 0 \,.\,.\,.\,,\; M_y - \alpha P = 0$$

e sarà perciò determinato dalla equazione

$$M'_x = 0 \,.\,.\,,\; M'_y = 0 \,.\,.\,,\; M'_z = M_z = M'$$

onde si possono immediatamente, enunciare tutte le principali proprietà di questo minimo trai momenti principali cioè

1.° Che il momento principale è un minimo per tutti i punti della retta rappresentata dall' equazioni

$$\alpha = \frac{M_y}{P} \,.\,.\,.\,,\; \beta = -\frac{M_x}{P}$$

parallele alla massima azione di traslazione.

2.° Che questa retta è l'asse stesso di rotazione di esso momento.

3.° Che il momento principale è costante per una qualsivoglia retta

$$M_x + \beta P = B \,.\,.\,.\,,\; M_y - \alpha P = A$$

parallela all' asse sopraindicato.

4.° Che il minimo momento principale M' è sempre uguale al momento di rotazione M_z, attorno ad asse parallelo a quello del minimo momento principale condotto per un qualsivoglia centro de' momenti.

Trovato l'asse del minimo momento principale possiamo in questo asse immaginar trasportata l'origine delle coordinate. Nelle formole (1) si dovrà allora, per le dimostrate proprietà, supporre non solo

$$P_x = 0 \,..,\, P_y = 0 \,..,\, P_z = P$$

ma ancora

$$M_x = 0 \,..,\, M_y = 0 \,..,\, M_z = M$$

ed avremo i tre momenti di rotazione attorno a tre assi per un qualsivoglia centro α, β, γ condotti parallelamente a quelli delle coordinate espressi dall'equazioni

$$M'_x = \beta P \,..,\, M'_y = -\alpha P \,..,\, M'_z = M$$

ed il quadrato del momento principale pel centro α, β, γ sarà conforme a quanto già si sapeva

$$(2) \ldots\ldots M'^2 = (\alpha^2 + \beta^2) P^2 + M^2.$$

L'equazione poi

$$M'_x (x - \alpha) + M'_y (y - \beta) + M'_z (z - \gamma) = 0$$

del piano di questo momento principale (c), diverrà

$$(3) \ldots\ldots P\beta x - P\alpha y + Mz = M\gamma$$

e servirà a porre in evidenza alcune singolari proprietà de' piani de' momenti principali.

E primieramente ci proverà che come ciaschedun punto α, β, γ può esser preso per centro di un momento principale del piano del quale essa è l'equazione, così ciaschedun piano dato dalla sua equazione

$$(4) \ldots\ldots z = Ax + By + C$$

può esser preso per quello di un momento principale, avente il suo centro nel punto

$$\alpha = \frac{BM}{P} \ldots,\ \beta = -\frac{AM}{P} \ldots,\ \gamma = C,$$

determinato dall' equazioni

(c) Teoria analitica delle projezioni. Titolo V.

$$M'_x = -AM\,.\,.\,,\ M'_y = -BM\,.\,.\,,\ M'_z = M,$$

e però uguale ad $M' = M\sqrt{A^2 + B^2 + 1}$.

Se conseguentemente facciamo variare il piano (4) secondo una legge espressa dall'equazione $f(A, B, C) = 0$, il centro del momento principale varierà col piano preindicato, secondo la legge $f\left(\frac{-P\beta}{M}, \frac{P\alpha}{M}, \gamma\right) = 0$, ossia sopra la superficie rappresentata da questa equazione.

Suppongasi per esempio che il piano (4), si faccia muovere soggetto a passare da un punto fisso α', β', γ' per modo cioè che si abbia l'equazione di condizione

$$\gamma' = A\alpha + B\beta' + C$$

dovrà tralle coordinate α, β, γ del centro corrispondente verificarsi l'equazione

$$P\beta\alpha' - P\alpha'\beta + M\gamma = M\gamma'$$

la quale paragonata coll'equazione generale (3) del piano del momento principale corrispondente al centro α, β, γ ci dimostra che. *Il luogo geometrico de' centri de' momenti principali, i piani de' quali passano per un dato punto, è nel piano del momento principale, avente il suo centro in questo stesso punto dato.*

Similmente se vogliasi che il piano (4) sia tangente alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, avente il suo centro nell' origine delle coordinate dovrà verificarsi la condizione $r^2(1 + A^2 + B^2) = C^2$, e però tralle coordinate α, β, γ del centro corrispondente l'equazione

$$r^2P^2(\alpha^2 + \beta^2) - M^2\gamma^2 = -M^2r^2$$

dalla quale potremo concludere. *Che il luogo geometrico de' centri de' momenti principali i piani de' quali sono tangenti ad una sfera avente il suo centro nell' asse del minimo momento principale, è un iperboloide di rivoluzione attorno al mede-*

simo asse (*d*). Il valore di uno qualsivoglia de' momenti principali preindicati si ricaverà dall' equazione (2), e sarà

$$M' = \frac{M\gamma}{r} .$$

Più generalmente poi se il piano $z = Ax + By + C$ si assoggetta ad esser tangente ad una qualsivoglia superficie di secondo ordine, la relativa condizione trai coefficienti A, B, C sarà di secondo grado, e perciò

Il luogo geometrico de' centri de' momenti principali i piani de' quali sono tangenti ad una superficie del secondo ordine, è esso pure una superficie del secondo ordine.

Sottopongasi adesso il piano (3) del momento principale avente il suo centro nel punto α, β, γ a rimaner parallelo alla retta

$$y = ax + c$$
$$z = bx + d.$$

Avremo la condizione.

$$\beta = a\alpha - \frac{Mb}{P}$$

che rappresenta un piano parallelo alla retta predetta ed all' asse degli z onde potremo concludere

Che il luogo geometrico de' centri de' momenti principali, i piani de' quali sono paralleli ad una data retta è un piano parallelo a questa linea data ed all' asse del minimo momento principale.

Seguitando queste ricerche vogliasi che il piano del momento principale (3) passi per la retta.

$$(5) \; \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} y = ax + c \\ z = bx + d. \end{array} \right.$$

Il centro α, β, γ dovrà in questa supposizione soddisfare alle due condizioni

---

(*d*) Giorgini Teoria analitica delle superficie di secondo ordine. Lucca 1817.

$$\beta = a\alpha - \frac{Mb}{P},$$

$$\gamma = -\frac{Pc}{M} + d;$$

le quali rappresentano una retta

$$(6) \; \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} y = a'x + c' \\ z = b'x + d', \end{array} \right. \quad \text{ove}$$

$$a' = a \ldots, c' = -\frac{Mb}{P} \ldots, b' = -\frac{Pc}{M} \ldots, d' = d.$$

Ma da queste equazioni si ha

$$a = a' \ldots, c = -\frac{Mb'}{P} \ldots, b = -\frac{Pc'}{M} \ldots, d = d'.$$

Dunque le due rette (5) e (6) sono talmente tra loro collegate e reciproche, che la seconda si determina per mezzo della prima, nel modo istesso che la prima per la seconda, dunque

Ad una qualsivoglia retta ne corrisponde sempre una seconda tale che una qualunque delle due è il luogo geometrico de' centri de' momenti principali i piani de' quali passano per l' altre.

Tralle diverse proprietà di queste linee reciproche, merita particolare attenzione la seguente

Ad una qualsivoglia coppia di linee come sopra reciproche corrisponde una coppia di forze equilibranti il sistema, applicate secondo la loro direzione.

E di fatti ricerchiamo direttamente quale deve essere la grandezza di una forza π applicata secondo una retta

$$(5) \; \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} y = ax + c \\ z = bx + d \end{array} \right.$$

affinchè il sistema di forze π, p', p'', p''' etc. possa essere equilibrato da una forza unica π', e quali la grandezza e l'equazioni

$$(6) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} y = a'x + c' \\ z = b'x + d' \end{array} \right.$$

di questa ultima.

Sappiamo perciò, che espresso per μ il momento della forza π le sue equazioni sono

$$y\pi_x - x\pi_y = \mu_z,$$

$$x\pi_z - z\pi_x = \mu_y,$$

$$z\pi_y - y\pi_z = \mu_x;$$

alle quali dee aggiungersi la condizione

$$(7) \ldots\ldots \pi_x\mu_x + \pi_y\mu_y + \pi_z\mu_z = 0.$$

Avremo adunque, per esprimere che questa forza è applicata secondo la retta (5), l'equazioni

$$(8) \ldots a = \frac{\pi_y}{\pi_x} \ldots, c = \frac{\mu_z}{\pi_x} \ldots, b = \frac{\pi_z}{\pi_x} \ldots, d = -\frac{\mu_y}{\pi_x}, \text{ e}$$

$$(9) \ldots\ldots \mu_x + \pi_x(cb - ad) = 0.$$

Ma se vogliamo che il nuovo sistema di forze π, p', p'', p''' ec. sia equilibrato da una unica forza π', della quale rappresenteremo per μ' il momento si dovranno avere l'equazioni

$$(10) \ldots\ldots \pi'_x\mu'_x + \pi'_y\mu'_y + \pi'_z\mu'_z = 0 \quad \text{e}$$

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} \ldots \pi'_x + \pi_x = 0 \ldots, \pi'_y + \pi_y = 0 \ldots, \pi'_z + P + \pi_z = 0 \ldots \\ \ldots \mu'_x + \mu_x = 0 \ldots, \mu'_y + \mu_y = 0 \ldots, \mu'_z + M + \mu_z = 0 \ldots \end{array} \right.$$

Tra queste le (11) riducono l'antecedente (10) a

$$\pi_x\mu_x + \pi_y\mu_y + (P + \pi_z)(M + \mu_z) = 0;$$

condizione che combinata colla (7), diviene

$$(12) \ldots\ldots PM + M\pi_z + P\mu_z = 0.$$

Questa poi, combinata colle equazioni (8), e (9), darà

$$(13)\ldots\begin{cases}\pi_x=-\dfrac{\mathrm{PM}}{\mathrm{M}b+\mathrm{P}c}\ldots,\pi_y=-\dfrac{\mathrm{PM}a}{\mathrm{M}b+\mathrm{P}c}\ldots,\pi_z=-\dfrac{\mathrm{PM}b}{\mathrm{M}b+\mathrm{P}c},\\ \mu_x=\dfrac{\mathrm{PM}(cb-da)}{\mathrm{M}b+\mathrm{P}c}\ldots\ldots,\mu_y=\dfrac{\mathrm{PM}d}{\mathrm{M}b+\mathrm{P}c}\ldots\ldots,\mu_z=\dfrac{-\mathrm{PM}c}{\mathrm{M}b+\mathrm{P}c},\end{cases}$$

e per conseguenza la forza cercata

$$(14)\ \ldots\ldots\ldots\ \pi=\frac{\mathrm{PM}\sqrt{(1+a^2+b^2)}}{\mathrm{M}b+\mathrm{P}c}$$

ed il suo momento

$$(15)\ \ldots\ldots\ldots\ \mu=\frac{\mathrm{PM}\sqrt{((cb-da)^2+c^2+d^2)}}{\mathrm{M}b+\mathrm{P}c}.$$

La forza come sopra trovata unita alle altre del sistema dato saranno equilibrate da una forza unica π', la grandezza ed il momento della quale si determineranno facilmente pel mezzo dell' equazione (11).

Per averne poi le sue equazioni

$$y=a'x+c'$$
$$z=b'x+d'$$

basterà porre

$$a'=\frac{\pi'_y}{\pi'_x}\ldots,c'=\frac{\mu_z}{\pi'_x}\ldots,b'=\frac{\pi'_z}{\pi'_x}\ldots,d'=-\frac{\mu'_y}{\pi'_x}$$

e quindi combinando questi valori coll' equazioni (11), e cogli altri (13), si avranno

$$(16)\ldots a'=a\ldots,c'=-\frac{\mathrm{M}b}{\mathrm{P}}\ldots,b'=-\frac{\mathrm{P}c}{\mathrm{M}}\ldots,d'=d$$

risultati i quali ci provano l'annunziata identità delle linee secondo le quali sono applicate le forze equilibranti colle coppie di linee reciproche.

Resumendoci adunque concluderemo

Che un qualsivoglia sistema di forze applicate ad un sistema rigido di punti (P *essendo il massimo sforzo di traslazione ed* M *il minimo momento principale di rotazione, e supposto prescelto per asse degli z l' asse stesso di questo minimo momento principale*) *può essere equilibrato da un indefi-*

nito numero di coppie di forze, ciascheduna delle quali è applicata secondo la direzione di una delle due rette

$$(5)\;.\;.\;.\;.\;.\begin{cases} y = ax + c \\ z = bx + d \end{cases} \qquad (6)\;.\;.\;.\;.\;.\begin{cases} y = a'x + c' \\ z = b'x + d' \end{cases}$$

rilegate tra loro dall' equazioni

$$(17)\;.\;.\;.\;.\;a = a'\;.\;.\;,\; Mb' = -\,Pc\;.\;.\;,\; Pc' = -Mb\;.\;.\;,\; d = d';$$

ed uguale rispettivamente a

$$(18)\;.\;.\;.\;,\pi = \frac{PM\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}}{Mb + Pc}\;.\;.\;.\;.\;,\pi' = \frac{PM\sqrt{(1 + a'^2 + b'^2)}}{Mb' + Pc'}.$$

I risultamenti ottenuti essendo sufficienti a rappresentarci una qualsivoglia coppia di forze equilibranti, se ne dedurranno facilmente tutte le loro proprietà (*e*). Eccone alcune più rilevanti

Un qualsivoglia piano

$$y = Ax$$

condotto per l'asse del minimo momento principale è incontrato dalle due rette (5), (6) ne' punti

$$(19)\;.\;.\;,x = \frac{c}{A-a}\;.\;.\;,y = \frac{Ac}{A-a}\;.\;.\;,z = \frac{bc+d(A-a)}{A-a}\text{, ed}$$

$$(20)\;.\;.\;.\;,x = \frac{-Mb}{P(A-a)}\;.\;.\;,y = \frac{-AMb}{P(A-a)}\;.\;.\;,z = \frac{bc+d(A-a)}{A-a}$$

posti alla medesima altezza z sopra il piano degli x, y. Dunque le due forze π e τ' si possono considerare come applicate ne' punti (19), (20) di una retta che si appoggia sull' asse del minimo momento principale, gli è perpendicolare ed è rappresentata dall' equazioni

$$(21)\;.\;.\;.\;.\;.\begin{cases} y = Ax \\ z = \dfrac{bc+d(A-a)}{A-a} \end{cases}.$$

Ciò posto osserviamo che i valori (18) di π, π', e quelli (19), e (20) delle coordinate x, y de' loro punti di applicazione sono indipendenti dal valore di d, e che però

(*e*) Bordoni. Giornale di Pavia Tomo 4.

Le due forze equilibranti un sistema si possono senza alterare l' equilibrio trasportare parallelamente a se stesse, purchè i loro punti di applicazione si trasportino essi pure di una medesima quantità parallelamente all' asse del minimo momento principale.

Ritornando alla retta (21), che unisce i due punti di applicazione delle due forze equilibranti egli è chiaro che, prendendo il piano $y = \mathrm{A}x$ perpendicolare al piano $y = ax$ che è parallelo alle due rette reciproche, essa diverrà

$$(22) \; \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \ldots\ldots y = -\frac{1}{a}\,x \\ \ldots\ldots z = \frac{d(1+a^2)-cba}{1+a^2} \end{array} \right.$$

poichè si dovrà fare $\mathrm{A} = -\frac{1}{a}$, ed in questo caso sarà quella sopra la quale si misura la minima distanza delle due rette reciproche.

I punti di applicazione delle due forze all' estremità di questa minima distanza saranno dati dalle coordinate

$$x = \frac{-ca}{1+a^2}\;\ldots,\; y = \frac{c}{1+a^2}\;\ldots,\; z = \frac{d(1+a^2)-cba}{1+a^2}$$

sopra l' una, ed

$$x = \frac{\mathrm{M}ba}{\mathrm{P}(1+a^2)}\;\ldots,\; y = \frac{-\mathrm{M}b}{1+a^2}\;\ldots\ldots,\; z = \frac{d(1+a^2)-cba}{1+a^2}$$

sopra l' altra; di maniera che si avranno facilmente

$$\mathrm{L} = \frac{\mathrm{P}c+\mathrm{M}b}{\mathrm{P}\sqrt{(1+a\;)}}$$

per l'espressione della minima distanza delle due forze ed

$$l = \frac{c}{\sqrt{(1+a^2)}}\;\ldots\ldots,\; l' = \frac{\mathrm{M}b}{\mathrm{P}\sqrt{(1+a^2)}}$$

per le parti di questa minima distanza comprese tra ciascheduna delle forze equilibranti, e l' asse del minimo momento principale.

Prendiamo adesso le formole note

$$\text{sen. } \overline{\pi\pi'} = \frac{\sqrt{((a-a')^2+(b-b')^2+(ab'-ba')^2)}}{\sqrt{(1+a\ +b\ )}\sqrt{(1+a'^2+b'^2)}},$$

$$\text{sen.}\overline{\pi.\text{P}} = \text{sen. } \overline{\pi z} = \frac{\sqrt{(1+a^2)}}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}},$$

$$\text{sen.}\overline{\pi'\text{P}} = \text{sen. } \overline{\pi' z} = \frac{\sqrt{(1+a'^2)}}{\sqrt{(1+a'^2+b'^2)}},$$

servendoci de' valori (17) di a', b', c', d', e delle espressioni

$$\sqrt{1+a^2+b^2} = \frac{\pi(\text{M}b+\text{P}c)}{\text{M}} \ldots, \sqrt{1+a'^2+b'^2} = \frac{\pi'(\text{M}b+\text{P}c)}{\text{M}}$$

ricavate dall' equazioni (18) troveremo

$$\text{sen. } \overline{\pi.\pi'} = \frac{\text{P}^2\text{M}\sqrt{(1+a^2)}}{\pi\pi'(\text{M}b+\text{P}c)} \ \ldots\ldots, \text{sen. } \overline{\pi.\text{P}} = \frac{\text{PM}\sqrt{(1+a^2)}}{\pi(\text{M}b+\text{P}c)}$$

$$\ldots\ldots\ldots \text{ sen. } \overline{\pi'\text{P}} = \frac{\text{PM}\sqrt{(1+a^2)}}{\pi'(\text{M}b+\text{P}c)}$$

dalle quali risulta la proporzione

$$\text{P} : \pi : \pi' : : \text{sen.}\overline{\pi.\pi'} : \text{sen.}\overline{\pi'.\text{P}} : \text{sen.}\overline{\pi.\text{P}},$$

e l'equazione

$$\text{L}\, \pi\pi' \text{ sen. } \overline{\pi.\pi'} = \text{PM}.$$

La quale ultima equazione significa che

La solidità della piramide triangolare i di cui vertici sono le quattro estremità delle due forze equilibranti è costante per tutte le diverse coppie di tali forze.

E di fatti egli è facile vedere che il primo membro della mentovata equazione rappresenti il sestuplo di essa piramide.

SULL' USO DEL CALCOLO

DELLE DIFFERENZE FINITE NELLA DOTTRINA DEGL' INTEGRALI DEFINITI

MEMORIA

DEL SIG. CAV. PIETRO PAOLI

Ricevuta adì 16. *Maggio* 1828.

Le presenti ricerche si aggireranno principalmente intorno agli integrali definiti $\int x^{p-1}dx(1-x)^{q-1}$, ed $\int dx\left(\log.\frac{1}{x}\right)^{a-1}$ presi ambedue tra i limiti zero ed 1 della x, ai quali il nome d'integrali Euleriani della prima e seconda specie è stato imposto dal Sig. Legendre. Questo gran Geometra ne' suoi eccellenti esercizj sopra il calcolo integrale ha trattato di tali trascendenti con tanta estensione e profondità, che nulla rimane a desiderarsi sia per la loro valutazione approssimativa, sia per la loro riduzione al più piccolo numero possibile. Devesi ciò non ostante commendare una dotta Memoria inserita nel Tomo XXVI. pubblicato dalla Reale Accademia di Torino, ove il Sig. Cav. Cisa de Gresy applicando al medesimo soggetto un metodo nuovo ed ingegnoso ha reso in qualche parte più facile la ricerca delle proprietà degl' integrali Euleriani, le quali sono il fondamento della loro riduzione. Il calcolo delle differenze finite somministra a tal' uopo un mezzo più semplice e più diretto, che io mi propongo di far conoscere in questa breve Memoria.

Esaminiamo in primo luogo l'integrale $\int_0^1 x^{p-1}dx(1-x)^{q-1}$ ove p e q sono numeri positivi, ed il segno $\int_0^1$ indica che l' integrazione deve farsi tra i limiti 0 ed 1 della x. Ponendo $1-x$ in luogo di x abbiamo

$$\int_0^1 x^{p-1} dx\, (1-x)^{q-1} = -\int_1^0 x^{q-1} dx\, (1-x)^{p-1}$$

$$= \int_0^1 x^{q-1} dx\, (1-x)^{p-1}$$

e perciò salvo il valore dell' integrale si possono tra loro permutare le lettere p e q. Se adottiamo la notazione del Sig. Legendre indicando col segno (p, q) l' integrale $\int_0^1 x^{p-1} dx\, (1-x)^{q-1}$, la precedente proprietà sarà espressa dall' equazione

$$(1) \qquad (p, q) = (q, p)\,.$$

Integrando per parti avremo, quando p e q sono > 0,

$$\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^q = \frac{q}{p} \int_0^1 x^p dx (1-x)^{q-1}$$

$$= \frac{q}{p} \int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1} - \frac{q}{p} \int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^q$$

quindi sarà $(p+q) \int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^q = q \int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^{q-1}$, cioè

$$(2) \qquad (p, q+1) = \frac{q}{p+q} (p, q)$$

la qual'equazione è il fondamento delle nostre indagini.

Prendendone i logaritmi da una parte e dall'altra avremo

$$\mathrm{L.}(p, q+1) - \mathrm{L.}(p, q) = \mathrm{L.}q - \mathrm{L.}(p+q);$$

ma $\mathrm{L.}(p, q+1) - \mathrm{L.}(p, q)$ è la differenza finita della funzione $\mathrm{L.}(p, q)$ per rapporto a q nella ipotesi di $\Delta q = 1$; sarà dunque

$$\Delta \mathrm{L.}(p, q) = \mathrm{L.}q - \mathrm{L.}(p+q)$$

ed integrando avrassi

$$\mathrm{L.}(p, q) = \Sigma \mathrm{L.}q - \Sigma \mathrm{L}\,(p+q) + \mathrm{F.}p$$

ove aggiungo la funzione arbitraria $\mathrm{F.}p$, perchè nella integrazione p è stata riguardata come costante.

Per determinare questa funzione $F.p$ cangiamo nella equazione precedente p in q e viceversa, ed avremo

$$L.(q,p)=\Sigma L.p-\Sigma L.(p+q)+F.q$$

e siccome $(p,q)=(q,p)$ converrà che sia

$$\Sigma L.p+F.q=\Sigma L.q+F.p$$

per soddisfare alla qual' equazione porremo ciascuna delle quantità $F.p-\Sigma L.p$, e $F.q-\Sigma L.q$ eguale ad una costante $L.C$ indipendente da p e da q. Avremo adunque

$$L.(p,q)=L.C+\Sigma L.p+\Sigma L.q-\Sigma L.(p+q)$$

e passando dai logaritmi ai numeri

$$(p,q)=Ce^{\Sigma L.p+\Sigma L.q-\Sigma L.(p+q)}.$$

Supponghiamo adesso che l' integrale $\Sigma L.p$ sia determinato in modo, che svanisca quando $p=1$, lo che è permesso a motivo della costante arbitraria C, e ponendo $q=1$ otterremo

$$(p,1)=Ce^{\Sigma L.p-\Sigma L.(p+1)}=\frac{C}{p}$$

perchè $\Sigma L.(p+1)=\Sigma L.p+\Delta\Sigma L.p=\Sigma L.p+L.p$. E siccome $(p,1)=\int_0^1 x^{p-1}dx=\frac{1}{p}$, ne segue che la costante C è eguale all' unità, e perciò

$$(p,q)=e^{\Sigma L.p+\Sigma L.q-\Sigma L.(p+q)}..$$

L' equazione $(p,q)=Ce^{\Sigma L.p+\Sigma L.q-\Sigma L.(p+q)}$ non è per verità che un' integrale particolare dell' equazione (2) alla quale possiamo più generalmente soddisfare ponendo in luogo della costante C una funzione indeterminata $\phi(p,\text{sen.}\,2q\pi)$, ove 2π è la circonferenza del cerchio che ha per raggio l'unità, poichè p è riguardata come costante nell' equazione (2), e $\text{sen.}2q\pi$ non varia quando q si cangia in $q+1$. Ma siccome $(p,q)=(q,p)$, dovrà essere nel caso nostro $\phi(p,\text{sen.}\,2q\pi)=\phi(q,\text{sen.}2p\pi)$, la qual condizione viene adempita se si riduce la funzione $\phi(p,\text{sen.}\,2q\pi)$ ad una funzione simile di sen. $2p\pi$ e sen. $2q\pi$, nella composizione della quale entrino egualmente le due variabili sen. $2p\pi$ e sen. $2q\pi$. Chiamando $\psi(\text{sen.}2p\pi, \text{sen.}2q\pi)$ questa funzione simile, avremo più generalmente

$$(p, q) = \psi(\text{sen.}2p\pi,\ \text{sen.}2q\pi).\ e^{\Sigma L.p + \Sigma L.q - \Sigma L.(p+q)}.$$

La funzione ψ diventa una costante C, quando ambedue i numeri p e q sono interi, e si dimostrerà come sopra che $C = 1$. Lo stesso valore eguale all' unità ha la funzione ψ, allorchè o l' uno o l' altro dei numeri p e q è intero. Supponghiamo infatti che sia tale; ed avremo

$$\Sigma L.q = L.1 + L.2 + L.3 \ldots + L.(q-1) = L.(1.2.3\ldots q-1)$$
$$\Sigma L.(p+1) = \Sigma L.p + L.p$$
$$\Sigma L.(p+2) = \Sigma L.(p+1) + L.(p+1) = \Sigma L.p + L.(p.p+1)$$
$$\Sigma L.(p+3) = \Sigma L.(p+2) + L.(p+2) = \Sigma L.p + L.(p.p+1.p+2)$$
$$\vdots$$
$$\Sigma L.(p+q) = \Sigma L.p + L\,(p.\,p+1.\,p+2\,\ldots\,.\,p+q-1)$$

e per conseguenza

$$(p, q) = \psi(\,\text{sen.}2p\pi,\ 1\,).\,\frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,q-1}{p.\,p+1.\,p+2\,\ldots\,.\,p+q-1}.$$

Ma dall' equazione (2) per mezzo delle continue sostituzioni si deduce nel caso di q numero intero

$$(p, q) = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,q-1}{p+1.\,p+2\,\ldots\,p+q-1}\,.\,(p,\ 1\,) = \frac{1\,.\,2\,\ldots\,q-1}{p.\,p+1\,\ldots\,p+q-1};$$

dunque $\psi(\text{sen. }2p\pi, 1) = 1$, e lo stesso avviene quando p è numero intero.

Se adesso ponghiamo che la funzione ψ conservi il medesimo valore eguale all' unità, anche quando niuno dei due numeri p e q è intero, avremo in generale, qualunque siano p e q,

$$(3)\qquad (p,\ q) = e^{\Sigma L.p + \Sigma L.q - \Sigma L.(\,p+q\,)}.$$

In questa ipotesi, la quale si riduce in sostanza ad ammettere, come comunemente si suole, che in grazia della continuità della funzione (p, q) le di lei proprietà verificate nel caso particolare, in cui uno dei numeri p e q è intero, possano estendersi al caso generale di p e q numeri qualunque, avranno luogo le considerazioni seguenti.

Abbiamo osservato che $\Sigma\, \mathrm{L}.p$ è eguale al logaritmo del prodotto $1.2.3\ldots p-1$, quando p è un numero intero. Allorchè p è la metà di un numero intero dispari, il valore della medesima funzione può esprimersi per mezzo del logaritmo della circonferenza del circolo. Sia primieramente $p = q = \frac{1}{2}$, e l'equazione (3) ci darà $2\Sigma\mathrm{L}.\frac{1}{2} = \mathrm{L}.\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, ma $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x-x^2)}}$, che posta $x = y^2$ diventa $\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = \pi$, dunque $\Sigma\mathrm{L}.\frac{1}{2} = \mathrm{L}.\sqrt{\pi}$. Ora dall' equazione $\Sigma\,\mathrm{L}.(p+1) = \Sigma\mathrm{L}.p + \mathrm{L}.p$ si deduce $\Sigma\mathrm{L}.\frac{3}{2} = \mathrm{L}.\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)$, $\Sigma\mathrm{L}.\frac{5}{2} = \mathrm{L}.\left(\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\sqrt{\pi}\right)$ e generalmente $\Sigma\mathrm{L}.\frac{2i+1}{2} = \mathrm{L}.\left(\frac{1.3.5\ldots 2i-1}{2^i}\sqrt{\pi}\right)$, ed

$$e^{\Sigma\mathrm{L}.\frac{2i+1}{2}} = \frac{1.3.5\ldots 2i-1}{2^i}\sqrt{\pi}.$$

Fuori di questi casi il valore di $\Sigma\mathrm{L}.p$ è legato con quello della trascendente $\int_0^1 dx\left(\mathrm{L}.\frac{1}{x}\right)^{p-1}$, come vedremo in seguito.

Ritorniamo all' equazione generale (3), la quale posto $p+q$ in luogo di p ed r in luogo di q si cangia nella seguente

$$(p+q, r) = e^{\Sigma\mathrm{L}.(p+q) + \Sigma\mathrm{L}\,r - \Sigma\mathrm{L}(p+q+r)}.$$

Sarà dunque

$$(p, q)\cdot(p+q, r) = e^{\Sigma\mathrm{L}.p + \Sigma\mathrm{L}.q + \Sigma\mathrm{L}\,r - \Sigma\mathrm{L}.(p+q+r)}$$

e siccome il secondo membro di questa equazione si mantiene sempre lo stesso, in qualunque modo si permutino tra di loro le lettere p, q ed r, se ne può concludere la nota relazione scoperta dall' Eulero.

$$(4) \qquad (p,q).(p+q,r)=(p,r).(p+r,q)=(q,r).(q+r,p).$$

Passiamo all' integrale definito $\int_0^1 dx\left(L.\frac{1}{x}\right)^{a-1}$, che il Sig. Legendre denota col segno Γa, e relativamente al quale ha luogo l' equazione

$$\Gamma(a+1)=a\Gamma a.$$

Prendendo i logaritmi avremo

$$L.\Gamma(a+1)-L.\Gamma a=\Delta L.\Gamma a=L.a$$

e quindi integrando $L.\Gamma a=\Sigma L.a+L.\varphi(\text{sen}.2a\pi)$, e passando dai logaritmi ai numeri

$$\Gamma a=\varphi(\text{sen}.\,2a\pi).\,e^{\Sigma L.a}.$$

Quando a è un numero intero qualunque, la funzione $\varphi(\text{sen}.\,2a\pi)$ si riduce ad una costante C', e se determiniamo come sopra l' integrale $\Sigma L.a$ in modo, che svanisca quando $a=1$, avremo $\Gamma 1=1=C'e^{\Sigma L.1}=C'$, e $\Gamma a=e^{\Sigma L.a}$. Se adesso ponghiamo che la funzione $1.2.3....a-1=e^{\Sigma L.a}$, la quale è espressa da Γa quando a è un numero intero, sia egualmente rappresentata dalla medesima funzione Γa, quando a è un numero qualunque, la quale ipotesi ammetteremo sempre nelle ricerche seguenti; avremo in generale per qualsivoglia valore di a

$$(5) \qquad \Gamma a=e^{\Sigma L.a}.$$

Questa espressione della trascendente Γa non offre per verità alcun nuovo vantaggio per la di lei valutazione, ma serve a dimostrarne molto semplicemente le proprietà, come tra poco vedremo. Intanto se nella equazione (4) sostituiamo ad $e^{\Sigma L.p}$, $e^{\Sigma L.q}$, $e^{\Sigma L.(p+q)}$ i rispettivi valori Γp, Γq, $\Gamma(p+q)$, otterremo immediatamente la relazione trovata dal Sig. Legendre

$$(6)\qquad (p, q) = \frac{\Gamma p\,\Gamma q}{\Gamma(p+q)}$$

per mezzo della quale si riferisce il valore della trascendente (p, q) a quello di Γp.

Consideriamo adesso la funzione $\Gamma 2x$, per la quale ha luogo l' equazione

$$\Gamma(2x+1) = 2x\Gamma 2x.$$

Prendendo i logaritmi abbiamo

$$L.\Gamma(2x+1) - L.\Gamma 2x = L.2 + L.x$$

cioè indicando col segno $\Delta^{(\frac{1}{2})}\phi x$ la differenza finita di $\phi.x$, quando quella di x è $= \frac{1}{2}$

$$\Delta^{(\frac{1}{2})} L.\Gamma 2x = L.2 + L.x$$

ed integrando

$$L.\Gamma 2x = 2xL.2 + \Sigma^{(\frac{1}{2})} L.x + L.C$$

e passando dai logaritmi ai numeri

$$\Gamma 2x = C 2^{2x} . e^{\Sigma^{(\frac{1}{2})} Lx}.$$

Se prendiamo l' integrale $\Sigma^{(\frac{1}{2})} L.x$ in modo che si annulli quando $x = \frac{1}{2}$, avremo per determinare la costante C l' equazione $\Gamma 1 = 1 = 2C$, cioè $C = \frac{1}{2}$, e

$$\Gamma 2x = 2^{2x-1} . e^{\Sigma^{(\frac{1}{2})} L.x}.$$

L' integrale $\Sigma^{(\frac{1}{2})}$ può esprimersi per mezzo di un altro integrale Σ, rapporto al quale sia $\Delta x = 1$. Ponghiamo infatti $\Sigma^{(\frac{1}{2})} L.x = \Sigma P_x$, e prendendo la differenza $\Delta^{(\frac{1}{2})}$ avremo

$$L.x = \Sigma(P_{x+\frac{1}{2}} - P_x).$$

Ora perchè sia soddisfatta questa equazione è necessario che si abbia

$$P_{x+\frac{1}{2}} - P_x = L.(x+1) - L.x = L.(x+1) - L.(x+\tfrac{1}{2})$$
$$+ L.(x+\tfrac{1}{2}) - L.x$$

o sia

$$\Delta^{(\frac{1}{2})}P_x = \Delta^{(\frac{1}{2})}L.x + \Delta^{(\frac{1}{2})}L.(x+\tfrac{1}{2})$$

onde si deduce mediante l' integrazione

$$P_x = L.x + L.(x+\tfrac{1}{2}) + L.c$$

e per conseguenza

$$\Sigma^{(\frac{1}{2})}L.x = \Sigma L.x + \Sigma L.(x+)\tfrac{1}{2} + \Sigma L.c.$$

Essendo, come sopra, $\Sigma L.\,1 = 0$, abbiamo nel caso di $x = \frac{1}{2}$

$$\Sigma^{(\frac{1}{2})}L.\tfrac{1}{2} = 0 = \Sigma L.\tfrac{1}{2} + \Sigma L.c,$$

dunque $\Sigma L.c = -\Sigma L.\frac{1}{2}$, e

$$\Gamma 2x = 2^{2x-1}\,.\,e^{\Sigma L.x + \Sigma L.(x+\frac{1}{2}) - \Sigma L.\frac{1}{2}}$$
$$= 2^{2x-1}\,.\,\frac{\Gamma x.\Gamma(x+\frac{1}{2})}{\Gamma\frac{1}{2}}.$$

Più generalmente l' equazione

$$\Gamma(ix+1) = ix\,\Gamma\, ix$$

ove i è un numero intero, ci darà

$$L.\Gamma(ix+1) - L.\Gamma ix = \Delta^{\left(\frac{1}{i}\right)}L.\Gamma ix = L.i + Lx$$

$\Delta^{\left(\frac{1}{i}\right)}$ rappresentando la differenza finita, quando x varia di $\frac{1}{i}$. Dunque avremo integrando

$$L.\Gamma ix = ixL.i + \Sigma^{\left(\frac{1}{i}\right)} L.x + L.\ C$$

e passando dai logaritmi ai numeri

$$\Gamma ix = Ci^{ix} . e^{\Sigma^{\left(\frac{1}{i}\right)} L.x} .$$

Supposto che l'integrale $\Sigma^{\left(\frac{1}{i}\right)} L.x$ cominci da $x = \frac{1}{i}$, per questo valore di x sarà $\Gamma 1 = 1 = Ci$, cioè $C = \frac{1}{i}$, e

$$\Gamma ix = i^{ix-1} . e^{\Sigma^{\left(\frac{1}{i}\right)} L.x} .$$

Facciamo $\Sigma^{\left(\frac{1}{i}\right)} L.x = \Sigma Q_x$, e prendendo la differenza $\Delta^{\left(\frac{1}{i}\right)}$ avremo $Q_{x+\frac{1}{i}} - Q_x = L.(x+1) - L.x$
$= L.(x+1) - L.\left(x + \frac{i-1}{i}\right) + L.\left(x + \frac{i-1}{i}\right) \ldots + L.\left(x + \frac{1}{i}\right) - Lx$
cioè

$$\Delta^{\left(\frac{1}{i}\right)} Q_x = \Delta^{\left(\frac{1}{i}\right)} \left[Lx + L.\left(x + \frac{1}{i}\right) + L.\left(x + \frac{2}{i}\right) \right.$$
$$\left. \ldots , \ldots + L.\left(x + \frac{i-1}{i}\right) \right]$$

dalla qual'equazione si ricava

$$\Sigma^{\left(\frac{1}{i}\right)} L.x = \Sigma Q_x = \Sigma\left[L.x + L.\left(x+\frac{1}{i}\right) + L.\left(x+\frac{2}{i}\right)\right.$$

$$\left.\ldots\ldots + L.\left(x+\frac{i-1}{i}\right)\right] + C'$$

e posto $x = \frac{1}{i}$

$$\Sigma^{\left(\frac{1}{i}\right)} L.\frac{1}{i} = 0 = \Sigma\left(L.\frac{1}{i} + L.\frac{2}{i} \;\ldots\ldots + L.\frac{i-1}{i}\right) + C'$$

e per conseguenza

$$C' = -\Sigma L.\frac{1}{i} - \Sigma L.\frac{2}{i} \ldots\ldots - \Sigma L.\frac{i-1}{i}.$$

Dunque sarà

$$\Gamma ix = i^{ix-1} \cdot \frac{e^{\Sigma L.x + \Sigma L\left(x+\frac{1}{i}\right) + \Sigma L.\left(x+\frac{2}{i}\right) \ldots + \Sigma L.\left(x+\frac{i-1}{i}\right)}}{e^{\Sigma L.\frac{1}{i} + \Sigma L.\frac{2}{i} \ldots + \Sigma L\frac{i-1}{i}}}$$

$$= i^{ix-1} \cdot \frac{\Gamma x.\Gamma\left(x+\frac{1}{i}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{i}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(x+\frac{i-1}{i}\right)}{\Gamma\frac{1}{i}.\Gamma\frac{2}{i}.\Gamma\frac{3}{i}\ldots\Gamma\frac{i-1}{i}}$$

alla qual' equazione è giunto il Sig. Legendre dopo una serie non breve d'ingegnosi ragionamenti. E poichè per un Teorema dell' Eulero, dimostrato dal Sig. Lacroix nel Trattato delle Differenze e delle Serie pag. 460. è

$$\Gamma\frac{1}{i}.\Gamma\frac{2}{i}.\Gamma\frac{3}{i}\ldots\ldots\Gamma\frac{i-1}{i} = \frac{(2\pi)^{\frac{i-1}{2}}}{\sqrt{i}},$$

avrassi

$$(7)\quad \Gamma ix = i^{ix-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Gamma x.\Gamma\left(x+\frac{1}{i}\right).\Gamma\left(x+\frac{2}{i}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{i-1}{i}\right)}{(2\pi)^{\frac{i-1}{2}}}.$$

Abbiamo dato la precedente dimostrazione di questo importante ritrovato, perchè ci è sembrata meritevole di qualche considerazione, quantunque il medesimo resultato si possa ottenere con molto maggior semplicità nel modo che segue. Ponendo nell' equazione

$$\Gamma(ix+1)=ix\Gamma ix$$

successivamente $x+\frac{1}{i}$, $x+\frac{2}{i}$, ec. in luogo di x troveremo

$$\begin{aligned}\Gamma(ix+2)&=(ix+1)\Gamma(ix+1)=ix(ix+1)\Gamma ix\\ \Gamma(ix+3)&=(ix+2)\Gamma(ix+2)=ix(ix+1)(ix+2)\Gamma ix\\ &\vdots\\ \Gamma(ix+i)&=ix(ix+1)(ix+2)\ldots\ldots(ix+i-1)\Gamma ix\\ &=i^ix\left(x+\frac{1}{i}\right)\left(x+\frac{2}{i}\right)\ldots\left(x+\frac{i-1}{i}\right)\Gamma ix.\end{aligned}$$

Presi i logaritmi da una parte e dall' altra sarà

$$\mathrm{L}.\Gamma(ix+i)-\mathrm{L}.\Gamma ix=\Delta\mathrm{L}.\Gamma ix=i\mathrm{L}i+\mathrm{L}.x$$
$$+\mathrm{L}.\left(x+\frac{1}{i}\right)\ldots\ldots+\mathrm{L}.\left(x+\frac{i-1}{i}\right)$$

ed integrando avremo

$$\mathrm{L}\Gamma ix=ix\mathrm{L}.i+\Sigma\mathrm{L}.x+\Sigma\mathrm{L}.\left(x+\frac{1}{i}\right)\ldots+\Sigma\mathrm{L}.\left(x+\frac{i-1}{i}\right)+\mathrm{C}.$$

Supposto al solito $\Sigma\mathrm{L}.1=0$, se facciamo $x=\frac{1}{i}$, otterremo

$$\mathrm{C}=-\mathrm{L}.i-\Sigma\mathrm{L}.\frac{1}{i}-\Sigma\mathrm{L}.\frac{2}{i}\ldots\ldots-\Sigma\mathrm{L}.\frac{i-1}{i}$$

e passando dai logaritmi ai numeri

$$\Gamma ix=i^{ix-1}.\frac{\Gamma x.\Gamma\left(x+\frac{1}{i}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{i-1}{i}\right)}{\Gamma\frac{1}{i}.\Gamma\frac{2}{i}\ldots\ldots\Gamma\frac{i-1}{i}}$$

come sopra.

Differenziando logaritmicamente l'equazione $\Gamma(p+1)=p\Gamma p$

avremo $\frac{dL.\Gamma(p+1)}{dp} = \frac{dL.\Gamma p}{dp} + \frac{1}{p}$, o sia denotando la funzione $\frac{dL.\Gamma p}{dp}$ col segno $Z'p$

$$(8) \qquad Z'(p+1) = Z'p + \frac{1}{p}.$$

Questa equazione a differenze finite integrata ci dà

$$Z'p = \Sigma\,\frac{1}{p} + Z'1$$

se supponghiamo determinato l'integrale $\Sigma\,\frac{1}{p}$ in modo che svanisca quando $p = 1$.

Posto $\frac{p}{2}$ in luogo di p l'equazione (8) diventa

$$Z'\left(\frac{p+2}{2}\right) - Z'\left(\frac{p}{2}\right) = \Delta^{(2)} Z'\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{2}{p}$$

se indichiamo col segno $\Delta^{(2)}$ la differenza finita, quando p varia di 2. Dunque avremo integrando

$$(9) \qquad Z'\left(\frac{p}{2}\right) = 2\,\Sigma^{(2)}.\frac{1}{p} + Z'1$$

nella ipotesi che $\Sigma^{(2)}.\frac{1}{p}$ si renda nullo nel caso di $p = 2$.

Per mezzo di questi principj si possono facilmente assegnare i valori degl'integrali definiti $\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{1-x} = (p, 0)$ ed $\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{1+x}$. Relativamente al primo abbiamo $(p+1, 0) - (p, 0) = \Delta(p, 0) = -\int_0^1 x^{p-1}\,dx = -\frac{1}{p}$, e quindi $(p, 0) = (1, 0) - \Sigma.\frac{1}{p} = (1, 0) + Z'1 - Z'p$. Per eliminarne la costante $(1, 0)$, che è infinita, prendendo un'altra funzione $(r, 0)$ avremo egualmente $(r, 0) = (1, 0) + Z'1 - Z'r$, e $(p, 0) - (r, 0) = Z'r - Z'p$. Sarà dunque

$$(10) \qquad Z'r - Z'p = \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{r-1}}{1-x}\,dx$$

e posta $p = 1$

$$(11) \qquad Z'r = Z'1 + \int_0^1 \frac{1 - x^{r-1}}{1-x}\, dx$$

come ha trovato per altra strada il Sig. Legendre a pag. 45. T. II. dei suoi Esercizj.

Facendo $\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{1+x} = F.p$ avremo

$$F.(p+1) + F.p = \int_0^1 x^{p-1}\, dx = \frac{1}{p},$$

la qual' equazione cangiando p in $p+1$ diventa

$$F.(p+2) + F.(p+1) = \frac{1}{p+1}$$

e sottraendo da questa la precedente

$$F.(p+2) - F.p = \Delta^{(2)} F.p = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p}$$

che integrata ci dà

$$F.p = \Sigma^{(2)}.\frac{1}{p+1} - \Sigma^{(2)}.\frac{1}{p} + C'.$$

e preso l' integrale $\Sigma^{(2)}.\frac{1}{p}$ come sopra nell'equazione (9) avremo per determinare la costante C'

$$F.1 = L.2 = -\Sigma^{(2)}.1 + C',$$

cioè sarà $C' = L.2 + \Sigma^{(2)}.1$, e

$$F.p = L.2 + \Sigma^{(2)}.1 + \Sigma^{(2)}.\frac{1}{p+1} - \Sigma^{(2)}.\frac{1}{p}$$

$$= L.2 + \frac{1}{2} Z'.\frac{1}{2} - \frac{1}{2} Z'1 + \frac{1}{2} Z'\left(\frac{p+1}{2}\right) - \frac{1}{2} Z'\left(\frac{p}{2}\right).$$

E siccome per l'equazione (10) è $Z'\frac{1}{2} - Z'1 = \int_0^1 \frac{1 - x^{-\frac{1}{2}}}{1-x} dx$ che posto $x = y^2$ diventa $-2\int_0^1 \frac{dy}{1+y} = -2L.2$, otterremo finalmente

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{1+x} = \frac{1}{2} Z'\left(\frac{p+1}{2}\right) - \frac{1}{2} Z'\left(\frac{p}{2}\right).$$

Convien però osservare che questo resultato si può più semplicemente dedurre dall'equazione (10), come ha fatto il Sig. Legendre (Eserc. T. II. pag. 157.).

I medesimi principj somministrano una facile dimostrazione di un altro bel Teorema dello stesso Autore. Se col segno $\psi(x^n)$ rappresentiamo la somma della serie infinita

$$\frac{1}{x^n} + \frac{1}{(x+1)^n} + \frac{1}{(x+2)^n} + \frac{1}{(x+3)^n} + \&c.$$

ove n è un numero intero positivo, avremo differenziando

$$\frac{d\psi(x^n)}{dx} = -n\left(\frac{1}{x^{n+1}} + \frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+1)^{n+2}} + \text{ec.}\right) = -n\psi(x^{n+1})$$

e quindi

$$\psi\,(x^n) = \frac{(-1)^{n-1}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots n-1} \cdot \frac{d^{n-1}\psi(x)}{dx^{n-1}}.$$

Rimane a trovarsi il valore di

$$\psi(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \text{ec.}$$

al quale oggetto ponendo $x+1$ in luogo di x otterremo

$$\psi(x+1) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \text{ec.} = \psi\,(x) - \frac{1}{x}$$

cioè $\psi(x) = \psi(1) - \Sigma.\,\frac{1}{x}$, ove $\Sigma\,\frac{1}{x}$ deve determinarsi al solito in modo che sia nullo quando $x=1$, e la costante $\psi(1)$ è infinita ed $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \text{ec.}$ Sostituendo a $\Sigma.\,\frac{1}{x}$ il suo valore $Z'x - Z'1$ avremo

$$\psi(x) = \psi(1) + Z'1 - Z'x = \psi(1) + Z'1 - \frac{dL\Gamma x}{dx}$$

e per conseguenza

$$\psi\left(\overset{n}{x}\right)=\frac{(-1)^n}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,n-1}\cdot\frac{d^n\mathrm{L}.\Gamma x}{dx^n}$$

(Eserc. T. II. pag. 17.).

Per mostrare con un altro esempio l'uso, che può avere il calcolo delle differenze finite in questo genere di ricerche, proponghiamoci di trovare il valore dell' integrale definito $\int_0^\infty\frac{(e^{-nx}-1)^k\,.\,e^{-mx}dx}{x}$, ove m ed n sono numeri qualunque, e k un numero positivo intero e >0. Supposta n costante questo integrale è una funzione di k e di m, che indicheremo col segno $\mathrm{F}(k,m)$, e se in luogo di k porremo $k+1$ avremo

$$\int_0^\infty\frac{(e^{-nx}-1)^{k+1}\,.\,e^{-mx}dx}{x}=\int_0^\infty\frac{(e^{-nx}-1)^k\,.\,e^{-(m+n)\,x}dx}{x}$$
$$-\int_0^\infty\frac{(e^{-nx}-1)^k\,.\,e^{-mx}dx}{x}$$

che è qnanto dire

$$\mathrm{F}(k+1,m)=\mathrm{F}(k,m+n)-\mathrm{F}(k,m)=\Delta\mathrm{F}(k,m)$$

nella ipotesi che la differenza Δm sia $=n$. Pertanto sarà

$$\mathrm{F}(k,m)=\overset{k-1}{\Delta}.\,\mathrm{F}(1,m)$$

ove resta a conoscersi il valore di $\mathrm{F}(1,m)=\int_0^\infty\frac{(e^{-nx}-1).\,e^{-mx}dx}{x}$.

Ma abbiamo $\frac{d\mathrm{F}(1,m)}{dm}=-\int_0^\infty(e^{-nx}-1).e^{-mx}dx=-\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m}$, ed integrando $\mathrm{F}(1,m)=-\mathrm{L}.(m+n)+\mathrm{L}.m=-\Delta\mathrm{L}.m$, ove tralascio la costante perchè $\mathrm{F}(1,m)$ svanisce quando $n=0$. Dunque

$$\int_0^\infty\frac{(e^{-nx}-1)^k\,.\,e^{-mx}dx}{x}=-\overset{k}{\Delta}\mathrm{L}.m.$$

Se moltiplichiamo questa equazione per $\overset{i}{dm}$, e ne prendiamo i volte l' integrale, avremo

$$\int_0^\infty\frac{(e^{-nx}-1)^k\,.\,e^{-mx}dx}{x^{i+1}}=(-1)^{i+1}\overset{i}{\int}\overset{i}{dm}\overset{k}{\Delta}\mathrm{L}.m$$
$$=(-1)^{i+1}\overset{k}{\Delta}\overset{i}{\int}\overset{i}{dm}\mathrm{L}.m$$

Ora $\int dm \mathrm{L}.m = m\mathrm{L}.m - m + \mathrm{C}$

$$\int^2 dm^2 \mathrm{L}.m = \frac{m^2}{2}\mathrm{L}.m - \frac{3}{4}m^2 + \mathrm{C}m + \mathrm{C}'$$

$$\int^3 dm^3 \mathrm{L}.m = \frac{m^3}{2.3}\mathrm{L}.m - \frac{11}{36}m^3 + \frac{\mathrm{C}m^2}{2} + \mathrm{C}'m + \mathrm{C}''$$

ec.

dunque $\int^i dm^i \mathrm{L}.m$ avrà in generale la forma

$$\int^i dm^i \mathrm{L}.m = \frac{m^i \mathrm{L}m}{2\,.\,3\ldots i} + am^i + a'm^{i-1} + a''m^{i-2} \ldots . + a^{(i)}$$

essendo a, a'. . . . $a^{(i)}$ costanti indipendenti da m. E se osserviamo che è

$$\Delta^k (am^i + a'm^{i-1} + a''m^{i-2} \ldots\ldots + a^{(i)}) = 0$$

quando k è $=$, o $> i + 1$, come noi supponghiamo, sarà in questo caso

$$(a) \qquad \int_0^\infty \frac{(e^{-nx}-1)^k \,.\, e^{-mx} dx}{x^{i+1}} = \frac{(-1)^{i+1}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\ldots.\,i}\,\Delta^k .\, m^i \mathrm{L}.m.$$

Se facciamo $e^{-x} = y$, l' integrale $\int_0^\infty \frac{(e^{-nx}-1)^k \,.\, e^{-mx} dx}{x^{i+1}}$ si cangerà in $\frac{1}{(-1)^{i+1}}\int_0^1 \frac{(y^n-1)^k \,.\, y^{m-1} dy}{(\mathrm{L}.\,y)^{i+1}}$, e perciò

$$\int_0^1 \frac{(y^n-1)^k \,.\, y^{m-1} dy}{(\mathrm{L}.y)^{i+1}} = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\ldots.\,i}\,\Delta^k .\, m^i \mathrm{L}.m$$

purchè sia $k =$, o $> i + 1$, perchè altrimenti quell' integrale sarebbe infinito. E ponendo $k = i + 1$ avremo

$$\int_0^1 \left(\frac{y^n-1}{\mathrm{L}.y}\right)^{i+1} .\, y^{m-1} dy = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\ldots.\,i}\,\Delta^{i+1} .\, m^i \mathrm{L}.m$$

lo che combina col resultato ottenuto dal Sig. Legendre nella terza parte de' suoi Esercizj pag. 372.

Consideriamo adesso i due integrali

$$u = \int_0^\infty \frac{(e^{-nx}-1)^k \,.\, e^{-mx} dx \cos ax}{x^{i+1}}\,,\quad t = \int_0^\infty \frac{(e^{-nx}-1)^k \,.\, e^{-mx} dx \,\mathrm{sen.}\, ax}{x^{i+1}}$$

e ponendo in luogo di cos.ax e di sen.ax i loro valori espressi per gli esponenziali immaginarj troveremo

$$u = \int_0^\infty \frac{(e^{-nx} - 1)^k}{x^{i+1}} \cdot \frac{e^{-(m - a\sqrt{-1})x} + e^{-(m+a\sqrt{-1})x}}{2} dx$$

$$t = \int_0^\infty \frac{(e^{-nx} - 1)^k}{x^{i+1}} \cdot \frac{e^{-(m - a\sqrt{-1})x} - e^{-(m+a\sqrt{-1})x}}{2\sqrt{-1}} dx.$$

Dunque sarà per l' equazione (a)

$$u = \frac{(-1)^{i+1}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots .i} \Delta^k \,.\, \frac{(m-a\sqrt{-1})^i \mathrm{L}.(m-a\sqrt{-1}) + (m+a\sqrt{-1})^i \mathrm{L}.(m+a\sqrt{-1})}{2}$$

$$t = \frac{(-1)^{i+1}}{1.2.3.\ldots.i} \Delta^k \,.\, \frac{(m-a\sqrt{-1})^i \mathrm{L}.(m-a\sqrt{-1}) - (m+a\sqrt{-1})^i \mathrm{L}.(m+a\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

e fatta la riduzione delle quantità immaginarie

$$u = \frac{(-1)^{i+1}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\ldots.\, i} \Delta^k .r^i(\cos.i\beta x \mathrm{L}.r - \beta \operatorname{sen}.i\beta)$$

$$t = \frac{(-1)^i}{1.2.3 \ldots.i} \Delta^k .r^i(\operatorname{sen}.i\beta x \mathrm{L}.r + \beta \cos.i\beta)$$

ove r è $= \sqrt{(m^2 + a^2)}$, e β l' arco che ha per tangente $\frac{a}{m}$.

SULLA TRASFORMAZIONE DELLE FORMOLE INTEGRALI DUPLICATE E TRIPLICATE

MEMORIA

DEL SIGNOR

DOTTOR GABRIO PIOLA

Ricevuta adì 16. *Giugno* 1828.

Nella teorica della trasformazione delle formole integrali duplicate e triplicate due ricerche, per quanto a me pare, possono ancora farsi. È la prima una dimostrazione accomodata al metodo delle funzioni analitiche dove le lettere non indicano se non i posti occupati da quantità qualsivògliano, è la seconda uno schiarimento intorno ai limiti tra i quali si debbono definire gl' integrali trasformati. Si può credere che alla prima domanda abbia soddisfatto nella Teorica delle funzioni (1) il Lagrange; ma il suo discorso presenta ancora quel principio di una variabilità assunta e dimessa alternativamente dalle indeterminate, che è il fondamento della dimostrazione data la prima volta da Eulero: e non sembra totalmente conforme allo spirito di chi scrisse che le funzioni derivate e le primitive si deducono le une dalle altre per mezzo di quantità che entrano in questa operazione in un modo puramente istrumentale (2). L'altra parte della questione è toccata in varii Autori che nelle diverse applicazioni ne diedero implicitamente la soluzione: ma non fu, per quello che è a mia cognizione, trattata di proposito. In tale stato di cose, vedendo che i due teoremi per la trasformazione delle formole integrali duplicate e triplicate erano di tutta importanza nella Geometria e principalmente nella Meccanica, mi sono formato la seguente analisi, la quale potrebbe riuscire ad altri utile come lo fu a me per riconoscere chiaramente la verità di quei due teoremi; ed io spero che chi vorrà pazientemente seguirmi nei calcoli e nei ragionamenti, troverà una risposta adequata alle due proposte ricerche.

---

(1) Thèor. des fonct. P. 2. n. 81.

(2) Leçons sur les fonct. pag. 15. Edit. in 8.

§. I.

Trasformazione delle formole integrali duplicate.

1. Premetto un cenno relativo agli integrali semplici. Si desume dalla natura delle funzioni analitiche questo principio; che l'integrale $\int dx\varphi(x)$ preso per la x, che sta nella funzione $\varphi(x)$ come una variabile semplice, e tenuto incompleto somministra una funzione di x ove, se al luogo di detta lettera si mette un'altra funzione qualsivoglia $x[p]$ di una nuova variabile p, si ha lo stesso resultato che si sarebbe ottenuto immediatamente dall' integrale $\int dp\varphi(x[p])x'[p]$ tenuto parimenti incompleto; dove $x'[p]$ indica la derivata della $x[p]$ per la p al modo Lagrangiano omai generalmente adottato, e che sempre useremo anche in seguito.

2. Conseguenza diretta del principio antecedente si è che definendo l'integrale $\int dx\varphi(x)$ e dando alla variabile nei due limiti i valori $x[a]$, $x[b]$ si ha lo stesso risultato che si ottiene dall'integrale $\int dp\varphi(x[p])x'[p]$ definito fra i limiti a, b. Il teorema può scriversi come segue

$$(1) \qquad \int_{x[a]}^{x[b]} dx\varphi(x) = \int_{a}^{b} dp\varphi(x[p])\,x'[p] \qquad (*)$$

(*) Questa maniera di scrivere gl'integrali definiti ponendo ai piedi del segno $\int$ la quantità che esprime il valore della variabile nel primo limite, e in

3. Propongasi l'integrale duplicato

$$\int dx \int dy\, V(x, y)$$

e si cerchi nella ipotesi che le due variabili debbano mantenersi sempre fra di loro affatto indipendenti: eseguita la doppia operazione, si otterrà una funzione delle due variabili x, y, che indichiamo per $U(x, y)$, a cui se aggiungasi una somma $F(x)+\psi(y)$ di due funzioni arbitrarie, avrassi, come è noto, l'integrale duplicato completo. Non parlando ora di questa aggiunta, e riguardando il solo integrale $U(x, y)$ indefinito ed incompleto, diciamo che se in luogo delle x, y si pongano due funzioni qualsivogliano $x[p]$, $y[q]$ la prima della nuova variabile p, e la seconda della nuova variabile q, l'integrale duplicato

$$\int dp \int dq\, V(x[p], y[q])\, x'[p]\, y'[q]$$

sarà espresso da $U(x[p], y[q])$ essendo la forma U quella stessa trovata precedentemente. Ciò discende immediatamente dal principio esposto nel n. 1. Di simili integrali duplicati, è notissimo che l'ordine da tenersi nelle integrazioni è arbitrario, potendosi cominciare da quella delle due variabili che più piace.

4. Ma gl' integrali duplicati, di cui ora si è discorso, non sono quelli di uso frequente nelle matematiche: tali sono invece altri integrali duplicati nei quali le variabili rimangono fra di loro indipendenti in una sola integrazione. Dice Eulero (*) che di questi e dei primi grandissima è la differenza; perchè quantunque nella prima integrazione si proceda egualmente, quando si passa all'altra integrazione, la variabile che nel primo caso si tratta come una costante, diventa invece in ambi i limiti del primo integrale funzione dell'altra variabile. Nondimeno l'inversione nell'ordine delle integrazioni de-

---

alto quella che esprime il valore della variabile nel secondo limite, è stata la prima volta introdotta dal Sig. *Fourier*: si adotta in questa memoria essendo essa presentemente accettata da tutti i Geometri Francesi.

(*) Cal. Int. T. IV. Supp. VI. §. 7.

ve ammettersi anche in questo secondo caso, purchè facciasi nel modo che siam per dire; come si conosce chiaramente tenendo di mira il fine a cui è indirizzata la ricerca dei detti integrali duplicati. Infatti la regola che si tiene è questa: eseguita sulla $V(x,y)$ la prima integrazione per y, si definisce il trovato integrale fra due valori di y

$$(2) \qquad y=y_1(x) \quad ; \quad y=y_2(x)$$

che sono radici di una stessa equazione data

$$(3) \qquad f(x,y)=0$$

poscia la seconda integrazione per x si estende fra due limiti $x=a$, $x=b$, che sono i valori del massimo o del minimo che prende la x considerata nella precedente equazione come funzione implicita della y: ossia, ciò che è lo stesso, sono due radici di quella equazione a cui si perviene eliminando y fra le due

$$f(x,y)=0; \quad f'(y)=0.$$

Così facendo si sa che nelle applicazioni il valore ottenuto esprime la misura di un qualche concreto, per esempio, la quadratura di una superficie piana circoscritta da una curva continua. Ma essendo quel concreto riferito a due coordinate, non vi è alcuna ragione per la quale una delle variabili debba essere all' altra preferita. Questo è chiarissimo, e ne conseguita che il resultato finale deve essere lo stesso, se si cominci ad integrare dalla x e si estenda l' integrazione fra i limiti $x=x_1(y)$; $x=x_2(y)$ radici della stessa $f(x,y)=0$ e si passi alla seconda integrazione per y estendendola fra i limiti $y=\alpha$, $y=\beta$ radici di quella equazione a cui si giunge eliminando x fra le due $f(x,y)=0$; $f'(x)=0$.

5. Sia dato, come più sopra, l' integrale duplicato $\int dx \int dy V(x,y)$, e l'equazione dei limiti $f(x,y)=0$; e si stabilisca di estendere la prima integrazione per y tra i limiti $y_1(x)$, $y_2(x)$, e la seconda per x tra i limiti a, b. Ora in luogo di y pongasi una funzione qualunque $y[x,p]$ dell'al-

tra variabile x e di una nuova p, e con $y'[p]$ esprimasi la derivata parziale della $y[x,p]$ per la p: si dice che l'integrale duplicato

$$\int dx \int dp \mathrm{V}(x, y[x, p]) y'[p]$$

condurrà allo stesso valore finale se la prima integrazione per p si estenda fra i limiti $p_1(x)$, $p_2(x)$ valori di p cavati alla stessa maniera dalla equazione

$$f(x, y[x, p]) = 0 \tag{4}$$

e la seconda integrazione si estenda fra i limiti a, b come sopra. Ciò sarà provato quando si conosca che la funzione di x preparata per la seconda integrazione, ossia, il che è lo stesso, il resultato della prima integrazione dopo la definizione dell' integrale, sia il medesimo in ambi i casi. L'equazione (1) del n. 2 dà

$$\int_{p_1(x)}^{p_2(x)} dp \, \mathrm{V}(x, y[x,p]) y'[p] = \int_{y[x,p_1(x)]}^{y[x,p_2(x)]} dy \mathrm{V}(x,y) \tag{5}$$

e però la proposizione è provata quando sia vera quest'altra equazione

$$\int_{y[x,p_1(x)]}^{y[x,p_2(x)]} dy \mathrm{V}(x,y) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \mathrm{V}(x,y) \tag{6}$$

la quale suppone le due equazioni

$$y[x, p_1(x)] = y_1(x) \quad ; \quad y[x, p_2(x)] = y_2(x). \tag{7}$$

Ora queste equazioni hanno veramente luogo, come è facile a riconoscere osservando che il ritrovamento delle due $p_1(x)$, $p_2(x)$ radici della equazione (4) conduce primieramente alle due equazioni

$$y[x, p] = y_1(x) \quad ; \quad y[x, p] = y_2(x)$$

le quali, sciolte per p, danno poi i valori $p = p_1(x)$, $p = p_2(x)$; questi valori sostituiti nelle precedenti equazioni da cui sono cavati, debbono evidentemente renderle identiche, e allora si hanno le equazioni (7).

6. Presentemente possiamo proporci la trasformazione generale delle formole integrali duplicate. Sia tutto come al principio del n.° precedente, e siano anche date le due equazioni

(8) $$x=x[p,q] \quad ; \quad y=y[p,q]$$

per le quali le due variabili si esprimono generalmente in funzione di due nuove variabili p, q.

Dalla prima di queste equazioni (8) si può intendere cavata la q in funzione di x, p.

(9) $$q=q(x,p)$$

il qual valore, se sostituiscasi nelle (8), le riduce

(10) $$x=x[p,q(x,p)]$$

(11) $$y=y[p,q(x,p)]$$

Di queste la prima, cioè la (10) deve essere manifestamente un' equazione identica, però insieme con essa sussisteranno tutte le sue derivate tanto per x che per p: gioverà notare le due prime

(12) $$0=x'(p)+x'(q)q'(p)$$

(13) $$1=x'(q)q'(x)$$

l' altra equazione (11) servirà come segue. Vedemmo (n.° prec.) che il valor finale dell'integrale duplicato non muta se pongasi in luogo di y una funzione dell' altra variabile x e di una nuova p, purchè la funzione $V(x,y[x,p])$ si moltiplichi per $y'[p]$, e si prenda il primo integrale per p. Poniamo dunque in luogo di y la $y[p,q(x,p)]$ data dal secondo membro della (11), che è veramente una funzione delle due x, p (non facendo alcuna differenza l' esservi la p in parte esplicita in parte implicita alla $q(x,p)$) solamente avvertiamo che la derivata parziale per la p avrà due termini, dei quali il primo sarà dovuto al p esplicito alla $q(x,p)$ e l' altra al p implicito, sarà cioè

$$y'[p]=y'(p)+y'(q)q'(p).$$

Questa espressione può subire due cangiamenti, in luogo di

$q'(p)$ si potrà porre il suo valore $-\frac{x'(p)}{x'(q)}$ cavato dalla (12) e si avrà

$$y'[p] = \frac{x'(q)y'(p) - y'(q)x'(p)}{x'(q)}$$

poscia si potrà mettere $q'(x)$ in luogo di $\frac{1}{x'(q)}$ in virtù della equazione (13), e così avrassi

$$y'[p] = \{x'(q)y'(p) - y'(q)x'(p)\}\, q'(x)\,;$$

quindi l' integrale duplicato si trasformerà nella espressione

$$(14)\quad \int dx \int dp\, \mathrm{V}(x[p,q(x,p)], y[p,q(x,p)]\}x'(q)y'(p) - y'(q)x'(p)\}q'(x);$$

dove osservo che veramente la V avrebbe dovuto scriversi $\mathrm{V}(x, y[p, q(x,p]))$, ma ho potuto surrogare alla x semplice la quantità $x[p, q(x,p)]$ che gli è eguale per la (10), e nella quale la p non entra che apparentemente.

In questa espressione (14) è da notarsi che anche nel fattore binomiale formato colle derivate parziali

$$x'(q)\,y'(p) - y'(q)\,x'(p)$$

sta dappertutto la quantità composta $q(x,p)$ in luogo della lettera semplice q; talchè se pongasi

$$\mathrm{T}(p,q) = \mathrm{V}(x[p,q], y[p,q])\{x'(q)\,y'(p) - y'(q)x'(p)\}$$

considerando le derivate parziali come dedotte immediatamente dalle equazioni (8), e quindi aventi la q lettera semplice, il precedente integrale duplicato (14) potrà scriversi

$$(15)\qquad \int dx \int dp\, \mathrm{T}(p, q(x,p))\, q'(x).$$

Dal complesso delle cose fin' ora vedute risulta che se si prende il precedente integrale (15) cominciando l'integrazione dalla p ed estendendola fra i limiti $p_1(x), p_2(x)$ dedotti dall'equazione

$$(16)\qquad f(x, y[p, q(x,p)]) = 0$$

e poi si passa alla seconda per x estendendola fra i limiti $x=a$ $x=b$, si avrà lo stesso resultato finale come se, non avendo fatta alcuna trasformazione, si fosse operato alla maniera espressa al principio del n.° 5.

7. Cerchiamo ora se nell' ultimo integral duplicato (14), o (15) si può rovesciare l' ordine delle integrazioni; e osserviamo che questo sarà provato quando si arrivi a dimostrare che i valori $x = a$, $x = b$ limiti della seconda integrazione sono quelli stessi a cui saremmo giunti cercando nella equazione (16) dei limiti i valori del massimo e del minimo della stessa x considerata come funzione di p (n.° 4.). Questo poi è cosa assai facile: perocchè le equazioni, dalle quali, eliminata p, si hanno per x i valori del massimo e del minimo, sono la stessa equazione (16) e quest' altra

$$f'(y)\{y'(p) + y'(q)q'(p)\} = 0$$

ossia, dividendo quest' ultima pel secondo fattore, le due

$$(17)\qquad f(x, y[p, q(x, p)]) = 0 \quad ; \quad f'(y[p, q(x, p)]) = 0.$$

Ora si vede subito che la p si elimina fra quest' ultime due eliminando tutta la funzione $y[p, q(x, p)]$, la quale operazione dà lo stesso resultato che si sarebbe ottenuto eliminando la y lettera semplice fra le due $f(x, y) = 0$; $f'(y) = 0$, come al n.° 4.

8. Pertanto invertiamo le integrazioni nell' integrale duplicato (14) o (15), cioè incominciamo dalla x, integrando fra i limiti $x = x_1(p)$, $x = x_2(p)$ desunti dall' equazione (16), e poi passiamo all' integrazione per p fra i limiti $p = m$, $p = n$ che sono i valori del massimo e del minimo ottenuti eliminando x fra le due

$$(18)\qquad f(x, y[p, q(x, p)]) = 0 \quad ; \quad f'(x) + f'(y)y'(q)q'(x) = 0$$

la qual seconda è la derivata della prima presa per rapporto ad x. Otterremo così primieramente l' integrale

$$(19)\qquad \int_{x_1(p)}^{x_2(p)} dx\, \mathrm{T}(p, q(x, p))q'(x)$$

il quale, pel n.° 2, eguaglierà quest' altro

$$(20)\qquad \int_{q(x_1(p).p)}^{q(x_2(p).p)} dq\, \mathrm{T}(p, q)$$

e quest' ultimo eguaglierà l' integrale

$$(21)\qquad \int_{q_1(p)}^{q_2(p)} dq\, \mathrm{T}(p, q)$$

che è, come si vede, definito fra i limiti $q=q_1(p)$, $q=q_2(p)$, i quali sono radici della equazione

$$(22)\qquad f(x[p, q], y[p, q]) = 0$$

sciolta per q; non essendo questa equazione che la (3) colla sostituzione dei valori (8). Sarà provata l' eguaglianza dei due ultimi integrali quando siano provate le equazioni

$$(23)\qquad q(x_1(p), p) = q_1(p) \quad ; \quad q(x_2(p), p) = q_2(p)$$

e queste provansi nel modo seguente. L'equazione (16) a motivo della (10) può scriversi

$$f(x[p, q(x, p)], y[p, q(x, p)]) = 0$$

Sciogliere ora questa equazione per x e cavarne i valori $x_1(p)$, $x_2(p)$ richiede che prima se ne cavi la quantità composta $q(x, p)$: il che facendo si fa come sciogliendo la (22) per q. Si hanno così per $q(x, p)$ due valori $q(x, p) = q_1(p)$; $q(x, p) = q_2(p)$ e da queste equazioni si hanno poi i valori $x_1(p)$, $x_2(p)$ che risostituiti nelle equazioni stesse mostrano la verità delle equazioni (23).

9. Passando presentemente all' altra integrazione per p, osserviamo che le equazioni (18) a motivo delle (10), (13) possono scriversi

$$f(x[p, q(x, p)], y[p, q(x, p)]) = 0 \; ; \qquad f'(x)x'(q) + f'(y)\, y'(q) = 0$$

e che si elimina fra queste la x eliminando la funzione $q(x, p)$; la qual' ultima operazione conduce allo stesso resultato che l' eliminazione della q espressa con una lettera semplice fra le due

$$(24)\quad f(x[p, q], y[p, q]) = 0 \quad ; \quad f'(x)x'(q) + f'(y)y'(q) = 0 .$$

e questo si sa essere il sistema delle due equazioni dalle quali, eliminata q, si hanno i valori del massimo e del minimo della p considerata nella (22) come funzione implicita della stessa q.

10. Raccogliendo le cose dette nei due numeri precedenti si vede che rovesciando nell'integrale duplicato (15) l'ordine delle integrazioni e prendendo la prima per x fra i limiti $x_1(p)$, $x_2(p)$ desunti dall' equazione (16), e la seconda per p fra i limiti $p=m$, $p=n$ desunti dal sistema delle (18) dopo averne scacciata la x: si ha lo stesso risultato che si ottiene dall' integrale duplicato

$$\int dp \int dq \, \mathrm{T}(p, q)$$

estendendo la prima integrazione per q fra i limiti $q_1(p)$, $q_2(p)$ radici della (22) e la seconda integrazione per p fra i limiti $p=m$, $p=n$ che ottengonsi dal sistema delle (24), scacciata la q. Ma si può (n.° 7.) rovesciar l'ordine delle integrazioni nell' integrale (15) senza alterare il valore finale, e lo stesso integrale (15) preso colle integrazioni dirette (n.° 6. sul fine) eguaglia l'integrale duplicato $\int dx \int dy \mathrm{V}(x, y)$ preso come si è detto al principio del n.° 5: adunque, rimettendo per $\mathrm{T}(p, q)$ il suo valore (n.° 6.), si ha finalmente il Teorema desiderato, cioè

,, L' integrale duplicato $\int dx \int dy \mathrm{V}(x, y)$, presa la prima
,, integrazione per y fra i limiti $y_1(x)$, $y_2(x)$ desunti dall' e-
,, quazione $f(x, y)=0$, e la seconda integrazione per x fra
,, i limiti a, b, che si cavano, scacciata la y, dal sistema del-
,, le due $f(x, y)=0$, $f'(y)=0$: presenta lo stesso valore fi-
,, nale dell' integrale duplicato

$$(25) \qquad \int dp \int dq \mathrm{V}(x[p, q], y[p, q] \{ x'(q) y'(p) - y'(q) x'(p) \}$$

,, prendendo la prima integrazione per q fra i limiti $q_1(p)$,
,, $q_2(p)$ dedotti dall' equazione $f(x[p, q], y[p, q])=0$, e poi
,, la seconda integrazione per p fra i limiti $p=m$, $p=n$ ca-
,, vati dalle due

„ $f(x[p,q],y[p,q])=0 \quad ; \quad f'(x)x'(q)+f'(y)y'(q)=0.$

„ dopo averne eliminata la q.

11. È chiaro (n.° 4) che se nell' integrale duplicato proposto può invertersi l' ordine delle integrazioni, potrà anche invertersi nell' integrale duplicato (25) risultante dopo la trasformazione. Vedemmo infatti che nelle equazioni (24) havvi la stessa relazione formata colle nuove variabili p, q, la stessa dipendenza per la ricerca del massimo e del minimo che al n.° 4. ci persuase ad ammettere l' inversione. Se dunque l' integrale (25) s' incomincia da p e si estende fra due limiti $p_1(q)$, $p_2(q)$ radici dell' equazione $f(x[p,q],y[p,q])=0$, e poi si passa alla seconda integrazione per q estendendola fra i limiti $q=\mu$, $q=\nu$ che si ottengono dalle equazioni

$$f(x[p,q],y[p,q])=0 \quad ; \quad f'(x)x'(p)+f'(y)y'(p)=0$$

dopo avere eliminata la p: si avrà lo stesso valore di prima, e il valor finale sarà ancora eguale a quello che si ha dall' integrale duplicato $\int dx \int dy V(x,y)$ preso alla maniera più volte esposta.

12. Rimane ad avvertire, come fanno tutti gli Autori, che il binomio

$$x'(q)y'(p)-y'(q)x'(p)$$

può a piacimento avere il segno contrario: il che si fa manifesto ripetendo da capo le operazioni esposte in questo paragrafo e solo cambiando (ciò che è in pieno arbitrio) fra di loro le variabili x, y.

§. II.

Trasformazione delle formole integrali triplicate.

13. Propongasi l' integrale triplicato

$$(26) \qquad \int dx \int dy \int dz V(x,y,z)$$

e l' equazione dei limiti

$$f(x, y, z) = 0 ; \tag{27}$$

la regola che si tiene in queste integrazioni è la seguente. Si prende ad arbitrio l'ordine delle variabili per le quali debbonsi eseguire le tre integrazioni, per esempio l'ordine z, y, x: ed è chiaro che può variarsi in sei modi differenti a ciascun dei quali si adatta facilmente, cambiando solo le denominazioni delle lettere, il discorso che esponiamo, supposto l'ordine z, y, x. Si eseguisce la prima integrazione per z, ritenendo costanti le y, x, e la si estende fra i limiti

$$z = z_1(x, y) \quad ; \quad z = z_2(x, y) \tag{28}$$

che sono radici della equazione (27) sciolta per z. Poscia si passa all' altra integrazione per y che si estende fra i limiti

$$y = y_1(x) \quad ; \quad y = y_2(x) \tag{29}$$

i quali sono radici di quella equazione che si ottiene eliminando z fra le due

$$f(x, y, z) = 0 \quad ; \quad f'(z) = 0 \tag{30}$$

e sono i valori del massimo e del minimo che prende la y nella equazione (27) considerata come funzione implicita di quella variabile z per la quale è stata fatta la prima integrazione, ritenuta x costante. In ultimo si fa l'integrazione per x estendendola fra i limiti $x = a$, $x = b$ che si cavano dall' equazione risultante dopo l'eliminazione delle due variabili y, z fra le tre

$$f(x, y, z) = 0 \quad ; f'(z) = 0 \quad ; \ f'(y) = 0 \tag{31}$$

e sono i valori del massimo e del minimo che prende la x nella equazione (27) considerata come funzione implicita delle due variabili y, z.

14. Il valore finale dell' integrale triplicato che si deduce dopo le tre definizioni spiegate nel n.° prec. esprime nelle applicazioni la misura di un qualche concreto, per esempio, la solidità o la massa di un corpo. Siccome però (come si disse al n.° 4. in un caso similissimo) non havvi alcuna ragione per la quale, mentre quel concreto si riferisce a tre

assi ortogonali, si abbia delle tre coordinate a scegliere una in preferenza delle altre: segue di necessità che sortirà sempre lo stesso valore finale qualunque sia l'ordine con cui si prendono le tre variabili nelle integrazioni.

15. La trasformazione generale di questi integrali triplicati si può dimostrare nel modo seguente. Siano date tre equazioni per le quali le tre prime variabili si esprimano col mezzo di tre nuove p, q, r

$$x = x[p, q, r];\ y = y[p, q, r];\ z = z[p, q, r]; \tag{32}$$

e prima di far la sostituzione di questi valori sotto l'integrale triplicato (26) vediamo alcune conseguenze delle poste equazioni (32) che ci saranno necessarie nel progresso.

Immaginiamo che dalle due prime si cavino i valori di q, r per x, y, e p, dimodochè quelle possano esprimersi per queste colle equazioni

$$q = q(x, y, p) \quad ; \quad r = r(x, y, p); \tag{33}$$

se le funzioni che formano i secondi membri di quest'ultime si sostituiscano in luogo di q, r nelle stesse equazioni da cui furono dedotte, si avranno manifestamente le equazioni identiche

$$x = x[p, q(x, y, p), r(x, y, p)];\ y = y[p, q(x, y, p), r(x, y, p)]; \tag{34}$$

e se le medesime funzioni pongansi allo stesso modo nella terza delle (32), avrassi di più quest'altra

$$z = z[p, q(x, y, p), r(x, y, p)]. \tag{35}$$

Ora essendo identiche le equazioni (34) sussisteranno insieme ad esse tutte le loro equazioni derivate prese per p, per x, e per y. Al nostro caso non giovano che quelle di primo ordine; avremo pertanto le due derivate prese rapporto a p che saranno

$$\begin{aligned} 0 &= x'(p) + x'(q)q'(p) + x'(r)r'(p) \\ 0 &= y'(p) + y'(q)q'(p) + y'(r)r'(p), \end{aligned} \tag{36}$$

le due derivate rapporto alla x

$$(37)\qquad \begin{aligned} 1 &= x'(q)\,q'(x) + x'(r)\,r'(x) \\ 0 &= y'(q)\,q'(x) + y'(r)\,r'(x) \end{aligned}$$

e le due rapporto alla y

$$(38)\qquad \begin{aligned} 0 &= x'(q)\,q'(y) + x'(r)\,r'(y) \\ 1 &= y'(q)\,q'(y) + y'(r)\,r'(y). \end{aligned}$$

Si cavano dalle equazioni (36) le due

$$(39)\qquad q'(p) = \frac{x'(r)\,y'(p) - y'(r)\,x'(p)}{x'(q)\,y'(r) - y'(q)\,x'(r)}\,;\quad r'(p) = \frac{x'(p)\,y'(q) - y'(p)\,x'(q)}{x'(q)\,y'(r) - y'(q)\,x'(r)}$$

dalle (37) le due

$$q'(x) = \frac{y'(r)}{x'(q)\,y'(r) - y'(q)\,x'(r)}\quad;\quad r'(x) = \frac{-y'(q)}{x'(q)\,y'(r) - y'(q)\,x'(r)}$$

e dalle (38) le due

$$q'(y) = \frac{-x'(r)}{x'(q)\,y'(r) - y'(q)\,x'(r)}\quad;\quad r'(y) = \frac{x'(q)}{x'(q)\,y'(r) - y'(q)\,x'(r)}\;.$$

Queste ultime quattro poi somministrano

$$q'(x)\,r'(y) - r'(x)\,q'(y) = \frac{x'(q)\,y'(r) - y'(q)\,x'(r)}{(x'(q)\,y'(r) - y'(q)\,x'(r))^2}$$

ossia

$$(40)\qquad q'(x)\,r'(y) - r'(x)\,q'(y) = \frac{1}{x'(q)\,y'(r) - y'(q)\,x'(r)}\;.$$

16. Richiamo l' equazione (35) e la derivo per rapporto a p, indicando per $z'[p]$ la derivata di z per la p tanto esplicita che implicita alle $q(x,y,p)$, $r(x,y,p)$, ottengo

$$z'[p] = z'(p) + z'(q)\,q'(p) + z'(r)\,r'(p)\,;$$

metto in questa in luogo delle $q'(p)$, $r'(p)$ i loro valori dati dalle (39), e mi viene

$$z'[p] = \frac{z'(p)[x'(q)\,y'(r) - y'(q)\,x'(r)] + z'(q)[x(r)\,y'(p) - y'(r)\,x'(p)] + z'(r)[x'(p)\,y'(q) - y'(p)\,x'(q)]}{x'(q)\,y'(r) - y'(q)\,x'(r)}$$

dove faccio sparire il denominatore servendomi dell'equazione (40), ed ho

$$z'[p] = \{z'(p)[x'(q)y'(r) - y'(q)x'(r)] + z'(q)[x'(r)\,y'(p) - y'(r)x'(p)] + z'(r)[x'(p)\,y'(q) - y'(p)\,x'(q)]\}\{q'(x)\,r'(y) - r'(x)q'(y)\}\,.$$

Osservo che in questa espressione il secondo membro è composto di due fattori, cioè di un binomio, e di un sestinomio formati con tante derivate parziali. Le derivate parziali che compongono il sestinomio sono altrettante funzioni di $p, q(x,y,p)$, $r(x,y,p)$, cioè contengono le quantità composte $q(x,y,p)$, $r(x,y,p)$ nel luogo delle lettere semplici q, r. Intendiamo pertanto che sianvi in esso sestinomio le lettere semplici q, r invece delle quantità composte, e poniamo per brevità

$$(41)\qquad S[p,q,r] = z'(p)[x'(q)\,y'(r) - y'(q)\,x'(r)] + z'(q)[x'(r)y'(p) - y'(r)x'(p)] + z'(r)[x'(p)y'(q) - y'(p)x'(q)]$$

dove le derivate parziali sono funzioni delle p, q, r quali deduconsi direttamente dalle equazioni (32): sarà

$$(42)\qquad z'[p] = S[p, q(x,y,p), r(x,y,p)]\{q'(x)r'(y) - r'(x)q'(y)\}$$

17. Queste cose premesse, torniamo a considerare l'integrale proposto. Veggasi primieramente come sia vera l'equazione tra gl' integrali semplici

$$(43)\quad \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz\, V(x,y,z) = \int_{p_1(x,y)}^{p_2(x,y)} dp\, V(x,y,z[p,q(x,y,p),r(x,y,p)])z'[p]$$

dove nel primo integrale i limiti sono quelli dati dai secondi membri delle equazioni (28); e nel secondo vi è nella V in luogo di z la quantità composta eguale, data dal secondo membro della (35): vi è la $z'[p]$ sua derivata per p espressa nel modo convenuto al n.° 16. precedente: e i due limiti sono valori di p cavati dalla equazione

$$(44)\qquad f(x, y, z[p, q(x,y,p), r(x,y,p)]) = 0$$

che è la (27) colla z composta data dalla (35). Se in luogo dei due limiti $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ nel primo integrale della equazione (43) vi fossero queste altre quantità

$$z[p, q(x,y,p_1(x,y)), r(x,y,p_1(x,y))];$$
$$z[p, q(x,y,p_2(x,y)), r(x,y,p_2(x,y))],$$

la verità della detta equazione sarebbe una immediata conseguenza del teorema del n.° 2; perchè dunque sia vera l'equazione (43) tale come sta, bisogna che siano identiche queste altre

$$(45)\quad \begin{aligned} &z[p, q(x,y,p_1(x,y)), r(x,y,p_1(x,y))]=z_1(x,y)\\ &z[p, q(x,y,p_2(x,y)), r(x,y,p_2(x,y))]=z_2(x,y) \end{aligned}$$

il che facilmente si dimostra osservando che per cavare i due valori $p_1(x,y)$, $p_2(x,y)$ dalla (44) si comincia a cavarne la z composta come facevasi della z semplice sciogliendo l'equazione (27) per dedurne le (28). Così si hanno per la z composta due valori che sono

$$z[p, q(x,y,p), r(x,y,p)] = z_1(x,y)$$
$$z[p, q(x,y,p), r(x,y,p)] = z_2(x,y)$$

e queste equazioni, sciolte separatamente per rispetto alla p, danno i due valori $p=p_1(x,y)$; $p=p_2(x,y)$ i quali risostituiti nelle stesse equazioni da cui furono dedotti le rendono identiche, venendo in tal modo dimostrate le (45).

18. Essendo vera l'equazione (43) fra gl' integrali semplici, è manifestamente vera anche la seguente fra gl' integrali triplicati

$$(46)\quad \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz\, V(x,y,z)$$
$$=\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{p_1(x,y)}^{p_2(x,y)} dp\, V(x,y,z[p, q(x,y,p), r(x,y,p)]z'[p]$$

dove le altre due integrazioni per y e per x sono fatte allo stesso modo. Ora vogliamo dimostrare che anche nell'integrale triplicato che forma il secondo membro della precedente equazione (46) si può invertere a piacimento l'ordine delle integrazioni, come (n. 13. 14.) può farsi nell' integrale triplicato che forma il primo membro della stessa equazione (46). Ciò sarà provato quando si dimostri, che, adoperando l'equazione (44) per le definizioni di quell' integrale, le variabili x, y, p conservano fra di loro analoghe relazioni conducenti alle stesse proprietà di massimo e di minimo come le x, y, z, quando si adopera per le definizioni l'equazione (27) nel modo spiegato al n.° 13. Or questo appunto ha luogo nel nostro caso. Infatti eliminare la z semplice fra le (30) dà lo stesso risultato che eliminare la z composta fra la (44) e la seguente

$$(47) \qquad f'(z[p, q(x, y, p) \,,\, r(x, y, p)])=0$$

il quale risultato è poi lo stesso che si significa dicendo di eliminare la p tra la (44) e la sua derivata per p; giacchè la derivata della (44) per p è la (47) precedente moltiplicata per $z'[p]$, e può intendersi che questo fattore $z'[p]$ siasi fatto sparire colla divisione: nè può farsi altrimenti la eliminazione di p fra la (44) e la (47) che eliminandone la z composta. Per l'altra definizione bisogna che abbiasi lo stesso risultato eliminando z, y fra le (31), ed eliminando p, y fra la (44), la sua derivata per p, e la sua derivata per y. Questo pure si verifica perchè la derivata della (44) per p è la (47), e la derivata per y è

$$f'(y)+f'(z)\left\{z'(q)q'(y)+z'(r)r'(y)\right\}=0$$

che si riduce alla $f'(y)=0$ a motivo del fattore $f'(z)$ che è zero per la stessa (47). È visibile che in questo secondo caso non vi è altra differenza che quella di avere la z composta invece della z semplice fra le quantità che si scacciano: e ciò non altera il risultato che rimane dopo le eliminazioni.

19. Poichè dunque può farsi, invertiamo le integrazioni nel secondo integrale della (46) tenendo in ultimo quella per p. Prima però sostituiremo alla $z'[p]$ il suo valore dato dalla (42), e osserveremo che a motivo delle equazioni identiche (34) la (44) si può scrivere senza alterazione

$$f\{x[p,q(x,y,p),r(x,y,p)],y[p,q(x,y,p),r(x,y,p)],\\ z[p,q(x,y,p),r(x,y,p)]\}=0$$

e la quantità $V(x,y,z[p,q(x,y,p),r(x,y,p)])$ parimenti

$$V\{x[p,q(x,y,p),r(x,y,p)],y[p,q(x,y,p),r(x,y,p)],\\ z[p,q(x,y,p),r(x,y,p)]\}.$$

Quindi è che ponendo per brevità

$$(48)\qquad \varkappa[p,q,r]=f(x[p,q,r],y[p,q,r],z[p,q,r])$$

$$(49)\qquad T[p,q,r]=V(x[p,q,r]\,y[p,q,r],z[p,q,r])S[p,q,r],$$

dove la $S[p,q,r]$ è quella della equazione (41), e le q, r stanno come lettere semplici: l' integrale triplicato può scriversi

$$(50)\quad \int dp\int dx\int dy\,T[p,q(x,y,p),r(x,y,p)]\{q'(x)r'(y)-r'(x)q'(y)\}$$

e parimenti l' equazione dei limiti

$$(51)\qquad \varkappa[p,q(x,y,p)\cdot r(x,y,p)]=0.$$

Il precedente integrale triplicato dovrà essere preso primieramente per y fra due limiti $y_1(x,p)$, $y_2(x,p)$ radici dell' equazione (51), poscia per x fra due limiti $x_1(p)$, $x_2(p)$ desunti dall' equazione che risulta eliminando y fra la (51) e la seguente

$$(52)\qquad \varkappa'(q)q'(y)+\varkappa'(r)r'(y)=0\,;$$

e in ultimo per p fra i limiti $p=\alpha$, $p=\beta$ radici dell' equazione risultante dopo l' eliminazione di x,y fra la (51) la (52) e la seguente

$$(53) \qquad \varkappa'(q)q'(x) + \varkappa'(r)r'(x) = 0.$$

I ragionamenti antecedenti persuadono che il valor finale dell' integrale triplicato ottenuto come ultimamente si è detto, eguaglierà l'integrale del secondo membro della (46) e quindi anche quello del primo.

20. L'integrale duplicato

$$(54) \int_{x_1(p)}^{x_2(p)} dx \int_{y_1(x,p)}^{y_2(x,p)} dy \, \mathrm{T}[p, q(x,y,p), r(x,y,p)] \{q'(x)r'(y) - r'(x)q'(y)\}$$

che con una nuova integrazione per p diventa il triplicato (50), e dove le quantità dei limiti sono determinate come si è detto al numero precedente, equivale all' integrale duplicato

$$(55) \qquad \int_{q_1(p)}^{q_2(p)} dq \int_{r_1(q,p)}^{r_2(q,p)} dr \, \mathrm{T}[p, q, r]$$

dove $r_1(q,p)$, $r_2(q,p)$ sono radici della equazione

$$(56) \qquad \varkappa[p, q, r] = 0$$

sciolta per r, e $q_1(p)$, $q_2(p)$ sono radici dell' equazione che risulta eliminando r fra la precedente e la

$$(57) \qquad \varkappa'(r) = 0$$

Questa proposizione è una immediata conseguenza del teorema per la trasformazione degli integrali duplicati che superiormente abbiamo dimostrato al n.° 10: basta un poco di attenzione per ciò rilevare, ponendo mente che la p è quì una costante la quale si esprime per ragione della terza integrazione, ma che potrebbe ommettersi finchè si considera solamente l' integrale duplicato antecedente. Notisi ancora che l'eliminazione di x, y fra le (51), (52), (53) dà lo stesso risultato che l' eliminazione di q, r fra la (56), la (57) e la seguente

(58) $$x'(q)=0;$$

perocchè le (52), (53) combinate fra loro si riducono facilmente alle

$$x'(q)\left\{\frac{q'(x)r'(y)-r'(x)q'(y)}{r'(y)}\right\}=0$$

$$x'(r)\left\{\frac{r'(x)q'(y)-q'(x)r'(y)}{q'(y)}\right\}=0$$

che divise pel secondo fattore sono le (57), (58) colla sola differenza di contenere le q, r composte invece delle semplici, la quale è pure la sola differenza fra le (51) e (56). Tale differenza non influisce sul risultato ottenuto dopo le eliminazioni, come è manifesto.

21. Dal fin quì detto si arriva a comprendere che l' integrale triplicato (50) preso come si è esposto al n.° 20. darà lo stesso risultato finale dell'integrale

$$\int_\alpha^\beta dp\int_{q_1(p)}^{q_2(p)} dq\int_{r_1(q,p)}^{r_2(q,p)} dr\quad \mathrm{T}[p,q,r]$$

dove le quantità dei limiti hanno i valori indicati nel numero precedente; ma quell'integrale (50) eguaglia (n.° 19. sul fine) il primo integrale dell' equazione (46); dunque

$$\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz\ \mathrm{V}(x,y,z)=\int_\alpha^\beta dp\int_{q_1(p)}^{q_2(p)} dq\int_{r_1(q,p)}^{r_2(q,p)} dz\ \mathrm{T}[p,q,r].$$

Rimettasi per $\mathrm{T}[p,q,r]$ l'espressione equivalente data dalle (41), e (49), e per l' equazione dei limiti in luogo della $x[p,q,r]$ l'espressione equivalente data dalla (48), e uscirà il Teorema desiderato, che ,, l'integrale triplicato $\int dx\int dy\int dz\mathrm{V}(x,y,z)$,, preso servendosi dell' equazione dei limiti $f(x,y,z)=0$ per

,, definire le successive integrazioni come si è esposto al n.°
,, 13, dà lo stesso valore finale dell' integrale triplicato
,, $\int dp \int dq \int dr \mathrm{V}(x[p,q,r],y[p,q,r],z[p,q,r])\,\mathrm{S}[p,q,r]$
,, essendo

$$\mathrm{S}[p,q,r]=z'(p)[x'(q)y'(r)-y'(q)x'(r)]+z'(q)[x'(r)y'(p)-y'(r)x'(p))] \\ +z'(r)[x'(p)y'(q)-y'(p)x'(q)]$$

,, preso servendosi dell' equazione dei limiti

$$f(x[p,q,r],y[p,q,r],z[p,q,r])=0$$

,, la quale viene trattata colle nuove variabili p, q, r in un
,, modo affatto analogo a quello con cui la $f(x,y,z)=0$ vie-
,, ne trattata colle vecchie variabili x, y, z.

22. In quest' ultimo integrale triplicato l'ordine delle integrazioni potrà cambiarsi in sei modi differenti senza alterare il valore finale, e ciò per le stesse ragioni che al n.° 14. ci persuasero dell' analoga proprietà nell' integrale non trasformato. Il segno poi del sestinomio $\mathrm{S}[p,q,r]$ può ad arbitrio prendersi positivo o negativo, finchè la questione si considera puramente dalla parte dell' analisi, perchè niente v' è che qualifichi una delle tre variabili in preferenza delle altre, onde possono fra di loro scambiarsi per le derivazioni: il che facendo viene quel sestinomio a mutare di segno.

MEMORIE

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA

TOMO XX.

FASCICOLO SECONDO

DELLE

MEMORIE DI MATEMATICA

INDICE

DELLE COSE CONTENUTE NEL SECONDO

FASCICOLO DELLE MEMORIE

DI MATEMATICA DEL TOMO XX.

Elenco dei libri mandati in dono alla Società Italiana delle Scienze pag. (5)
Memorie storiche di alcuni Socii defunti scritte dal SEGRETARIO ANTONIO LOMBARDI 1
Sullo sviluppo delle funzioni in serie del PROFESSORE PIETRO PAOLI 293
Teorica degli Objettivi acromatici proposti dal Sig. *Rogers*. Memoria del PROFESSOR GIOVANNI SANTINI 415
Sopra gli integrali definiti. Memoria del CAV. GIULIANO FRULLANI 448
Memoria sopra un Cordometro ed un Tonometro di PAOLO ANANIA DE LUCA 468
Sulle superficie generabili dal movimento di una linea piana qualunque. Memoria del DOTTOR GASPARE MAINARDI. Parte I. e II. 482
Esperienze sulle contrazioni parziali delle vene d'acqua. Memoria del PROFESSOR GIORGIO BIDONE 536
Sulla teoria delle funzioni discontinue. Memoria di GABRIO PIOLA 573
Rifrazioni astronomiche osservate a piccole altezze sull' Orizzonte. Memoria del PROFESSORE GIUSEPPE BIANCHI 640
Sopra l' uso di alcune serie nella determinazione degli Integrali definiti. Memoria del CAVALIERE GIULIANO FRULLANI 663
Sopra la riduzione di alcune trascendenti. Memoria DELLO STESSO 712

N. B. Avvertasi che dalla pagina 293. si salta alla 394. e si prosegue alla 395. etc; ma questo è puro sbaglio di stampa, e perciò non ostante questo salto nulla manca nel presente Fascicolo. Avvertasi inoltre che nell'Elenco dei libri regalati alla Società Italiana delle Scienze inserito nel Fascicolo I. di Matematica di questo Tomo XX. si attribuì per errore al PADRE PIAZZI la continuazione dell'Opera sul Reale Osservatorio di Palermo, che è lavoro del Chiar. Astronomo vivente NICCOLO' CACCIATORE.

ELENCO DI LIBRI

MANDATI IN DONO

ALLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA.

Dall' 1. *Ottobre* 1828. *in avanti.*

Pezzana Angelo. Continuazione delle Memorie degli Scrittori Parmigiani T.° VI. Parte II. 4.° Parma 1827.

Santini Professor Giovanni. Teorica degli Stromenti ottici. Padova 1828. 4.°

T.° VII. Memorie della R. Accademia di Parigi — ivi 4.°

Bonino Dottor Gio: Giacomo. Biografia Medica Piemontese parte seconda ed ultima. 8.° Torino 1828.

Herschell I. F. W. Serie tre di osservazioni fatte con un riflettore di 20. piedi, che contengono un Catalogo di 384. nuove stelle doppie ridotte al principio del 1828. 4.° Londra 1828.

T.° XXX. XXXI. XXXII. delle Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. ivi 1826-1828. 4.°

Emiliani Professor Luigi. Ricerche sulla cura delle malattie infiammatorie. 8.° Modena 1828.

Transazioni Anglicane della R. Società di Londra in dodici Volumi. Anno 1822. all'anno 1826. inclusivamente. 4.° Londra.

Paoli Domenico. Saggio di una monografia delle sostanze gommose. Firenze 1828.

Cacciatore Niccolò R. Astronomo. Lettera al Sig. Barone Ferrusac sull' alzamento straordinario osservato nel Barometro in Gennajo 1828. 8.° Palermo 1828.

Cacciatore Niccolò R. Astronomo. Viaggio ai bagni minerali di Sclafani. 8.° Palermo 1828.

Furitano Prof. Antonio. Corso di Chimica filosofico-pratica. 8.° Palermo 1828. Vol. due.

Bravi Abate Giuseppe. Teorica e pratica del probabile. 8.° Milano 1827.

Libri Guillaume. Memoires de Mathematique et de Physique. Tome I. 4.° Florence 1829.

Bouvard M. A. Memoire sur les observations meterologiques faites à l' Observatoire Royal de Paris lue a l'Academie des sciences le 23. Auril 1827. 4.°

Babbage Carlo. Sulle rotazioni elettriche e magnetiche. 4.° Londra 1826.

. . . Sull' applicazione delle macchine al computo delle tavole astronomiche e matematiche. ivi 1824. 4.°

. . . Sopra un nuovo micrometro zenitale. 4.° ivi.

Bignardi Professor Alfonso Domenico. Estrofia, e caso di quasi totale mancanza di vescica orinaria; lettera e risposta del Professor Antonio Alessandrini. 8.° Bologna 1829.

Chiaje (delle) Stefano. Iconografia ed uso delle piante medicinali. 8.° Napoli dalla Stamperia della Società Tipografica 1824. T.^{i} due ed uno di Tavole in 4.°

. . . Compendio di Elmintografia umana illustrata da dieci tavole 4.° ibid. 1825.

. . . Descrizione di un capretto mostruoso disomo, e necrologia dei Socii del Real Instituto di incoraggiamento. 4.° Napoli 1822.

. . . Memoria sul Ciclamino Poliano. 4.° Napoli 1824.

. . . Memoria sulla storia e notomia degli animali senza vertebre del Regno di Napoli 4.° ivi 1823. T.^{i} due.

. . . Osservazioni sulla struttura della epidermide umana con Tavola. 4.° Napoli 1827.

Memorie della Società Astronomica di Londra divise in due parti, Volume terzo. Londra 1829. 4.°

Thomson Giacomo. Le stagioni corrispondenti all' originale

Inglese tradotte da Patrizio Muschi di Siena con prefafazione, dedica, argomento, inno, ode e note. Firenze 1826. 8.°

Inghirami Professor Giovanni. Mappa uranografica rappresentante la porzione dell' ora xviii. fra i paralleli xv. Boreale e xv. Australe delineata nell'Osservatorio delle Scuole pie di Firenze. ivi 1829.

Memoria (alla) di Giuseppe Raddi. Firenze 1830. 4.°

Gräberg de Hemso Giacomo. Annali di Geografia e di Statistica 8.° piccolo Tomi II. Genova 1802.

. . . Leçons elementaires de Cosmographie et de Statistique. 2de. Edition 8.° petit a Gènes 1813.

. . . Lettera al Sig. Luigi Grossi Medico ec. sulla peste di Tangeri negli anni 1818-19. 8.° Genova e Tangeri 1820.

Memorie della R. Accademia di Torino T.° XXXIII. XXXIV. ivi 4.°

Santini Giovanni. Elementi di Astronomia con le applicazioni alla Geografia, Nautica, Gnonomica, e Cronologia. Edizione 2.^{a} riveduta ed aumentata dall' autore. Padova 1830. Tomi due 4.°

Piola Gabrio. Sulla teorica del pendolo. 4.° Milano 1831.

Muzzarelli Prof. Luigi. Diritti della Città di Modena sulle acque di Secchia nella causa istituita per Sovrano comando in via di compromesso tra la Comunità di Modena e la Comunità di Sassuolo avanti i Signori Avvocato Vincenzo Poppi Modonese Giudice Conciliatore nominato dalla Comunità di Modena in sostituzione al Sig. Conte Avv. Luigi Valdrighi mancato di vita in pendenza del giudizio, ed Avv. Pellegrino Nobili Reggiano nominato dalla Comunità di Sassuolo. Modena Tipografia Soliani. 1827. in fol.

Brera Eq. Valerianus Aloysius. De praestantia Institutionum Medico-practicarum Ill. Jo. Bapt. Burserii de Kanilfeld ac de methodo eas exarandi Neotericorum consiliis et observationibus commentariolum. Praemissa ipsius Burserii vita. Patavii Typis Seminarii 1823. 8.°

Libri Guglielmo. Memoria sopra la fiamma, letta alla Società dei Georgofili nella seduta del dì 3. Dicembre 1826. Estratto dall'Antologia n.° 73. Firenze. Tipografia di Luigi Pezzati 1827.

Trasmondi Dottor Giuseppe. Risposta al Sig. Professore Gaetano Flajani intorno la scoperta del muscolo d'Hermer e dei nuovi due nervi dell'occhio umano. Roma 1823. presso Alessandro Ceracchi. 8.°

MEMORIE STORICHE

DI ALCUNI SOCII DEFUNTI SCRITTE

DA

ANTONIO LOMBARDI

Socio e Segretario

della Società Italiana delle Scienze

Quantunque manchino del dovuto elogio accademico alcuni fra i nostri socii attuali che già da lungo tempo pagarono alla natura l'inevitabile tributo, ascrivere non mi si potrà, io spero, a colpa od a trascuratezza un tale indugio, poichè la sola difficoltà di raccogliere le notizie necessarie all'uopo, difficoltà che per alcuni di essi tuttora sussiste (1), cagionò simile ritardo. Comunque però stia la cosa, essendomi pur riuscito di unire insieme varie notizie quà e là sparse toccanti questi egregii soggetti, non debbo più oltre defraudarli delle ben meritate laudi, e mi accingo perciò ad esporre quanto raccolsi sull'argomento, nel presente scritto, che sebben tenue, consacro alla loro memoria, onde in qualche parte almeno compiere al dover che mi corre, di ricordare onorevolmente alla posterità quegli uomini insigni, i quali con le scientifiche loro imprese procurarono l'incremento dei buoni studii, e promossero le scienze naturali.

---

(1) Questi specialmente sono quelli che morirono nel 1813, e 1814. anni di guerre e di universale sconvolgimento.

I.

SALADINI CANONICO GIROLAMO

Lucca fu la patria di Girolamo Saladini che vide la luce del giorno (1) nell'anno 1735, ed allorchè dopo di essersi istruito nelle umane lettere cominciò la sua carriera scientifica, dedicossi in ispecial modo alle matematiche pure ed applicate, nelle quali facoltà cominciò di buon'ora a primeggiare in Italia. Stabilitosi egli a Bologna, dove allora insegnava questa scienza l' illustre Padre Vincenzo Riccati della Compagnia di Gesù, ebbe il Saladini tutto l'agio di penetrare a fondo i misteri dell' analisi, e di ben conoscere le nuove teorie del calcolo differenziale ed integrale che diffondevansi allora per la colta Europa. E convien dire, che non tardasse egli a dar saggi luminosi delle sue cognizioni in questa ardua materia, poichè nell' anno 1760. ventesimo quinto di sua età il veggiamo già lettore di matematica nella Congregazione dei Monaci Celestini di cui aveva abbracciato l'Istituto, e Professore ad un tempo della stessa facoltà nell'Archiginnasio Bolognese (2). Proposto siccome egli si era a precipuo scopo de' suoi studii l'istruzione della gioventù, diede alla luce in detto anno gli *elementi della Geometria degli infinitesimi*, argomento da lui trattato colla sintesi, coi quali elementi procurò di spianare le principali difficoltà che si incontrano per formarsi una giusta idea delle quantità infinite ed infinitesime, il che facendo agevolò la strada a suoi discepoli, onde penetrare gli arcani più sublimi della scienza.

---

(1) Nelle notizie di Saladini inscrite nel T.° III. degli Atti del C. R. Istituto si lascia indecisa l' epoca della nascita di lui, e si dice nato nel 1731. circa, ma dalla iscrizione sepolcrale per lui composta dal Sig. Canonico Schiassi, e che vedrassi in fine di questo Articolo rilevasi che nacque il Saladini nel 1735.

(2) Ciò si rileva dal frontespizio dell' opera su gli infinitesimi da lui in quest' anno stampata col titolo *Elementa Geometriae infinitesimorum*.

Aveva già la chiarissima Donna Gaetana Agnesi fin dall' anno 1748. stampate le sue istituzioni di analisi che fecero, può dirsi, mutar faccia in Italia all' insegnamento della matematica; ma siccome avviene che l' uomo già messo sulla strada di scuoprir la verità, facilmente avanza nell' incominciato cammino, così nell' intervallo di venti anni circa dopo la pubblicazione dell' opera dell'Agnesi gli Algebristi arricchirono la scienza di non poche pregevoli novità, e desideravasi nelle scuole un corso più esteso del sunnominato. A quest' uopo il Padre Vincenzo Riccati pubblicò dal 1765. al 1767. le sue istituzioni analitiche più ampie assai di quelle dell'Agnesi, ma volle a compagno di questo insigne lavoro il Canonico Saladini. Mentre perciò il Padre Gesuita tracciava il piano dell' opera in grande, e somministrava i lumi e le regole per spiegare con chiarezza ai giovani i problemi più oscuri e difficili della scienza, il nostro Monaco raccoglieva i materiali, gli ordinava, e spiegava, ampliando così le istituzioni dell'Agnesi, specialmente in ciò che riguarda le serie, l'applicazione del calcolo alle curve, e le loro singolari proprietà; più abbondevol messe offrì poi al Saladini il calcolo differenziale ed integrale, nella qual parte d' analisi ei fece molte utili giunte alle istituzioni della sullodata Donna (1). Queste voluminose istituzioni scritte in lingua latina e che formarono testo nelle scuole, ben diedero a conoscere quanto valente analista fosse il Riccati non solo, ma il Saladini ancora che ne fece poi anche un compendio Italiano, e che meritossi perciò l' aggregazione all' Istituto delle Scienze in Bologna, della cui insigne Metropolitana era già nel 1775. Canonico (1); dal che arguir possiamo facilmente in qual pregio salito ei fosse presso il Senato Bolognese, e presso li Sommi Pontefici che in quegli anni sedevano al governo della Chiesa Cattolica.

---

(1) Nella prefazione che trovasi in fronte alle istituzioni di Riccati si ha una breve storia della scienza dalla sua origine sino all'epoca in cui queste videro la luce, e si rileva quanta parte avesse in esse il Professor Saladini.

L'analisi pura è, come ognun sa, un istrumento che in mano del Fisico esperto lo giova assai per sottomettere al calcolo i naturali fenomeni, e per conoscerne le leggi, le forze, ed applicarne i risultamenti agli usi diversi della civile società, e così fece il Professor Saladini con l'inserire negli Atti di varie Accademie le sue memorie di matematica pura ed applicata, delle quali daremo ora un qualche cenno. Franco maneggio di calcolo riscontrasi in quella memoria che egli inserì nel T.° V. parte II. dei commentarii dell'Istituto Bolognese, in cui prende ad esame il metodo da Bernulli proposto per costruire le formole differenziali con le curve algebraiche. Siccome nell' applicar le regole Bernulliane si urtava sovente nello scoglio delle quantità immaginarie, così il Professor Saladini scuoprì li mezzi onde superar questa difficoltà, e dopo di aver dimostrato per diversa via di quella da Bernulli battuta, alcuni teoremi sulle costruzioni delle formole differenziali di una sola variabile, propone un suo particolar metodo più spedito col quale costruir si possono altre simili formole di numero indeterminato. Le astruse teorie delle curve a doppia curvatura occuparono inoltre molti anni dopo la penna del Saladini, il quale nel primo volume delle memorie dell'Istituto nazionale Italiano (2) ci offre la spedita integrazione delle formole che esprimono la compianazione delle superficie generate dalle curve, e dei solidi da queste superficie originati, allorchè esse ruotar si fanno intorno ad un asse. Se questi saggi del saper in matematica del nostro Professore ci comprovano quant'ei valesse nell'analisi pura, varie altre memorie di astronomia e di meccanica da lui date in luce, un bel testimonio ci presentano delle estese sue cognizioni in matematica applicata. Il sempre difficil problema di determinare l'orbita delle comete non sfuggì alle indagini del Saladini, e mentre l'esimio Eustachio Zanotti come Astronomo osservatore inseguiva, direm così, la Cometa nel 1790 apparsa sul nostro orizzonte, impegnavasi l'altro a segnarne analiticamente il cammino. Assumendo egli la ipotesi molto probabile dell'orbita parabolica, ed impiegando opportunamente or la sintesi ed ora l'analisi, riuscì all'uopo, ed osservar fece che se il calcolo ci presentasse diverse soluzioni del proposto quesito, come accader può, allora a toglier l'incertezza, confrontinsi i risultamenti della teoria con l'orbita assegnata dalle tre osservazioni dell'astro, dato indispensabile alla pratica soluzione del quesito, e si conseguirà lo scopo desiderato.

---

(1) Nell' articolo necrologico di Saladini inserito nelle Memorie dell'Istituto, e già da me citato, si dice che egli era Canonico della Metropolitana di Lucca, ma io temo che questo sia un errore, poichè nel frontespizio del suo compendio di analisi stampato nel 1775. egli si dice Canonico della Metropolitana di Bologna, e tale viene chiamato nella iscrizione sepolcrale già più sopra citata.

(2) T.° I. parte I. matem. pag. 69. Bologna 1804.

Mentre il Professor Gio: Battista Guglielmini con le sue sperienze eseguite in Roma comprovava la declinazione orientale dei gravi cadenti, già teoricamente dimostrata dai Fisici come una conseguenza del moto della terra, il Professor Saladini occupavasi a dimostrar presso che nulla la declinazione meridionale dei gravi stessi dall'illustre Bonati e da altri Dotti ammessa. Per ben tre volte meditò il Saladini sopra questo bel problema (1), e convinse alla fine il Bonati che non esisteva la voluta deviazione meridionale almeno sensibile, la quale però ha luogo, benchè piccola, quando valutar vogliasi l'elemento della resistenza del mezzo in cui cadono i gravi. Altro problema nuovo a tempi dell'autor nostro ma arduo assai esercitò l'ingegno di lui, quello cioè della salita delle macchine aereostatiche. Dopo che l'immortale Eulero poco innanzi la sua morte erasene già occupato, volle il nostro Italiano esaminare la soluzione di quello, ed applicando i sani principii della Fisica e i risultamenti delle più recenti sperienze sulla gravità specifica dei corpi e sulla densità dell'aria, procurò di rettificare alcune conseguenze dell'Eulero, e di far progredire questo novello ramo di Fisica (1). Anche *l'asta ritrometrica* d'invenzione del sullodato Bonati, somministrò al Professor di Bologna argomento di ragionata critica; e in una lettera diretta al Sig. Ingegnere Giusti propone li suoi fondati dubbii sull'uso di questo strumento per misurare la velocità dei fiumi con una certa *precisione*; dubbii che in lui sorsero, specialmente osservando che la dottrina dell'urto dei fluidi non è ancora ben determinata, variando anche al presente l'opinione dei più celebri Idraulici sulla misura degli effetti di questa forza (2).

---

(1) La prima Memoria su questo argomento dall' autor nostro trattato incontrasi nel T.° VII. degli atti dell'Accademia di Siena; la seconda nel T.° IX. e la terza nel T.° XII. parte matematica delle Memorie della nostra Società.

Son queste le produzioni più interessanti che uscirono dalla penna del Saladini, ma non le sole; poichè trattò egli in altri scritti, alcuni problemi di Meccanica e Idrostatica, cercando sempre di render più semplici e chiare le soluzioni dei medesimi (3); e se non ci lasciò opere di lunga lena, attribuir devesi, in parte almeno, alla profondità del saper suo che acquistato aveagli presso i Dotti straordinario credito. Veniva egli quindi consultato sovente sulle più ardue questioni scientifiche; alle volte era scelto qual giudice a definir e comporre le contese che insorgevano in matematica (1), e somministravano inoltre a lui argomento di serie e lunghe meditazioni le dispute al suo tempo forse più che adesso frequenti a cagione particolarmente del nuovo calcolo infinitesimale, i cui principii, quantunque certamente inconcussi, tuttavia occuparono per molti anni i più sublimi ingegni del secolo impegnati con ogni studio a procurare loro l' evidenza delle matematiche dimostrazioni.

---

(1) La Memoria su questo argomento leggesi nel T. X. parte fisica degli Atti della Società nostra; ma aveva già il Saladini stampato antecedentemente un altro suo scritto sulla salita ec. nel primo volume degli Atti della R. Accademia delle Scienze di Napoli, di cui era membro pensionario.

(2) L'opuscolo del Saladini sull'asta ritrometrica è intitolato *Lettera Idrostatica* responsiva ad altra del Cittadino Giusti, ed è stampato a Bologna a S. Tommaso d'Aquino.

(3) Nel T. I. parte II. dell'Istituto nazionale Italiano leggesi una sua Memoria sulla discesa dei gravi per la curva detta *Lemniscata*, e nella parte I. del T. II. vedesi la soluzione di un problema di Meccanica dell'Eulero. Nel T. XI. poi delle nostre memorie parte I. havvi uno scritto sulla determinazione del centro di pressione nelle ca-

Quest' uomo insigne per sapere, e per cristiane virtù distinto qnant' altri mai, aggregato già a varie illustri Accademie Italiane, e fra queste all' Istituto Italiano ed alla Società nostra, cessò di vivere il 1.° Giugno dell' anno 1813. nell' avanzata età di anni 78. a Bologna, che dir puossi seconda sua patria; ed il chiar. Sig. Professore Canonico Schiassi compose la seguente iscrizione sepolcrale, che leggesi sulla tomba del Canonico Saladini, le cui ceneri riposano nel magnifico Cimitero di detta Città.

---

terrate circolari ec. ec. Nel Tomo I. degli Atti della R. Accademia di Napoli leggonsi due Memorie di Saladini, la prima sulle caustiche; nella 2.ª poi l' autore ci offre la descrizione di una stadera inventata da Lorenzo Micheli Bolognese, ne sviluppa i pregi particolari, e ne insegna gli usi.

(1) V. L' articolo necrologico di Saladini inserito nel terzo Volume delle Memorie del C. R. Istituto. 4. Milano 1817. pag. 74.

HIC . SITVS . EST
HIERONYMVS . SALADINVS . SACERDOS
DOMO . LVCA . QVI . ET . BONONIENSIS
EQ. LEGIONIS . HONORATORVM
CANONICVS . DECANVS . TEMPLI . METROPOLITANI
DOCTOR . EMERITVS . ARCHIGYMNASII
SODALIS . BENEDICTIN . SODALIS . REGI . INSTIT. ITAL.
MATHEMATICVS . EXIMIVS
QVI . SCRIPTIS . EDITIS . LVCVBRATISSIMIS
PER . EVROPAM . VNIVERS. MAXIMVM . SIBI . NOMEN
COMPARAVIT
VIX. AN. LXXVIII. DEC. K. IVN. AN. MDCCCXIII.
HAEREDES . F. C.

II.

PEZZI INGEGNER FRANCESCO.

Poche notizie mi è riuscito di raccogliere intorno al Socio Francesco Pezzi Ingegnere e Professore di Matematica in Genova sua patria morto nel mese di Novembre dell'anno 1813. Nominato nell' anno 1791. fra i membri attuali della Società nostra da pochi anni allora istituita per cura del celebre Cavalier Anton-Mario Lorgna Veronese, arricchì il Pezzi con varie dissertazioni le Memorie che questo corpo Accademico pubblica regolarmente sulle scienze naturali. Il calcolo puro specialmente lo occupò, e dopo di aver tradotto in lingua Francese unitamente al Sig. Kramp il primo volume dell' Opera classica dell'immortale Eulero, la quale ha per titolo *Introductio in Analysim infinitorum*, sciolse alcuni problemi di calcolo integrale tenendo una via diversa da quella battuta dal sullodato Matematico, ma più breve e spedita, e che lo condusse a formole identiche con quelle del Geometra Tedesco. Nello sviluppare queste integrazioni il Pezzi dimostra una perizia non comune di calcolo, e si estende a considerar le formole trascendenti che dipendono dal circolo, come pure a contemplare il caso in cui contengonsi nelle quantità da integrarsi fattori imaginarii (1). Fra le tante questioni agitate dagli Astronomi, una ne insorse fra gli insigni Matematici Lalande e la Caille, la quale riguardava l' equazione del tempo solare, che il primo computar voleva a 15.° per ora, mentre l' altro progettava di estenderla a 15.° 2.' 28". Esaminò la differenza di opinioni di così illustri Geometri l'ingegner Pezzi, ed in una breve Memoria (2) trattò con precisione e chiarezza l'argomento, e la regola da lui prescelta applicar puossi con tutta facilità e sicurezza al calcolo dei passaggi delle stelle e dei pianeti per il meridiano. La trigonometria poi a lui deve un metodo per determinare i seni e coseni tra loro disuguali di archi summultipli di altri archi etc. (1), e delle formole trovate l'autor nostro si prevalse per determinar le radici delle equazioni di terzo grado, colla quale opportunità chiamò a confronto col suo metodo quello dato per la stessa determinazione dall' illustre Cav. Cagnoli benemerito Presidente per tanti anni della Società nostra.

---

(1) Veggansi le Memorie della Società Italiana T. IV. pag. 577. T. V. pag. 417. T. VI. pag. 256.

(2) T. VIII. Parte I. pag. 242.

La bella teoria delle frazioni continue, nelle quali gli algebristi insegnano a trasformare una frazione qualunque, fu dal Professor Pezzi semplificata, poichè ci istruì egli (2) sul modo di ridurre rapidamente in frazione continua una frazion comune, senza aver duopo di determinare i termini parziali, e si giovò di questo suo metodo per la soluzione delle equazioni indeterminate di primo grado da lui ottenuta con formole più semplici di quelle che ci diedero già Eulero, Lagrange, e Le Gendre. Lo stesso argomento trattò inoltre il nostro Matematico in altra Memoria, che è l' ultima venuta a mia notizia (3), e in essa fece un' applicazione dell' indicato suo sviluppo delle frazioni a risolvere l' equazione indeterminata $x^2 - Ay^2 = \pm 1$ semprechè A non sia numero quadrato: per il che ottenere si propose a risolvere il problema *di determinare in generale il numero di termini del periodo simmetrico di una frazione continua il quale ripetuto quant' un voglia esprime la* $\sqrt{A}$, quantità da cui dipende la soluzione della proposta equazione. Riuscì egli nell' intento, determinando da prima la forma pari o dispari che aver deve il numero A, e poscia somministrò agli Algebristi la regola che con l'ajuto di varii teoremi seguir debbono, onde col più breve periodo di operazioni possibile far verificare la proposta $x^2 - Ay^2 = \pm 1$.

---

(1) T. XI. ecc. pag. 10.

(2) T. XI. ec. pag. 410.

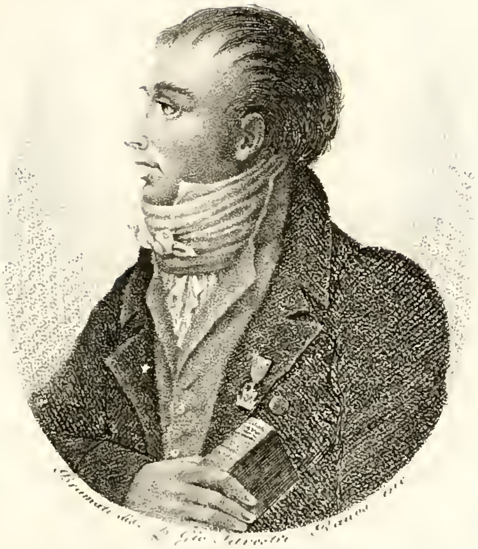
(3) T. XIII. pag. 342.

Queste sono le produzioni del Professore Pezzi delle quali io ho potuto dar notizia, ma non so se siano le sole, giacchè essendo egli mancato di vita in un' epoca in cui l'Italia soggiacque a strane vicende guerriere, la biografia di questo Matematico fu negletta, e niuno dei giornali scientifici di que' tempi, per quanto io sappia, ne tramandò ai posteri la memoria.

III.

RE CONTE FILIPPO

Pochi sono coloro ai quali compartì natura una estensione di talenti ed una forza di ingegno capace ad abbracciar contemporaneamente lo studio di più scienze fra loro disparate, e di consecrarvisi a tutte per modo di riuscir profondo in ciascuna, e meritar così il titolo di sommi in molti rami di scienza, di letteratura e d'arti. Persuasi di questo vero i Dotti delle trascorse età, limitaronsi per l'ordinario a viaggiare, ma a lento e meditato passo alcune provincie soltanto dell' umano sapere, e chi comparve eccellente Teologo, chi occupossi del gran libro della natura, e cercando di penetrarne i segreti arcani, giunse a svelarne alcuni dei più importanti; chi inoltrandosi negli spinai della Giurisprudenza, interpretò le antiche leggi, ne dettò utili applicazioni al buon regime dei popoli, e ne promosse così l'incivilimento e la felicità. A questo metodo di profondo studio ma limitato ad alcuni rami soltanto delle scienze umane dobbiamo, non v'ha dubbio, tante Opere insigni, le quali, mentre ci aprirono il santuario delle scienze religiose, naturali e politiche, assicurarono ad un tempo ai loro autori una stabil fama, e segnaron, direm così, le norme al reggimento morale e fisico della società. Ma il desiderio all' uomo connaturale della novità, e l' ardor di tutto sapere, di voler ragionare di tutto, che s'introdusse nel mondo, specialmente dacchè comparvero li Dizionarii enciclopedici, produssero una rivoluzione nei metodi di insegnare e studiare le scienze, per cui non pochi fra i moderni cultori di esse avidi di tutte conoscerle, abusarono della facilità che loro porgevano le Enciclopedie, e lusingaronsi che scorrendo gli articoli separati sopra diverse e tra loro ben varie materie che formano tai libri, avrebbero potuto arricchirsi di estese e ben fondate cognizioni nelle rispettive scientifiche fa-


Bramati dis.
P. Gio. Silvestri
Bravi inc.

CONTE FILIPPO RE

coltà. Ingannaronsi però a partito coloro che così la pensavano, e mentre credettero di poter in tal modo dettar leggi, ed acquistar nome di veri Dotti, accorgersi alla perfine dovettero, che questa foggia di studio giovava soltanto per acquistàr idee superficiali nelle scienze, bastevoli, se pur è vero, a figurare nei crocchii e nelle brigate, ma non mai a fondarsi nella dottrina; e chi sia in possesso di copiose cognizioni ad una sola facoltà relative, confessar deve che i Dizionarii scientifici, e le Enciclopedie sono libri da consultarsi all'uopo da coloro che già penetrarono i secreti della scienza, onde risovvenirsi le idee già conosciute e poscia dimenticate, ma che non più oltre estender puossi il frutto della loro lettura.

Istruito in queste massime il Conte Filippo Re che divenir voleva eccellente Agronomo, esaminò quali e quante cognizioni preliminari posseder doveva chi dedicavasi a questo studio, e con ogni premura perciò si applicò alla botanica, alla chimica, alla meteorologia, ed alla fisica, e versò a lungo sulle Opere classiche degli antichi nostri Georgici, onde all'uopo saper applicare utilmente i loro principii all'agricoltura, che formò lo scopo precipuo delle sue letterarie fatiche. Reggio di Lombardia, Città ognor feconda di svegliati ingegni, vide nascer nel giorno 20. Marzo dell' anno 1763. questo Cavaliere, che nel Collegio di Ravenna, indi in quello di Reggio sua patria fu educato alla Religione ed alle scienze, ed allorchè nel 1781. si restitui alla paterna casa, consacrò tutte le sue cure alla Botanica ed all'Agraria. Nè tardò egli molto a dar saggi luminosi delle acquistate cognizioni nel campo vastissimo della naturale filosofia, perlocchè volgendo l'anno 1790. cuoprì nel Liceo di detta Città la Scuola di agricoltura. Addestratosi egli così di buon ora ad istruire la gioventù, conobbe e adoprò i mezzi più acconcii per dirigerla con profitto nell'impreso cammino, e facondo dicitore riuscì dalla Cattedra per modo, che ebbe fama di uno fra li più eloquenti Professori dei tempi suoi: al che ottenere giovarongli le copiose ed estese notizie che procurossi sui libri di Agraria; e della vasta sua erudizione in tale materia fece poi ben presto mostra in una lettera diretta al Sig. Giulio Montanari nostro Concittadino, in cui trattò l'argomento „ *Quali libri consultar dovevansi per migliorare la nostra agricoltura.*

Ben persuaso il Conte Re che le patrie ricchezze preferir sempre devonsi alle merci straniere, andò di quelle in traccia, e sul cader del secolo XVIII. pubblicò un opuscolo in cui descrisse con adattato stile un viaggio da lui fatto al *Monte Ventasso*, ed alle terme di *Quara*, luoghi della Provincia Reggiana. In questa scientifica escursione raccolse egli un buon numero di osservazioni botaniche, delle quali prevaler poi volevasi per compilare la Flora Reggiana, ed esaminò chimicamente le acque termali di Quara, presentando ad un tempo cogli ottenuti risultamenti una tavola degli effetti prodotti su di esse dai reagenti chimici.

Mentre il nostro Professore dedicavasi a questi studii, le politiche vicende che turbarono nell'anno 1796. la pace d'Italia, oltre modo lo afflissero e impedirongli per qualche tempo ulteriori progressi. Ma ricompostosi poi l'animo suo alla quiete ed alle occupazioni scientifiche, proseguì a ben fondarsi nella scienza a lui prediletta, perlocchè il Governo lo destinò correndo l'anno 1803. Professor di Agraria nella rinomata Università di Bologna. Abbandonata perciò la cara sua patria, colà si trasferì il Conte Re, ed animato dal più vivo zelo per istruire bene la gioventù, e per migliorare la nostra agricoltura, che a dir vero presentava un sommo decadimento, niun mezzo intralasciò per ottenere l'intento bramato. E fra questi sovra ogn' altro giovò la fondazione a lui dovuta in detta Città dell' orto agrario così utile per unire insieme l'istruzione teorica alla pratica nell'insegnar una scienza, che più d'ogni altra a quest' ultima si appoggia, ma che però senza il soccorso della prima commette errori e non pochi all' interesse sociale piucchè mai dannosi. Ed allorquando quest' orto videsi incamminato, il Professore Re diè in luce il Catalogo delle piante ivi coltivate, e con dotte annotazioni lo illustrò (1).

Appassionato siccome egli era per le scienze naturali, ma specialmente per l'agricoltura e dotato di molti talenti e di una singolare attività, non è maraviglia se ci lasciò molte opere e dissertazioni varie tutte alla Agraria relative, di ognuna delle quali chi volesse partitamente ragionare, trascenderebbe i limiti ad un elogio prescritti. Mentre io quindi tratterrò i miei lettori su quelle soltanto delle sue produzioni, che comunemente reputansi le più insigni, e perchè con più accuratezza lavorate, e per gli oggetti trattati, avvertirò che non vi ha, dir puossi argomento agrario, sul quale il Professor nostro non abbia scritto, e che ne' suoi lavori ei comparisce sempre erudito, e profondamente versato nella scienza.

Il fertile suolo dell' in allora Dipartimento del Crostolo in cui Reggio è collocato, richiamò prima d' ogni altro a se la cura del Conte Re; ed era ben doveroso che egli Cittadino riconoscente verso la Patria consecrasse li suoi studj a migliorar l' agricoltura di così ameno e fertile territorio. Esaminò ei quindi in una ragionata Memoria uscita alle stampe in Milano nel 1805. i varii metodi che impiegano gli agricoltori Reggiani tanto del colle come della pianura, ed animandoli a seguire quegli usi li quali con una buona teorica combinano, procurò di correggere poi quegli errori in cui una pratica ed una ignoranza inveterate cader li facevano (2). Ed a vieppiù eccitare l'industria agricola de' suoi Concittadini, in altro opuscolo successivamente pubblicato presentò un erudito compendio della storia agraria della Provincia Reggiana, in cui ne esaminò le epoche più remote, e raccogliendo le scarse notizie de' secoli antichi, con fino criterio separar seppe le vere dalle false, e ci offrì un quadro sicuro delle varie pratiche colà usate per un così lungo periodo di tempo, quadro assai utile per l'istruzione degli agricoltori.

---

(1) Rapporto al Ministro dell'interno sulla situazione dell' orto agrario di Bologna, 8. Milano 1812.

(1) Memoria sull'agricoltura del piano, e piano colle del Dipartimento del Crostolo.

Aveva già la Toscana poco dopo la metà del Secolo XVIII. istituita per cura del Padre Abbate Montelatici la Società dei Georgofili, la quale mercè de' suoi Socii ma in modo speciale del chiar. Proposto Lastri, tanto promosse l'industria agraria in quelle amene Provincie, e la Repubblica Veneta assecondando le saggie viste del celebre Professor Giovanni Arduino, eresse pochi anni dopo nelle Città al suo dominio soggette le Accademie di agricoltura, le quali risvegliarono ovunque l'amore per tali studii, e fecer conoscere ed adottare le utili pratiche della scienza. Ma la nostra Lombardia in cui abbondano i territorii fertili e suscettibili di somministrare abbondanti raccolte, non si determinò ad imitar così nobile esempio, se non allor quando il Conte Re ne la richiamò dal letargo in cui giaceva, pubblicando li suoi elementi di agricoltura che ottennero un ottimo successo.

Aveva già egli accuratamente letto, come accennai, gli antichi Georgici, un diligente esame istituito pure aveva di ciò che scrissero i moderni Agronomi, specialmente quelli d'Oltremonte, ed assoggettato aveva all' esperienza propria non poche pratiche agrarie dei nostri paesi. Accintosi all'opera con un corredo così ricco di materiali, preceder fece alli suoi *elementi di agricoltura* (1) le cognizioni botaniche agli Agronomi più necessarie, e poscia li istruì con ordine e chiarezza non ordinaria sul miglior modo di coltivar ogni specie di piante e biade secondo la diversità del suolo; nè ommise a compimento di questo esimio lavoro di somministrare ai periti estimatori le istruzioni opportune sull' architettura delle fabbriche rustiche, e sui più acconcii mezzi per sciogliere il difficile problema di valutar giustamente, per quanto è possibile, il prezzo dei fondi rurali. In queste lezioni mise il nostro Professore a contribuzione le scienze naturali tutte, ma specialmente la Chimica e la Fisica, discusse li varii metodi della nostra coltivazione, che ben tutti li conosceva, per sceglierne i migliori; e formò così un corpo di dottrine le più adatte al suolo Italiano, ed appoggiate sulle autorità dei più esperti Georgici, e su gli esperimenti da lui stesso nei proprii poderi con ogni cura istituiti. Sommo vantaggio ne ridondò alla nostra agricoltura tosto che vider la luce questi elementi, e l'Autor suo si riconobbe come legislatore in questo ramo di pubblica e privata economia; il Governo del Regno Italiano saggiamente determinò che il libro del Conte Re si usasse come testo nelle nostre Università, e lo nominò, come già dissi, Professore di Agraria nell'Archiginnasio Bolognese. Indefesso siccome egli era nella fatica, e corrisponder volendo al favorevole accoglimento che ottenuta aveva questa sua produzione, ben presto alla prima succeder ne fece una seconda edizione più copiosa di quella, e nel periodo di circa tre lustri altre due ne comparvero in luce, nelle quali tutte l'Autor loro aggiunse nuove pregevoli osservazioni che incessantemente si procurava, e migliorò così ognora questa sua opera che riguardar devesi classica nel suo genere.

---

(1) Questo è il titolo dell' opera di cui la prima edizione porta la data 1798. Parma, anno trentesimo quinto dell'età dell'Autore.

Il nome illustre che il Conte Re così acquistossi fra gli Scrittori agronomi, determinò i due primi nostri corpi scientifici, l'Istituto nazionale cioè e la Società Italiana delle Scienze a dargli un attestato di approvazione chiamandolo nel loro seno, e così facendo aggiunsero nuovo sprone alle ardenti sue brame di promuovere gli utili studii, e dilatar per tal modo vieppiù la sua fama, nobile sentimento che negli animi generosi produce ognora ottimi frutti.

Se gli elementi di agricoltura dal nostro Cavaliere pubblicati a dimostrar non bastassero come egli possedesse in tutta l' estension sua la scienza, soccorrerebbe a quest' uopo la moltiplicità delle altre sue produzioni, per cui pochi argomenti agrarii vi furono che non formassero l' oggetto o di qualche sua dissertazione, o di qualche nuova sua più estesa fatica scientifica. La storia dell' agricoltura, quella degli Scrittori più chiari in questa facoltà, la coltivazione parziale di varie piante, la cura degli animali domestici e simili cose illustrò egli con li suoi scritti.

Allorquando comparvero a devastare i nostri canepai quei bruchi dai Naturalisti chiamati *Piralidi*, tosto egli accorse ad istruire gli Agronomi, pubblicando la storia di questi vermi divoratori, e insegnò i mezzi per estirparli. La coltivazione dell' *Erba medica* foraggio così utile ai nostri bestiami, quella dei pomi di terra, la storia del fico, e il metodo migliore per farlo vegetare con profitto; i tristi effetti prodotti dalle risaje, e non pochi altri rami parziali dell' agricoltura sviluppò egli in tanti separati opuscoli, maneggiando sempre con piena cognizione della cosa gli argomenti che a trattare si accingeva. Ma il lavoro più di ogni altro pregevole in questa classe dir devesi la compilazione *degli annali di agricoltura del Regno d' Italia* dal Conte Re cominciati a pubblicare nell' anno 1809. e proseguiti sino al 1814. Il credito con le sue Opere acquistatosi procurato gli aveva una estesa corrispondenza, così che tutti li nostri Agronomi facevano a gara per somministrargli lettere, dissertazioni e notizie, onde alimentar quest'Opera periodica, che vieppiù eccitò gli ingegni Italiani a dedicarsi all' agricoltura fra noi allora trascurata anzi che nò. L' attività poi del Conte Re non gli permise di figurar soltanto come semplice compilatore di detti annali, ma fu così operosa, che leggonsi più di quaranta dissertazioni agrarie tutte più o meno pregevoli da lui composte, ed in questa collezione inserite, talchè essa merita un luogo distinto fra le arccolte più utili di simile argomento (1).

---

(1) Fra le produzioni di poca mole del Conte Re annoverar devesi l'elogio di Sebastiano Corradi recitato in Modena l'anno 1816. per l'apertura della

Se io rapidamente trascorsi sopra queste produzioni del nostro esimio Professore, ciò attribuir devesi soltanto all'abbondanza delle materie delle quali a trattar mi rimane; perlocchè passando io adesso a ragionare delle altre sue Opere che contengono cose nuove, e che più decisamente concorsero a migliorare l'agricoltura Italiana, mi è duopo di più estesamente parlarne, affinchè conoscer si possa quanto ben meritò della scienza il Conte Re. Gli argomenti principali che egli sviluppò, furono la storia generale dell' agricoltura sulla quale scrisse con vasta erudizione, la biografia degli Scrittori della scienza, e la bibliografia georgica, la nosologia delle piante e la loro terapeutica. Considerò inoltre ed esaminò le qualità diverse dei letami, e ci istruì sulla scelta dei medesimi alla diversità delle coltivazioni più idonei; finalmente dettò utili precetti sulla economia campestre, sulla cultura degli orti e sul giardinaggio, talchè ogni classe di agricoltori può ricorrere agli scritti del Conte Re, ed ivi troverà abbondante pascolo di istruzione, ed apprenderà le regole più importanti onde ottenere messi ubertose dai proprii fondi.

Alla biografia agraria appartiene il discorso che ei lesse nell'anno 1810. alla Bolognese Società di agricoltura, in cui tessè un breve elogio ad alcuni illustri soggetti di questa Città nelle scienze naturali rendutisi celebri, il che vieppiù accrebbe verso di lui la stima di què Cittadini, i quali con sommo piacere dalla sua bocca udivano esaltate le patrie glorie. Ma un nuovo titolo egli poi si acquistò alla loro gratitudine, allor quando fece meglio conoscere nell'anno 1812. le Opere di Pietro Crescenzi pur Bolognese, e quando pubblicò l' elogio di questo Agronomo il più antico nostro maestro nella scienza dopo il risorgimento de' buoni studii; elogio in cui l' Autore congiunger seppe ai pregi dello stile

---

nostra Università. Eleganza di stile, cognizione delle materie filologiche, e buona condotta risplendono in questo scritto.

l' utilità, perchè lo corredò di copiose note a rischiarar dirette la storia dell' agricoltura nei secoli di mezzo, dei quali come ognun sa, poche e mal sicure notizie ci son pervenute. Nè lasciava egli di cogliere ogni opportunità per trattar qualche punto di relativa erudizione; perlocchè ora ragionò sulla nostra agricoltura in generale (1), ora conoscer ci fece come ai tempi dell' antica Roma la Religione influiva a mantenere le buone pratiche agrarie, ed ora si intertenne sulla poesia didascalica georgica (2). A scopo di questo suo lavoro si prefisse di comprovare, che verun' altra nazione quanto la nostra maneggiar seppe in poesia con maggior eloquenza, e profondità di dottrina gli argomenti di economia campestre. E per amenizzare questo suo scritto ed a vieppiù convalidare il suo assunto, inserì in esso alcuni fra i migliori squarci di poesia georgica fra i tanti che furon parte della feconda vena degli autori Italiani. Ma se questi saggi del sapere del Conte Re da alcuni non si credessero bastevoli a dimostrare quant'egli era valente scrittore, e come ben possedeva la scienza, tale sicuramente lo dovrà ognuno riconoscere or che rammenteremo le Opere sue principali, e fra queste sia la prima il suo dizionario ragionato dei libri di Agricoltura, Veterinaria ec. (3). Siccome egli procurava sempre l'istruzione della gioventù nelle sue produzioni, così preceder fece a questa una dotta prefazione in cui molto diffondesi nell'ammaestrare gli Agronomi intorno al modo di leggere con profitto i libri di agricoltura, e traccia in compendio la storia agraria di tutti i popoli, poichè dà a conoscere le Opere diverse più interessanti degli Scrittori d' ogni Nazione. E mentre egli in succinto espone con ordine alfabetico le produzioni di ben ottocento scrittori georgici, offre a suoi lettori contemporaneamente un breve critico esame delle medesime. Con questo dizionario alla mano ognuno sceglier può i migliori autori da consultare in agricoltura, ben certo che guidato dal Professor nostro non smarrirà nella via, e conoscere potrà quante invenzioni degli Italiani abbianci per negligenza nostra usurpate, spacciandole come proprie, gli stranieri (1). Non furon pero questi sempre ingiusti verso il Conte Re; poichè allor quando pubblicò il suo *Saggio sui letami e su le altre sostanze adoperate a migliorare i terreni*, la Società agraria di Parigi onorò con una medaglia d'oro il suo segretario Sig. Dupont che in lingua Francese tradusse il lavoro del nostro Italiano. E a dir vero merita questi ogni lode per così utile fatica, perchè sviluppa in tutta l'estensione l'argomento scelto a trattare, novera più di cinquanta qualità di sostanze atte a letamare i varii terreni, sciolti, argillosi, sabbiosi ecc., e determina quali di esse impiegar debba l'agricoltore nella varietà della coltivazione. Oggetto ulteriore delle sue ricerche fece il Conte Re l'economia dei letami, e ci istruì perciò su i metodi più idonei ad applicare il concime ai terreni, e siccome fra le sostanze suenunciate la creta, il carbon fossile, ed i sali considerar debbonsi fra i migliori ingrassi, così egli diffondesi a ragionare di essi, e si fa un impegno particolare di correggere gli abusi inveterati sulla scelta dei letami in generale, scelta che per la comune degli Agronomi forma un oggetto indifferente, mentre tale non la considerano i buoni agricoltori: così adoperando in questo lavoro il Conte Re, nulla ommette di quanto riguarda l'argomento che tratta dei concimi, uno dei principali oggetti per ottenere abbondevoli e scelti raccolti. Sensibile vantaggio trasse la nostra agricoltura dagli ottimi precetti in quest' Opera sviluppati, e l'Autore ottenne così lo scopo che pur voleva raggiungere, di render comuni cioè, molte utili cognizioni non applicate per l'addietro alla pratica perchè dalla maggior parte dei coloni ignorate. Lo stesso fine ei pure si propose con altri due libri che in appresso vider la luce, e che gli piacque di intitolar modestamente l'*Ortolano dirozzato*, *ed il Giardiniere avviato nell' esercizio della sua professione* (1). Come il saggio su i letami, così queste due Opere sulla coltura degli orti e dei giardini somministrarono cognizioni per noi in gran parte nuove, ed ora asserir puossi francamente che non ci mancano le istruzioni più necessarie ad ogni genere di coltivazione del fertile ed ameno nostro suolo. Senza pompa di stile ma corretto espone il nostro Cavaliere le regole migliori che seguir deve un ortolano ed un giardiniere, il primo per ottenere da un angusto spazio di terreno varii e moltiplici prodotti, che più gradite rendano le nostre mense, il secondo per apprender bene l' arte sua, e per far prosperare nel bel cielo d'Italia i fiori più vaghi che sotto lontani climi vegetano, provengan pur essi dal ghiacciato settentrione, o dalle aduste piaggie del mezzodì. Mentre con ordine mirabile e con tutta la dovuta estensione il Conte Re tratta della coltura degli orti e dei giardini nel primo volume di ciascuna di queste sue produzioni, consacra il secondo ad un dizionario ragionato delle piante ortensi, e dei fiori, in cui presenta i loro caratteri botanici, e ne insegna la particolar coltivazione, cosicchè gli ortolani ed i giardinieri, i quali prima che possedessero queste Opere, regolavano con una cieca pratica le loro agrarie speculazioni, possono adesso con la scorta dei precetti di un tanto maestro dirigere con sicuro profitto la coltivazione loro affidata (2).

---

(1) Lettere due sull' agricoltura Italiana. Bologna 1809.

(2) Della poesia didascalica georgica degli Italiani dopo il ristauramento delle scienze ec. ec. 1809.

(3) La prima edizione di questo dizionario uscì nel 1802. unita agli elementi di agricoltura; indi fu dall'Autore ristampato nel 1809. a Venezia con molte giunte e variazioni.

---

(1) In fine di questo dizionario trovansi un indice degli autori, uno degli Atti delle varie Accademie, ed uno simile ragionato delle materie, i quali tutti giovano assai a chi usar deve di questi libri.

---

(1) Il primo fu stampato a Milano in 8.° 1812. e nello stesso anno comparve per la terza volta il secondo.

(2) Quando il Professor Re ristampava le sue opere, e molte certo più di una volta ne ripubblicò, non ometteva di correggerle, e di aggiungervi quanto di nuovo e di utile trovava negli scritti più recenti, il che ci dà un chiaro testimonio della sua premura di perfezionare per quanto era possibile i suoi lavori scientifici.

Chiunque legga le Opere dell'Autor nostro, comprenderà facilmente quante cognizioni botaniche possedesse, ma del suo valore in questa facoltà ei ci diede poi una luminosa prova nel *Saggio teorico pratico sulle malattie delle piante* da lui pubblicato l'anno 1807. a Venezia, dopo di aver già due anni avanti stampato nelli Atti della Società Italiana (1) una Memoria sul medesimo argomento, nella quale ci dà un' idea generale dei varii morbi classificati da lui secondo le moderne teorie mediche, i quali attaccano le piante. Sviluppa il Professore Re nell'indicato Saggio diffusamente questa importante materia, e fa precedere al suo lavoro una storia compendiosa di quanto scrissero gli antichi ed i più recenti Agronomi sulle malattie di questi esseri inanimati, dei quali cerca di determinare l' analogia cogli animali. Si occupa quindi a descrivere lo stato morboso delle piante, e ad indagare le cause producitrici delle varie loro infermità, il che facendo estende il dominio della scienza assai oltre i confini segnati dai chiar. Plenk e Adanson, che primi fra gli Oltramontani occuparonsi a fissare un sistema universale nosologico delle piante (2). Poco vantaggio però ne ridonderebbe all'agricoltura se quì si limitassero le ricerche dell'Autore, ma spiegando egli ognora un vasto corredo di scientifiche cognizioni, propone i rimedii più atti a risanar le piante inferme, e per mantenerle vegete e robuste, perlocchè questo Saggio contiene la loro patologia e terapeutica insieme, e quel che più lo rende pregevole, sì è che il Conte Re ha sempre cercato di unire i metodi teorici alle pratiche osservazioni su i proprii fondi replicatamente eseguite.

Quello spirito di amor patrio e nazionale che sempre lo animò, e che più o meno in ogni sua produzione traluce, lo determinò ad assumere l' ardua impresa di scrivere una storia ragionata dell' origine, dei progressi e delle vicende dell' agricoltura Italiana. Ed a vieppiù eccitarlo a così vasto e difficile lavoro, influì non poco l'opera del Francese Sig. Peuchet intitolata *Rechèrches sur les progrès de l'Agriculture en Europe*. Siccome quest'Autore con poca fedeltà storica ragiona dell'agricoltura di Roma, così a raddrizzare il racconto dei fatti, ed a pagar un giusto tributo al vero, tracciò il Conte Re un quadro ben delineato della nostra storia agraria dai tempi più remoti progredendo sino al declinar del secolo II. dell' Era Cristiana, limitando però le sue erudite ricerche ai paesi fra l'Alpe e il Tronto situati, e dall'Adriatico mare e dall'Apennino circoscritti. Chi legger vorrà questo saggio di storia agraria, con piacere scorgerà quanto feconde fossero ai tempi Romani le nostre Provincie, e come dopo le funeste vicissitudini a cui soggiacque l' agricoltura sotto il governo dei primi Cesari, risorgesse nei secoli successivi a florido stato, ed avrà così mezzo di rettificare le false idee che intorno a quella coltivazione concepite avesse per quel periodo di tempo, attingendo come fece Peuchet, notizie a fonti meno pure di quelle alle quali ricorse il nostro scrittore. Con questo che dir puossi Prodromo di notizie agrarie il Conte Re augurar fece assai bene dell' esito dell' impresa, e nutrir potevasi fondata speranza che assumendo egli l'arduo impegno di scrivere la storia completa di questa scienza, ci avrebbe lasciato un lavoro esimio degno di gareggiare con gli altri di storia letteraria che noi possediamo, ma ben diversamente dispose la Provvidenza Divina.

---

(1) T. XII. Parte fisica pag. 225. | (2) Fappani. Elogio del Conte Re pag. 22.

Abbandonata l'Università di Bologna dopo la pace del 1814. venne il Professore Re a Modena, dove il nuovo Principe l' ottimo nostro Sovrano Francesco IV. onorollo di sua confidenza, e il destinò Professore di Botanica ed Agraria insieme nel Modenese Archiginnasio da lui restituito allo splendore primiero. Si accinse perciò il Conte Re a spiegar dalla Cattedra con chiarezza, amenità ed erudizione non comune i precetti della sua facoltà a numeroso stuolo di giovani che avidamente lo udivano, e rifuse direm così ed a nuova vita condusse l'orto botanico della Modenese Università; ma in mezzo a queste così per lui dilette occupazioni, volgendo il terzo anno soltanto dacchè era fra noi, dovette in pochi dì soccombere al fiero morbo contagioso che nel 1817. infierì per queste Provincie, e cessò di vivere alli 26. di marzo in Reggio sua patria, dove per le ferie pasquali erasi recato a riposare alquanto dalle incessanti sue fatiche. Grave riuscì questa perdita ed oltre modo amara alli suoi Concittadini ai quali mancò una sicura guida nella teorica, ma più nella pratica agricoltura; la Modenese Università in lui perdette uno de' più insigni Professori, che registrar potesse ne' suoi Annali, e la scienza agraria difficilmente additar potrà fra suoi cultori un soggetto del Conte Re più zelante per l'avanzamento di essa, e più di lui versato in tutti i rami che la compongono, sia se si consideri o la parte storica della medesima, o la teoria della professione, o finalmente se allo scopo principale si miri di quest'arte, cioè all'applicazione dei principii; e se noi seconderemo le saggie sue vedute, e fedelmente seguiremo i precetti agrarii che in tanti scritti ei ci lasciò, potrem viver sicuri di ritrarre abbondanti prodotti dalle fertili nostre campagne, e procurarci così abbondevole sussistenza, animar il commercio, e promuovere la pubblica e privatà felicità.

IV.

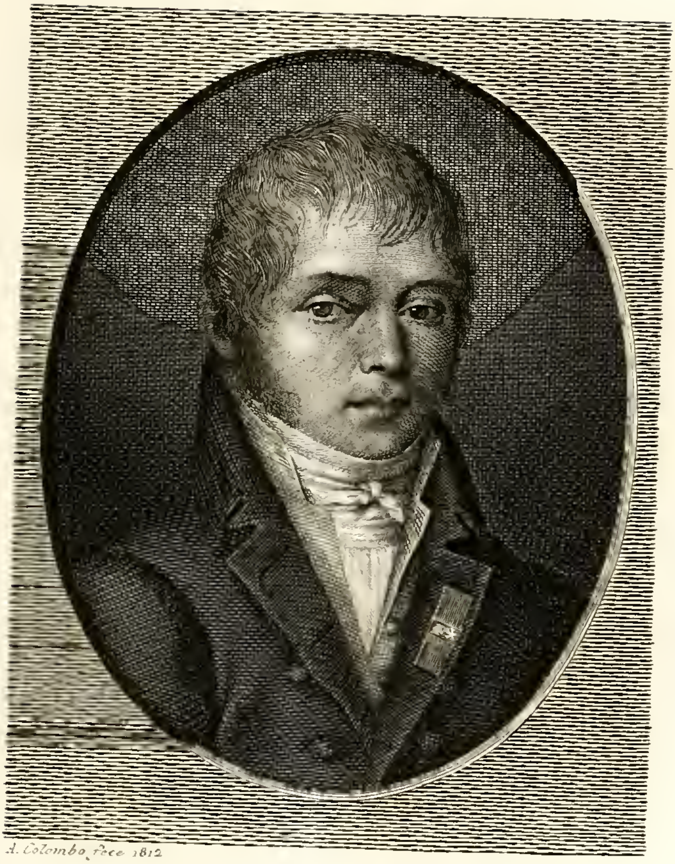
DANDOLO CONTE VINCENZO.

Se egli è pur vero che l'applicazione delle varie scoperte di cui si gloria l'umano ingegno, e delle verità scientifiche agli usi ed ai bisogni della vita, formi il più nobile scopo, a cui i Dotti diriger possano le loro vigilie e le loro meditazioni, merita certamente ogni elogio il Conte Vincenzo Dandolo, poichè egli con gli scientifici suoi lavori si prefisse costantemente di giovare al corpo sociale, e di accrescer le ricchezze della Nazione.

Il padre di lui esercitava la professione di chimico in Venezia allorquando nacque Vincenzo l'anno 1758. alli 6 di Ottobre (1). La vicina Padova antica sede del sapere accolse nella sua Università il giovinetto Dandolo, che consecratosi agli studii della chimica teorica e pratica rapidamente profittò in questa facoltà, cosicchè ottenne prima dell' età consueta il *grado straordinario*, distinzione che a què tempi difficilmente potevasi conseguire. Restituitosi egli alla patria con sì fausti auspicii, cominciò l' esercizio della pratica farmacia, e ben presto le sue preparazioni acquistarono credito straordinario; ma allorquando l'Italia dopo una lunga pace di quasi un mezzo secolo videsi involta in una guerra di nuovo genere, il Dandolo comparve a figurare nel teatro del mondo. Diremo però a sua lode, che procurò in que' tristi giorni di alleviar, per quanto da lui dipendeva, i mali che affligevano le conquistate Provincie, e seppe più di una volta con singolare fermezza resistere all'audacia dei nuovi Dominatori. Infatti allorquando l' antica Veneta Aristocrazia fu spenta, chiamato

---

(1) Compagnoni Cav. Memorie storiche del Conte Dandolo. 8. Milano 1820. pag. 5.



A. Colombo fece 1812

V. Dandolo

egli a servire la patria, zelò e sostenne a tutto potere gli interessi della medesima, nè bilanciando un momento tra il dovere di Cittadino Magistrato ed i pericoli a cui esponevasi, volle piuttosto irritar quell' Uomo a cui la Provvidenza, negli alti suoi disegni permise di reggere per alcun tempo i destini del mondo, anzichè tradire la causa de' suoi Concittadini (1). Che se alcun frutto ritrar non potè egli coll' animoso suo contegno in così terribil lotta, consolar si dovette almeno, poichè riuscì ad ottenere libertà e sollievo a molti suoi paesani, che contro ogni diritto aggravati si videro di ferri stranieri perchè reclamavan giustizia. In mezzo però ad un mar così burrascoso ben scorgendo il Dandolo, che quegli il quale operar volesse il bene, nol potea, i consigli seguì della prudenza, e si ridusse a vita privata in Varese, dove si dedicò con ogni fervore agli studii della campestre economia. Ma prolungatasi la memorabil lotta dell' armi Francesi ed Austriache, avendo la contraria fortuna ricondotta l' Italia sotto il dominio dei primi, percorrer dovette il Dandolo una nuova carriera politica, e andò Provveditor generale in Dalmazia, dove spiegando singolare attività, diresse le sue vedute a migliorar quegli incolti paesi, ed a dirozzare quelle misere popolazioni che a lui gratitudine mostrarono e corrispondenza di quanto oprar procurò a loro sollievo. E finchè l' Italia soggiacque alla Francia, veggiamo quest' Uomo indefesso occupato ognora in supreme Magistrature (2), in ardue commissioni che egli sempre eseguì, spiegando una forza di carattere comune a pochi, e cercando di promuovere ognora, per quanto ei poteva sebben sovente indarno, il bene della Repubblica. Varese dove già dissi, fissò il Dandolo sul cominciar del Secolo XIX. sua dimora, lo accolse di nuovo, allorchè cessarono le varie incombenze a lui affidate, ed allorquando la stabil pace dell' anno 1815. ricondusse in Europa giorni migliori, ed a più liete speranze sollevaronsi gli animi da lunghe sventure sommamente attristiti.

---

(1) Mem. cit. p. 15. 16.

(2) L' ultima più cospicua carica da Lui occupata fu quella di Senatore del Regno d' Italia.

Intese egli in quel delizioso soggiorno a procurarsi abbondanti raccolte dalle sue terre, cercando sempre di comunicare gli utili ritrovamenti, ed i migliori metodi di agricoltura ai suoi connazionali, che si diede ogni premura di illuminare con li varii suoi scritti, e colla estesa pratica agraria. Nè quì si limitarono le moltiplici fatiche del Dandolo; ma estese egli le sue ricerche ad alcuni fra i rami più lucrosi del nostro commercio, e in modo particolare a quello delle sete, dei vini e dei grani, eccitando per ogni maniera l' industria onde premunir la nazione Italiana contro i gravi danni che le minaccia il commercio estero. Mentre però a questi studii, ed alle sue gradite occupazioni campestri intieramente consecrato conduceva il Dandolo una vita pacifica in seno alla piccola sua famiglia, un colpo apopletico rapidamente lo involò nell'età di soli anni 61. alla scienza, ai parenti ed ai dotti amici, che la cortese sua ospitalità continuamente presso lui richiamava a trattenersi in scientifici colloquii, e ad istituire utili sperienze al grande scopo rivolte di giovare l' umanità, e di accrescere le nazionali ricchezze.

Abbozzato così in pochi tratti il quadro della vita civile del Conte Vincenzo Dandolo, perchè non manchino alla storia i cenni più importanti intorno ad un personaggio per molti riguardi chiaro e distinto, le sue opere e le sue imprese letterarie occupar debbono con più diritto la mia penna, poichè la Società nostra, cui l' Italia fidò nelle scienze naturali un patrimonio per essa oltre modo caro e geloso, mentre procurar ne deve l' incremento e lo splendore, un sacro dovere si fa pure di consegnare alla memoria della posterità ne' suoi Annali le onorate ed utili fatiche de' valorosi suoi Accademici.

Allor quando il Conte Dandolo si occupò nello studio della Filosofia e specialmente della Fisica e della Chimica, non pochi progressi aveva già fatto la prima, e la seconda abbandonate le teorie di Stahl cominciava già ad insegnare quelle del Lavoisier che più adatte sembrarono allora a spiegarne gli intralciati fenomeni. E sebben queste dottrine abbian dovuto nel volger di non molti anni dar luogo alle più recenti di Vauquelin, Davy, Thenard, Berzelius, e di altri sommi nell' arte, tuttavia il Conte Dandolo ben meritò della scienza, poichè noverossi egli fra i primi in Italia, che seguace dell' illustre ma sventurato Chimico Francese ne abbracciasse gli insegnamenti, e con fervore li propagasse nelle nostre scuole. A quest' uopo diresse egli le prime sue fatiche, traducendo in Italiano il *Trattato elementare di chimica di Lavoisier, quello delle affinità di Morveau, e la nuova nomenclatura chimica* che seppe egli con garbo addattare all'indole del nostro idioma. Queste versioni alle quali il Dandolo molte illustrazioni aggiunse dirette a comprovare la verità, e ad estender vieppiù l'uso delle dottrine chimiche d'oltremonte, si riconobbero generalmente eseguite a dovere, ed ebber la sorte d'incontrar l'approvazione di alcuni dei dotti Chimici Francesi, i quali compiacquersi di spedire al nostro Autore alcune loro Memorie ed altri scritti, che egli poi fece di pubblico diritto colle stampe (1). Entrato con augurii così fausti il Conte Dandolo nella carriera scientifica, e scorgendo ben egli dopo gli avanzamenti che dalla metà del secolo XVIII. in avanti fatti avevano le fisiche discipline, quali vincoli le stringano fra loro in amichevol concordia, si accinse all'util fatica di illustrare con l'ajuto dell' Abate Antonio Fabris gli elementi di Fisica sperimentale del chiar. Professor Napoletano Saverio Maria Poli, procurandone una nuova edizione per le nostre scuole. Sebbene questo pregevol corso di lezioni racchiudesse verità utili in copia, e giovato avesse non poco introducendo fra noi giuste idee in fatto di Fisica, tuttavia scevro non era di alcuni difetti. Li due commentatori rischiararono i passi più ardui, offrirono le dimostrazioni di molti teoremi nudamente esposti, e diversi intieramente nuovi ne aggiunsero i quali servono di base ad alcune dottrine. Nè ommisero essi di inserire e scogli, e corollarii per far conoscere non poche utili verità pratiche, e dimostrare alcuna volta l'insussistenza di varie osservazioni non vere o poco probabili. Ma più segnalati servigi rendettero questi due Filosofi alla nostra gioventù nella parte fisico-chimica del loro lavoro, poichè compilarono due dizionarii ragionati di *vecchia e nuova chimica nomenclatura*, nei quali sviluppate veggonsi le nuove teorie fisico-chimiche, somministrando così agli studiosi ogni più acconcio mezzo onde conoscere le idee antiche e nuove della scienza, e di valutarne il relativo pregio (1). Con straordinario plauso accolta venne quest' Opera, che eccitò e rivolse i nostri più svegliati ingegni a coltivar con fervore questo ramo di scienza naturale, e così grande ricerca se n'ebbe che nel giro di nove anni sei edizioni ne uscirono dai nostri torchii.

---

(1) Lavoisier gli mandò due *Memorie sulla respirazione, e la traspirazione;* Fourcroi alcune giunte inedite alla sua Filosofia chimica tradotta dal Dandolo; e Van-Mons alcuni suoi comenti inediti.

Mentre il Conte Dandolo con queste sue prime produzioni giovava non poco a diffondere nella penisola li sani principii della Fisica, ed a render più comuni le applicazioni delle chimiche scoperte alle arti ed alle composizioni dei farmaci salutari, in altri oggetti di pubblica utilità impiegava egli le dotte sue meditazioni, nell' agricoltura cioè, ed in generale nella campestre economia. Prima però di dedicarsi, come fece, intieramente a promuovere la scienza agraria, dar ci volle un nuovo saggio delle sue profonde cognizioni in chimica traducendo in Italiano la *Statica chimica* dell' illustre Berthollet, e corredandola di copiose annotazioni. Il che facendo rendette il Dandolo un segnalato servigio ai coltivatori della chimica teorica, perchè mentre essi convenir dèbbon tutti sul merito dell'Opera, confessar pur debbono al tempo stesso che l'arduità della materia in se, alla sublimità congiunta delle teorie, e dei pensamenti dal Berthollet in questo suo lavoro sviluppati, ne rendevano oltre modo difficile l'intelligenza del testo francese. Ma ben considerando il nostro Autore che la chimica teorica di poca o niuna utilità sarebbe, se non se ne applicassero i principii a sciogliere problemi pratici, abbandonò, direi quasi intieramente le discussioni di teoria, e si consecrò tutto allo studio dell'agricoltura, procurando di introdurre sane regole ai nominati principii appoggiate, e promovendo non pochi utili miglioramenti nei metodi delle nostre lavorazioni.

---

(1) Contengono questi due dizionarii il *linguaggio nuovo e vecchio, vecchio e nuovo de' Fisico-chimici* con tavole indicanti l'ordine di un' utile lettura. Essi hanno per titolo *Fondamenti della scienza fisico-chimica applicati alla formazione dei corpi e ai fenomeni della natura;* e vanno uniti all' edizione della Fisica del Prof. Poli fatta da Dandolo.

Quattro principali oggetti di campestre economia chiamarono soprattutto a se l'attenzione di questo insigne Agronomo, il governo cioè delle pecore Italiane e Spagnuole, quello dei bachi da seta, la coltivazione delle patate, e il commercio dei grani, su i quali argomenti esige il dover mio che partitamente io ragioni.

Chiunque conosca la storia politica ed economica della bella nostra penisola, ignorar non deve quanto esteso commercio con tutte le Nazioni del globo facessero gli Avi nostri con le copiose lane, che producevano le mandre nudrite nei boschi specialmente della Lombardia, e nelle regioni Venete e Toscane. E sebbene scorgesse il nostro Conte che al presente ritrar forse non si possono da questo ramo d'industria gli immensi profitti, che nei passati secoli ritraevansi, tuttavia ben vedeva che una coltivazione più estesa, una più ragionata e miglior custodia degli armenti accrescer poteva questo commercio. Animato egli perciò da un generoso spirito di patrio interesse, versò a lungo su questo argomento, e cominciò dall'introdurre fra noi più d'una volta le pecore e gli arieti Spagnuoli, i cui finissimi e lunghi velli somministrarono i migliori materiali per le fabbriche dei tessuti in lana. Ogni cura ed ogni studio inoltre impiegò egli per naturalizzare in questi climi simili animali, e quindi nell' Opera da lui pubblicata sul governo delle *pecore Spagnuole* ampiamente trattò della loro educazione, del loro nutrimento, del metodo migliore di raccogliere le lane, e si diffuse a descriverne le infermità e ad indicarne i più opportuni rimedii. Nè di tutto ciò pago, fissato avendo per massima, che quando l' uomo si accinge a qualche impresa, cercar deve, per quanto è in lui, di raggiungere la perfezione, dopo di aver il Conte Dandolo ammaestrato i nostri pastori su i loro doveri, e dopo di avere istruiti i coloni sulla miglior costruzione degli ovili, insegnò i metodi più acconci ad ottener lane ed allievi di sommo valore, e ad evitare il pericolo di peggiorare in qualità, pericolo cui facilmente vanno soggette le razze Spagnuole traspiantate altrove. Ed a promuovere vieppiù questa coltivazione nel fertile nostro suolo, istituì gli opportuni calcoli, e fece palesi i vantaggi che producono le sunnominate pecore ben tenute, concludendo che giunger si può ad ottener da un dato fondo per sino un duplicato prodotto. Mentre il Dandolo procurava così di introdurre in Italia, come gli riuscì, questo nuovo metodo, non trascurò i nostri ovili e consacrò la seconda parte dell' opera di cui ragiono, ad ammaestrare gli abitatori specialmente del Dipartimento del Lario in questa materia, onde illuminati così sui loro veri interessi, correggere volessero gli errori invalsi nell' allevare le pecore indigene, errori che sono infausta fonte di non pochi danni. Al qual uopo comunicò loro ed alla Repubblica Italiana un nuovo sistema per la custodia delle nostre mandre, applicando opportunamente agli ovili d'Italia gli usi delle altre nazioni modificati però al clima e suolo di questi paesi. A così sagge vedute di campestre economia corrispose il governo del Regno Italiano, col pubblicare a proprie spese, e col diffondere l' Opera del nostro Autore, che provò la consolazione inoltre di veder fra noi propagati i così detti *Me-*

rini di Spagna, e migliorate in tal modo le razze delle pecore comuni, e per natural conseguenza ancora la qualità delle nostre lane (1).

Impiegava così il Conte Dandolo i suoi talenti e gli abbondanti suoi redditi pel pubblico bene, nè mai si ristava dal cercar nuovi oggetti per raggiungere questo, direi quasi, unico scopo di sue letterarie fatiche. Ad altro ramo di nazionale industria perciò, e di forse maggior interesse per i commercianti rivolse egli le sue ricerche, al governo cioè dei bachi da seta. Se somministravano anticamente lucrose speculazioni le nostre lane, non minori certamente ne offerivano le sete che quì lavoravansi; ma un fatale decadimento di queste lavorazioni minacciava già da parecchi anni ruina a simile commercio, e lo si dica pure a lode del vero, agli studii, alle premure, al generoso cuore del Conte Dandolo siam debitori di aver fortemente scossa la nostra infingardaggine, e di aver richiamato con sommo comune vantaggio a nuova vita questa coltivazione.

L' Italiana letteratura già ricca di opere e di poemi didascalici, frutto dei felici ingegni del secolo d'Augusto, ci addita poi fra i non pochi moderni *La Riseide* poemetto incomparabile dell' egregio Cav. Veronese Spolverini, ed i *Bachi da seta*, i costumi dei quali con cetra Virgiliana cantò nel secolo xvi. il Cremonese Vida; ma i precetti ch'ei ci lasciò sul governo di questi così prodigiosi animaletti non giovavano più all' uopo di raccogliere da essi abbondevoli prodotti per il commercio. A riparar perciò tanto danno pronto accorse il Conte Dandolo, e nella sua *Arte di governare i bachi da seta* si propose la soluzione del più importante problema che in questo ramo di industria si incontri; quello cioè *Di trarre da una data quantità di foglia di gelso la maggior copia di ottimi bozzoli, determinando contemporaneamente l' influenza*

---

(1) Notizie ec. pag. 22.

di questo maggior annuo prodotto sull' aumento annuo di ricchezza sì domestica che nazionale. Io mi dilungherei troppo dai limiti ad un elogio prefissi, se presentar quì volessi l' estratto di quest' Opera che vide in Milano la prima volta la luce nell' anno 1815. Dirò bensì che l' Autore nulla ommise di quanto concerne l'argomento trattato, e perciò facendosi a insegnar da prima il modo per lui creduto il più atto a procurare la nascita, la raccolta e il trasporto dei bachi da seta, guida egli l'Agronomo per tutte le epoche della vita di questi vermi, e gli addita il cibo migliore fra le diverse qualità di foglia per nutrirli, la più opportuna architettura dei loro alloggiamenti, la vigilanza e le regole ad evitar richieste i pericoli di morte, ai quali per le vicende della stagione questi delicati esseri facilmente soccombono; descrive le varie infermità che gli assalgono, ed insegna i mezzi a prevenirle i più acconci; nè trascura l'oggetto importantissimo della rinnovazione del prodotto con l' istruirci sui mezzi per conservar la semente. Sviluppate così ampiamente queste materie il nostro Autore, che considerar volle, come già dissi, in tutta l'estension sua l'argomento, porta in fine le sue indagini sulle viste economiche del commercio delle sete Italiane con le nazioni di Oltremonte, e ci enumera i vantaggi sommi che trarremo dalla prospera coltivazione dei bachi da seta. Accolsero con ardore gli Agronomi le istruzioni del Conte Dandolo, e si accinsero a praticarle, specialmente quelli delle Provincie Venete, le quali ricche di gelsi somministrano abbondante pascolo ai più volte nominati vermi; ma come avviene a chi introdur vuole novità, se egli trovò non pochi, i quali appigliandosi al nuovo metodo di educare quelli animali, sommo profitto ne trassero e perciò il lodarono, ed a lui si mostrarono riconoscenti, insorsero però ad un tempo altri a combatter le nuove dottrine. Ma diretto siccome era il Dandolo dal solo spirito di giovare alla pubblica cosa. con animo placato accolse le opposte sentenze, e perseverò costante ad osservare e registrare i casi favorevoli e contrarii, che nelle vaste sue bigattiere accadero dal 1815.al 1819., e raccolse da molti suoi corrispondenti i materiali all' uopo necessarii per tessere la storia delle diverse vicende, a cui soggiacquero le bigattiere regolate con gli antichi e co' nuovi metodi. Potè egli così compiere l' Opera sua, e in due nuovi volumi consegnando i risultamenti da lui e da alcuni altri insigni Agronomi ottenuti nell' allevare i bachi da seta, vittoriosamente dimostrò il vantaggio del nuovo suo metodo, e compiutamente sciolse il quesito propostosi (1). Ammaestrati così dalla sperienza i coltivatori in grande di questo ramo di pubblica industria, adottarono essi o in tutto o in parte gli insegnamenti del Conte Dandolo, il quale perciò con le utili novità da lui introdotte ad incremento del commercio delle sete, si procurò la stabil gloria di venir dichiarato e riconosciuto quanto mai benemerito della sua nazione. Ma altri titoli alla patria riconoscenza acquistò questo Cavaliere, che quantunque occupato ben sovente in tanti pubblici negozii, con sommo ardore coltivò gli studii agronomici, congiungendo sempre le ricerche teoriche alla pratica, onde trovar quali fra le proposte teoriche realmente giovar potessero all' agricoltura.

Dopo che l' Italia perdette il Professor Conte Filippo Re, più non eran comparsi alla luce giornali agrarii: a questa lodevole impresa dar voleva nuova vita il Conte Dandolo, il quale con l' ajuto degli ospiti suoi che di continuo il visitavano nel suo delizioso ritiro di Varese, dove facevan lunga dimora, e col mezzo di tanti suoi dotti corrispondenti avrebbe non v' ha dubbio, ben inanimato una simile opera periodica, che riuscita sarebbe all'agricoltura oltre modo giovevole. Ma restaron deluse così belle speranze, poichè la morte, come sopra accennai, colse il Dandolo in buona età: se però non potè compiere questo suo progetto, altri pegni ben luminosi ei ci lasciò dello zelo che, direm così, il divorava per la nazionale prosperità. La troppo minuta divisione dei poderi, l'intersecazione dei fondi, le tanto svariate loro confinazioni, i beni comunali, ed altri simili oggetti somministraron materia alle sue attive ricerche; procurò egli perciò di suggerire ai proprietarii gli opportuni rimedi a togliere in agricoltura gli inceppamenti dalle indicate cause prodotti, e varii metodi introdusse diretti a migliorare la coltivazione dei fondi, le quali cose tutte risvegliarono l'attenzione comune per cui si adottarono, e si vanno adottando dovunque non poche novità vantaggiose all'agricoltura. Al che ottenere influì assai la massima che ei si fissò „ di eseguire gradatamente (sono parole „ del chiar. Sig. Compagnoni) un sistema di operazioni agra- „ rie, per cui mentre amplificasse i profitti dell'industria sua, „ accumulasse un complesso di prove per diffonderne la per- „ suasione negli altri sia coll'esempio, sia coll'istruzione „(1).

---

(1) Al presente con due terzi e fors' anche con la sola metà della foglia che altre volte impiegavasi, si ricava dalla stessa misura di semente un prodotto due o tre volte maggiore di ottimi bozzoli.

Nè già la sola privata industria procurò questo insigne Agronomo di promuovere con li suoi scritti e le sue sperienze, ma estendendo a più ampii confini le sue vedute, cercò di scuoprire le intime relazioni che legano la scienza agraria con la pubblica fortuna, e mentre giovò ai privati, somministrò pure lumi e regolamenti ai Governi, onde perfezionar vieppiù il reggimento dei nazionali interessi. Fra le tante qualità di piante, la coltivazione delle quali porse per tale oggetto al Dandolo argomento di nuove sperienze e di nuove osservazioni, deve quì ricordarsi quella dei pomi di terra e l'altra delle uve. Se dopo che cominciossi a coltivare in Italia il grano turco si ottenne un abbondevol sollievo nelle penuriose annate, che l'inclemenza delle stagioni di quando in quando riconduce, tuttavia soggiacer dovette a gravi miserie la parte meno agiata degli abitatori d'Italia, qualor ci percosse il flagello della carestia. La mercè però delle fatiche di varii Agronomi, si cominciò poi a introdurre nel nostro suolo la coltivazione delle patate, la raccolta delle quali giovò a rendere men gravi i danni della penuria de' grani per coloro che docili ascoltarono le voci dei dotti agricoltori. Un posto distinto occupa fra questi il Conte Dandolo, il quale con la reiterata pubblicazione di varii opuscoli inculcò ai nostri coloni una tal coltivazione, ed ammaestrandoli col proprio esempio riuscì a salvare le numerose famiglie de' suoi rustici dai terribili effetti della carestia che ci afflisse nell' anno 1816. Ed allora fu che animato egli vieppiù da un vivo patrio amore diè in luce l'Opera quanto mai pregevole in cui sviluppa estesamente l' argomento della coltivazione dei pomi di terra; e collegando ognora le viste di pubblica utilità con quelle dell' istruzione agli agricoltori, onde ritrar dalla terra i migliori e più abbondanti prodotti, gli eccitò da prima ad introdurre nei poderi mezzani questa nuova pianta, come già fecero gli avi nostri quella del frumentone. Ma per ciò eseguire con vero vantaggio, come si era prefisso il Conte Dandolo, ci additò egli i metodi migliori per letamare il suolo che ricever deve li pomi di terra, per raccoglierli e conservarli, istituì un util confronto fra le quantità di grano e di patate che raccorre si possono da una data estensione di terra, bilanciando l'utile rispettivo di questi due prodotti, nè ommise di esaminare quali ostacoli si oppongono a questo nuovo ramo d'entrata, ed insegnò a superarli. A compiere poi la trattazione dell' assunta materia, si occupò ancora a determinare i rapporti, che passano fra questa coltivazione e l' interesse e la tranquillità dei possidenti per il miglior sistema economico delle famiglie, e per ottenere ottimi foraggi e letami più abbondanti, cosicchè l'opera da lui pubblicata su questo ramo di industria agricola si riconosce in ogni sua parte compita, e la più opportuna all' intento di ottenere abbondevol raccolta di simile derrata e un sicuro smercio della medesima.

---

(1) Pag. 20. delle cit. Mem. Compagnoni.

I lumi e le cognizioni profonde nella scienza della natura, e in modo speciale nella chimica guidarono il nostro Autore anche nelle ricerche da lui imprese, allor quando ardendo in Europa lunga ed aspra guerra fra le più potenti Nazioni in essa dominatrici, gemeva il commercio Europeo dai più forti vincoli di proibizioni inceppato. E quantunque l' esito pienamente non corrispondesse alle sue indagini nella fabbricazione dello sciloppo di uva da sostituirsi allo zucchero, tuttavia se comune si rendesse la pratica da lui perciò insegnata , mentre per l' una parte l' abbondevol raccolta delle nostre uve ci somministrerebbe mosto bastante per la lavorazione del sciloppo senza pregiudicare a quella dei vini e dell' acquavite, avremmo per l' altra in questo artificiale prodotto un nuovo ramo di commercio per noi attivo. Ma più util materia procurossi poi il Conte Dandolo per le sue dotte speculazioni, allorchè si occupò di fare e conservare i vini in modo che regger possano a lunghe navigazioni. Considerò egli il problema in aspetto ben diverso da quello in cui gli scrittori di Enologia l'avevan finora maneggiato, e reggendo sempre li suoi passi con la scorta delle *cognizioni sientifiche* congiunte alla pratica, stabilì con sicurezza i precetti di quest' arte fondati sui fatti e sulle più inconcusse ragioni ; ma come di altri argomenti dall'Autor nostro trattati, così di questo avvenne, che la morte cioè non gli permise di compiere il suo lavoro, il quale avrebbe sicuramente giovato a promuovere vieppiù il commercio dei nostri vini con le nazioni straniere (1); poichè sappiamo, che i vini Piemontesi fabbricati con le regole da lui prescritte valicarono incolumi *la linea*, e le sue istruzioni di Enologia pratica contarono in pochi anni due edizioni.

Sopra molti e svariati oggetti versò a dir vero questo Cavaliere, la cui attività non permettevagli mai riposo, o fosse occupato nelle pubbliche cure, o in vita privata conducesse tranquilli i suoi giorni; allorquando perciò una ferma pace ristabilì in Europa l'ordine, e ci permise di respirar sotto la protezione di regolati Governi, temette non senza ragione l'Autor nostro, che il commercio Italiano provar potesse notabile scapito dalla libera navigazione dei mari d'Oriente. Aveva già egli fin dal 1806. per far fronte a questo pericolo impiegata la sua penna, onde animar l' industria nostra ad imprendere nuovi rami di commercio, ma si accinse poi ad esaminare più d'appresso quest' arduo problema di civile economia, allor quando dopo l' accennata pace si verificò la libertà della navigazione del *Mar Nero:* fece egli perciò di pubblico diritto un' Opera nel 1820. in cui descrisse i pericoli che dopo le abbondanti introduzioni di granaglie nei Porti dell'Adriatico più d' avvicino temer doveansi, e cercò d' istruirci sul modo di trovarvi il dovuto compenso. E ricalcando già le orme da lui battute in varii de' suoi lavori agricoli-economici, eccitò nuovamente gli Italiani a migliorare la fabbricazione delle sete e dei vini, onde aumentarne lo smercio, consigliò utili e facili avvicendamenti all'oggetto di ottener prodotti più abbondanti d' agricoltura, ed insistette sulla massima di estendere la coltivazione dei bestiami, onde procurarci nuovi oggetti da commerciare con le piazze estere, ed ottener così che non si scosti molto dall' equilibrio la bilancia della nostra contrattazione con l' estero, se pender non può a nostro favore.

---

(1) Notizie citate pag. 36. alla 39. Il Dandolo lasciò molti materiali per compiere quest' Opera che si attende dal cognato di lui Sig. Dottor Luigi Grossi.

Bello è il carattere che il chiar. Cav. Compagnoni sulla fine delle più volte citate memorie ci offre del Conte Dandolo (1). Temperanza nella varia fortuna e generosità verso gli amici, che furon numerosi, egli sempre dimostrò; accolse con affetto e volentieri prestò ospizio agli sventurati; l' onest' uomo trovò in lui protezione e soccorso nelle tristi vicende della vita, e più volte il Dandolo prevenne i bisogni altrui, nè dimenticò giammai nel soccorrere, quei riguardi che rendon men grave il peso di chi è costretto a ricever il benefizio. Animato egli sempre da viva brama di alleviar la sorte infelice de' suoi simili, e ben conoscendo esser miglior partito il procurar lavoro al povero, anzichè somministrargli elemosina gratuita, impiegò una parte delle sue beneficenze nei lavori della campagna, e molte famiglie di rustici in lui riconobbero non già un padrone ma un amico, un padre. Avvenente e ben composto nella persona, nobile nel tratto, e parlator facondo, riusciva gradito a chi seco lui conversava, così che quelli che davvicino il conobbero, tutti ne concepiron stima insieme ed affetto. Ornato così di tanti pregi il Conte Dandolo visse caro agli amici ed alla piccol sua famiglia, composta, di un' amabile sposa e di un unico figlio, che seguendo le paterne orme si distingue nella carriera delle scienze.

---

(1) pag. 61 e seg.

MEMORIE
DI
MATEMATICA

SULLO SVILUPPO DELLE FUNZIONI IN SERIE

MEMORIA

DEL PROF. PIETRO PAOLI

Ricevuta adì 19. *Novembre* 1828.

1. Data l' equazione $z = 0$ tra le variabili x ed y, sia proposto di esprimere una funzione ψ delle medesime variabili per y senza x. Se ponghiamo $x' + x - x'$ in luogo di x, e sia z' il valore di z quando x si cangia in x', avremo pel teorema di Taylor

$$0 = z = z' + (x - x')\frac{dz'}{dx'} + \frac{(x-x')^2}{2} \cdot \frac{d^2z'}{dx'^2} + \frac{(x-x')^3}{2.3} \cdot \frac{d^3z'}{dx'^3} + \&c.$$

Per determinare la quantità $x - x'$ mediante questa equazione facciamo

$$x - x' = Az' + Bz'^2 + Cz'^3 + Dz'^4 + \&c.$$

sostituendo il qual valore nell' equazione precedente, e paragonando tra loro i termini affetti dalle medesime potenze di z' conosceremo le quantità A, B, C, &c.

Ponendo similmente $x' + x - x'$ invece di x nella funzione ψ, e chiamando ψ' il valore di ψ quando x diventa x', otterremo

$$\psi = \psi' + (x - x')\,\frac{d\psi'}{dx'} + \frac{(x-x')^2}{2} \cdot \frac{d^2\psi'}{dx'^2} + \frac{(x-x')^3}{2.3} \cdot \frac{d^3\psi'}{dx'^3} + \&c.$$

e sostituendo ad $x - x'$ la serie antecedente avremo ψ così espressa

$$\psi = \psi' + a_1 z' + a_2 z'^2 + a_3 z'^3 + \&c.$$

Per trovare i valori dei coefficienti a_1, a_2, a_3, &c. si osservi, che in questa ultima equazione x' non esiste che in apparenza, e deve sparirne dopo fatta la riduzione di tutti i termini, e da ciò segue che il differenziale della medesima equazione preso per rapporto ad x' dev'essere $=0$. Avremo pertanto

$$0 = \frac{d\psi'}{dx'} + \frac{da_1}{dx'}.z' + \frac{da_2}{dx'} \cdot z'^2 + \frac{da_3}{dz'}.z'^3 + \&c.$$

$$+ a_1 \frac{dz'}{dx'} + 2a_2 \frac{dz'}{dx'}.z' + 3a_3 \frac{dz'}{dx'} \cdot z'^2 + \&c.$$

Quindi se facciamo $\frac{dz'}{dx'} = -\frac{1}{X'}$, e paragoniamo insieme le medesime potenze di z', troveremo

$$a_1 = X' \frac{d\psi'}{dx'}$$

$$a_2 = X' \frac{da_1}{2dx'} = X' \frac{d.X' \frac{d\psi'}{dx'}}{2dx}$$

$$a_3 = X' \frac{da_2}{3dx'} = X' \frac{d.X'd.X' \frac{d\psi'}{dx'}}{2.3dx'^2}$$

&c.

Conosciuti i valori di a_1, a_2, a_3, &c. avremo ψ espressa per x' e per y; ma siccome possiamo prendere x' a piacere, acciò sia ψ espressa per y senza x, basta che facciamo x' eguale ad una costante, o anche ad una funzione qualunque di y. E se osserviamo che z e z' sono funzioni simili di x e di x', potremo usare z ed x in luogo di z' ed x', purchè ci ricordiamo di far da per tutto terminate le operazioni $x = x'$. Sarà pertanto, posta $\frac{1}{X} = -\frac{dz}{dx}$,

$$\psi = \psi + z X \frac{d\psi}{dx} + z^2 X \frac{d. X \frac{d\psi}{dx}}{2dx} + z^3 X \frac{d. X d. X \frac{d\psi}{dx}}{2.3dx^2} + \&c.$$

facendo nel secondo membro dopo le differenziazioni $x =$ ad una funzione qualunque di y.

2. Sia ψ funzione della sola x, e z abbia la forma $F(x) - F(a) - y$, ove a è una costante; indicando col segno $F'(x)$ la funzione $\frac{dF(x)}{dx}$ avremo $\frac{dz}{dx} = F'(x)$, e quindi

$X = -\frac{1}{F'(x)}$, $a_1 = -\frac{1}{F(x)} \cdot \frac{d\psi}{dx}$,

$$a_2 = \frac{1}{F'(x)} \cdot \frac{d. \frac{1}{F'(x)} \frac{d\psi}{dx}}{2dx}, \quad a_3 = -\frac{1}{F'(x)} \cdot \frac{d. \frac{1}{F'(x)} d. \frac{1}{F'(x)} \frac{d\psi}{dx}}{2.3dx^2}, \ \&c.$$

e siccome z diventa $-y$ quando vi si pone $x = a$, otterremo

$$\psi = \psi + y \frac{1}{F'(x)} \frac{d\psi}{dx} + y^2 \frac{1}{F'(x)} \frac{d. \frac{1}{F'(x)} \frac{d\psi}{dx}}{2dx}$$

$$+ y^3 \frac{1}{F'(x)} \frac{d. \frac{1}{F'(x)} d. \frac{1}{F'(x)} \frac{d\psi}{dx}}{2.3dx^2} + \&c.$$

facendo nel secondo membro $x = a$. E se sostituiamo ad y il suo valore $F(x) - F(a)$, avremo così lo sviluppo di una funzione ψ ordinato per le potenze di un' altra funzione $F(x) - F(a)$.

Se per esempio $\psi = b^x$, $F(x) = c^x$, ed $a = 0$, sarà $\frac{d\psi}{dx} = b^x \log.b$, $F'(x) = c^x \log.c$, e posta m in luogo di $\frac{\log.b}{\log.c}$ sarà $\frac{1}{F'(x)} \frac{d\psi}{dx} = mb^x c^{-x}$, $\frac{1}{F'(x)} \cdot \frac{d.\frac{1}{F'(x)} \frac{d\psi}{dx}}{2dx} = \frac{m(m-1)}{2} b^x c^{-2x}$,

$$\frac{1}{F'(x)} \cdot \frac{d.\frac{1}{F'(x)}\, d.\frac{1}{F'(x)} \frac{d\psi}{dx}}{2.3dx^2} = \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} b^x c^{-3x}, \text{ \&c.}$$

e quindi

$$b^x = 1 + m(c^x - 1) + \frac{m(m-1)}{2} (c^x - 1)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} (c^x - 1)^3 + \text{\&c.}$$

Quando $F(a) = 0$, avremo lo sviluppo di ψ secondo le potenze di $F(x)$, ed in luogo di a dovrà prendersi un valore di x, che soddisfaccia all' equazione $F(x) = 0$. Tante adunque saranno le serie, quanti i valori di x, che rendono $F(x)$ nulla; ma acciò lo sviluppo sia possibile, è necessario che per un dato valore di a non abbia $F(x)$ altri fattori eguali ad $x - a$, perchè altrimenti sarebbe $F'(a)$ zero, ed i coefficienti della serie riescirebbero infiniti.

3. Rimanendo ψ funzione della sola x sia più generalmente $z = F(x) - F(a) - y\phi$, ove anche ϕ sia funzione di x. Avremo $\frac{dz}{dx} = F'(x) - y\frac{d\phi}{dx}$, e quindi $X = -\frac{1}{F'(x) - y\frac{d\phi}{dx}}$,

$$a_1 = -\frac{1}{F'(x) - y\frac{d\phi}{dx}} \cdot \frac{d\psi}{dx},\quad a_r = -\frac{1}{F'(x) - y\frac{d\phi}{dx}} \cdot \frac{da_{r-1}}{rdx},$$ e poichè

z diventa $-y\phi$ quando vi si pone $x = a$, otterremo in questo caso

$$\psi = \psi - a_1 y\phi + a_2 y^2\phi^2 - a_3 y^3\phi^3 + \text{\&c.}$$

ove nel secondo membro si deve porre $x = a$. Ora se si volesse ordinare questa serie per le potenze di y, è chiaro che il coefficiente di y^r sarebbe

$$\text{(A)}\quad \pm\left(\varphi^{r}\cdot a_r - \varphi^{r-1}\cdot\frac{da_{r-1}}{dy} + \varphi^{r-2}\cdot\frac{d^2a_{r-2}}{2dy^2}\ldots \pm \varphi\frac{d^{r-1}\,a_1}{2.3\ldots rdy^{r-1}}\right)$$

ove il segno superiore ha luogo quando r è pari, e l'inferiore quando r è dispari, purchè dopo le differenziazioni si faccia $y = 0$.

La formola (A) è molto complicata, e per poterne far uso convien calcolare le quantità $a_1, a_2 \ldots\ldots a_r$. Ma anche senza conoscere i valori di queste quantità, dalla sola relazione che hanno tra loro, si può ricavare una espressione assai più semplice del coefficiente di y^r. Si osservi primieramente che l'equazione $a_r = -\dfrac{1}{F'(x) - y\frac{d\phi}{dx}}\cdot\dfrac{da_{r-1}}{rdx}$ posta sotto la forma $\left(F'(x) - y\frac{d\phi}{dx}\right)a_r = -\dfrac{da_{r-1}}{rdx}$, e differenziata n volte per rapporto ad y ci dà, $\left(F'(x) - y\frac{d\phi}{dx}\right)\dfrac{d^n.\,a_n}{dy^n} - n\frac{d\phi}{dx}\cdot\dfrac{d^{n-1}\,a_r}{dy^{n-1}} = -\dfrac{d^{n+1}\,a_{r-1}}{rdxdy^n}$. Ciò posto invece di (A) consideriamo la formola più generale (B)

$$\text{(B)}\qquad \pm\left(\varphi^{s}a_r - \frac{s}{r}\varphi^{s-1}\frac{da_{r-1}}{dy} - \frac{s(s-1)}{r(r-1)}\varphi^{s-2}\frac{d^2a_{r-2}}{2dy^2} + \&c.\right)$$

la quale si cangia nell'espressione (A) se vi si pone $s = r$, e cerchiamone il valore nel caso di $y = 0$.

Siccome riguardando y ed s come costanti la formola (B) è una funzione di r e di x, facciamola $= P_{r,x}$, e cangiando r in $r + 1$ avremo

$$\mathrm{P}_{r+1,x} = \mp\left(\vec{\varphi}^{s} a_{r+1} - \frac{s}{r+1} \vec{\varphi}^{s-1} \frac{da_r}{dy} + \frac{s(s-1)}{(r+1)r} \vec{\varphi}^{s-2} \frac{d^2 a_{r-1}}{2dy^2} - \&\text{c.} \right).$$

Ma se in luogo di a_{r+1}, $\frac{da_r}{dy}$, $\frac{d^2 a_{r-1}}{dy^2}$, &c. mettiamo i loro valori $\frac{1}{\mathrm{F}'(x)} \cdot \frac{da_r}{(r+1)dx}$, $\frac{1}{\mathrm{F}'(x)}\left(\frac{d\varphi}{dx} a_r - \frac{d^2 a_{r-1}}{rdxdy}\right)$, $\frac{1}{\mathrm{F}'(x)}\left(2 \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{da_{r-1}}{dy} - \frac{d^3 a_{r-2}}{(r-1)dxdy^2}\right)$, &c.

troveremo

$$\mathrm{P}_{r+1,x} = \pm \frac{1}{(r+1)\mathrm{F}'(x)} \left\{ \begin{aligned} &\vec{\varphi}^{s} \frac{da_r}{dx} - \frac{s}{r} \vec{\varphi}^{s-1} \frac{d^2 a_{r-1}}{dxdy} + \frac{s(s-1)}{r(r-1)} \vec{\varphi}^{s-2} \frac{d^3 a_{r-2}}{2dxdy^2} + \&\text{c.} \\ &+ s\vec{\varphi}^{s-1} \frac{d\varphi}{dx} a_r - \frac{s(s-1)}{r} \vec{\varphi}^{s-2} \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{da_{r-1}}{dy} + \&\text{c.} \end{aligned} \right\}$$

Ora questa quantità è visibilmente $= \frac{1}{(r+1)\mathrm{F}'(x)} \cdot \frac{d\mathrm{P}_{r,x}}{dx}$; quindi avremo per determinare $\mathrm{P}_{r,x}$ l'equazione

$$\mathrm{P}_{r+1,x} = \frac{1}{(r+1)\mathrm{F}'(x)} \cdot \frac{d\mathrm{P}_{r,x}}{dx},$$

e siccome $\mathrm{P}_{1,x} = -\vec{\varphi}^{s} a_1 = \frac{\varphi^s}{\mathrm{F}'(x)} \cdot \frac{d\psi}{dx}$ ne dedurremo

$$\mathrm{P}_{2,x} = \frac{1}{\mathrm{F}'(x)} \cdot \frac{d. \frac{\varphi^s}{\mathrm{F}'(x)} \frac{d\psi}{dx}}{2dx}, \quad \mathrm{P}_{3,x} = \frac{1}{\mathrm{F}'(x)} \cdot \frac{d. \frac{1}{\mathrm{F}'(x)} d. \frac{\varphi^s}{\mathrm{F}'(x)} \frac{d\psi}{dx}}{2.3dx^2}, \&\text{c.}$$

Posto $s = r$ sarà

$$\mathrm{P}_{1,x} = \frac{\varphi}{\mathrm{F}'(x)} \frac{d\psi}{dx}, \quad \mathrm{P}_{2,x} = \frac{1}{\mathrm{F}'(x)} \cdot \frac{d. \frac{\varphi^2}{\mathrm{F}'(x)} \frac{d\psi}{dx}}{2dx},$$

$$\mathrm{P}_{3,x} = \frac{1}{\mathrm{F}'(x)} \cdot \frac{d. \frac{1}{\mathrm{F}'(x)} d. \frac{\varphi^3}{\mathrm{F}'(x)} \frac{d\psi}{dx}}{2.3dx^2}, \&\text{c. e}$$

$$\psi = \psi + y \frac{\varphi}{\mathrm{F}'(x)} \frac{d\psi}{dx} + y^2 \frac{1}{\mathrm{F}'(x)} \cdot \frac{d. \frac{\varphi^2}{\mathrm{F}'(x)} \frac{d\psi}{dx}}{2dx} + y^3 \frac{1}{\mathrm{F}'(x)} \cdot \frac{d. \frac{1}{\mathrm{F}'(x)} d. \frac{\varphi^3}{\mathrm{F}'(x)} \frac{d\psi}{dx}}{2.3dx^2} + \&\text{c.}$$

purchè nel secondo membro si faccia $x = a$: il quale sviluppo trovasi elegantemente dimostrato dal Sig. Legendre (Eserc. T. II. pag. 224.)

Se $F(x) = x$, e per conseguenza $F'(x) = 1$, in modo che sia $z = x - a - y\varphi$, avremo

$$\psi = \psi + y\varphi \frac{d\psi}{dx} + y^2 \frac{d.\varphi^2 \frac{d\psi}{dx}}{2dx} + y^3 \frac{d.^2\varphi^3 \frac{d\psi}{dx}}{2.3dx^2} + \&c.$$

posta $x = a$, che è il celebre teorema di Lagrange.

4. Il resultato precedente, per giungere al quale abbiamo incontrato non poca difficoltà, può ottenersi molto più semplicemente nel modo che segue. Considerando x come funzione di a e di y, data dall' equazione

$$F(x) - F(a) - y\varphi(x) = 0,$$

e differenziando l' equazione medesima avremo

$$F'(x)\frac{dx}{da} - F'(a) - y\varphi'(x)\frac{dx}{da} = 0$$

$$F'(x)\frac{dx}{dy} - \varphi(x) - y\varphi'(x)\frac{dx}{dy} = 0$$

e quindi $\frac{dx}{dy} = \frac{\phi(x)}{F'(a)} \cdot \frac{dx}{da}$. Posto ciò, se chiamiamo q_n il coefficiente di y^n nello sviluppo di $\psi(x)$, sarà $q_n = \frac{d^n\,\psi(x)}{1.2\ldots n dy^n}$ facendovi $y = 0$; tutto adunque si riduce a trovare il valore della funzione $\frac{d^n\,\psi(x)}{dy^n}$ nel caso di $y = 0$. Sarà primieramente $\frac{d\psi(x)}{dy} = \psi'(x)\frac{dx}{dy} = \frac{\phi(x)\,\psi'(x)}{F'(a)} \cdot \frac{dx}{da}$, la qual' equazione può mettersi sotto la forma

$$(b) \qquad \frac{d\psi(x)}{dy} = \frac{1}{F'(a)} \cdot \frac{d.\int\phi' x)\psi'(x)dx}{da}.$$

Differenziando nuovamente troveremo

$\frac{d^2\psi(x)}{dy^2} = \frac{1}{F'(a)} \cdot \frac{d^2.\int\phi(x)\psi'(x)dx}{dady}$; ma ponendo nella equazione (*b*) $\int\varphi(x)\psi'(x)dx$ in luogo di $\psi(x)$ abbiamo

$$\frac{d\int\phi(x)\psi'(x)dx}{dy} = \frac{1}{F'(a)} \cdot \frac{d\int\overline{\phi(x)}^2\psi(x)dx}{da};$$

dunque sarà

$$\frac{d^2\psi(x)}{dy^2} = \frac{1}{F'(a)} \cdot \frac{d.\frac{1}{F'(a)}\, d.\int\overline{\varphi(x)}^2\psi'(x)dx}{da^2}$$

e nell' istessa maniera

$$\frac{d^3\psi(x)}{dy^3} = \frac{1}{F'(a)} \cdot \frac{d.\frac{1}{F'a}\, d.\frac{1}{F'(a)}\, d.\int\varphi(x)^3\psi'(x)\, dx}{da^3}$$

e così in seguito. Ed essendo $q_n = \frac{d^n\ \psi(x)}{1.2\ldots ndy^n}$, quando vi si pone $y = 0$, ed in conseguenza $x = a$, avremo

$$q_1 = \frac{1}{F'(a)} \cdot \frac{d\int\phi(a)\psi'(a)da}{da} = \frac{\phi(a).\psi'(a)}{F'(a)}$$

$$q_2 = \frac{1}{F'(a)} \cdot \frac{d.\frac{1}{F(a)}\,\overline{\varphi(a)}^2\psi'(a)}{2da}$$

$$q_3 = \frac{1}{F'(a)} \cdot \frac{d.\frac{1}{F'(a)}\, d.\frac{1}{F'(a)}\,\overline{\varphi(a)}^3\psi'(a)}{2.3da^2},\ \&c.$$

come sopra.

5. Lo stesso coefficiente q_n può esprimersi sotto un' altra forma, la quale riuscirà in alcuni casi molto più comoda. Abbiamo pel teorema di Taylor

$$F(x)-F(a)=(x-a)F'(a)+\frac{(x-a)}{2}F''(a)+\frac{(x-a)^3}{2.3}F'''(a)+\&c.$$

e quindi $F(x)-F(a)=(x-a)X$, essendo X una funzione di x ed a, che non si annulla quando $x = a$, purchè non sia

$F'(a) = 0$, come quì si suppone. Mettiamo nella funzione X un' altra lettera b in luogo di a, e così facciamo nelle funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, se a fosse in esse compresa per restituir poi il valore di b terminate le operazioni. L' equazione $(x-a)X - y\varphi(x) = 0$ differenziata relativamente ad a ed y ci dà

$$(x-a)\ \frac{dX}{dx} \cdot \frac{dx}{da} + X\frac{dx}{da} - X - y\varphi'(x)\frac{dx}{da} = 0$$

$$(x-a)\ \frac{dX}{dy} \cdot \frac{dx}{dy} + X\frac{dx}{dy} - \varphi(x) - y\varphi'(x)\frac{dx}{dy} = 0$$

e quindi $\frac{dx}{dy} = \frac{\phi(x)}{X} \cdot \frac{dx}{da}$. Sarà pertanto $\frac{d\psi(x)}{dy} = \psi'(x)\frac{dx}{dy} = \frac{\phi(x)\psi'(x)}{X} \cdot \frac{dx}{da}$ il qual valore si può mettere sotto la forma $\frac{d\psi(x)}{dy} = \frac{d.\int X^{-1}\phi(x)\psi'(x)dx}{da}$. E col ragionamento usato nel n.° antecedente ne dedurremo

$$q_n = \frac{d^n\ \psi(x)}{1.2.3\ldots n dy^n} = \frac{d^n \int X^{-n}\phi(x)^n\ \psi'(x)dx}{1.2.3\ \ldots\ n da^n} = \frac{d^{n-1}.X^{-n}\phi(x)^n\ \psi'(x)}{1.2.3.\ \ldots\ n dx^{n-1}}$$

facendo $x = a$ dopo le differenziazioni, o sia restituendo il valore di X

$$q_n = \frac{d^{n-1} \cdot \left(\frac{x-a}{F(x)-F(a)}\right)^n \varphi(x)^n \psi'(x)}{1.2.3.\ \ldots\ n dx^{n-1}}.$$

Se ponghiamo $\varphi(x) = 1$, avremo

$$q_n = \frac{d^{n-1} \cdot \left(\frac{x-a}{F(x)-F(a)}\right)^n \psi'(x)}{1.2.3\ \ldots\ n dx^{n-1}},$$

il qual resultato combina con quello ottenuto per un' altra strada dal Sig. Legendre (Eserc. T. II. pag. 234.), e serve allo sviluppo della funzione $\psi(x)$ in una serie ordinata per le potenze della funzione $F(x)-F(a)$.

6. Data l'equazione $F(x)-F(a)-y\varphi(x)-t\lambda(x)=0$, la quale contiene un' altra variabile t, se ponghiamo $\varphi(x)+\frac{t}{y}\lambda(x)$ in luogo di $\varphi(x)$ nel valore di q_n, sarà $\frac{d^{n-1}.X^n(\varphi(x)+\frac{t}{y}\lambda(x))}{1.2.3.\ldots.ndx^{n-1}}$ il coefficiente di y^n nella serie, che rappresenta il valore di $\psi(x)$. Di quì facilmente apparisce, che volendo ordinar questa serie per le potenze ed i prodotti di y e t, se chiamiamo $q_{n-r,r}$ il coefficiente di $y^{n-r}t^r$, avremo

$$q_{n-r,r}=\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r}\cdot\frac{d^{n-1}.X^{-n}\varphi(x)^{n-r}\lambda(x)^r\psi'(x)}{1.2.3\ldots\ldots ndx^{n-1}}$$

$$=\frac{d^{n-1}.X^{-n}\varphi(x)^{n-r}\lambda(x)^r\psi'(x)}{1.2\ldots(n-r)1.2\ldots rdx^{n-1}}$$

posta $x=a$ dopo le differenziazioni.

7. Noi non ci tratterremo a percorrere i casi, in cui l' equazione data conservando la medesima forma contenesse un maggior numero di variabili, i quali dopo ciò che abbiamo detto non presentano alcuna difficoltà, e piuttosto osserveremo che le formole descritte nei numeri antecedenti, ed altre simili espressioni inservienti allo sviluppo delle funzioni in serie, non sono che semplici corollarj di un teorema più generale dovuto a Laplace, a cui non sembra che i Geometri abbiano fatto molta attenzione, perchè appena accennato dall' Autore, senza addurne alcuna dimostrazione, sul terminare di una sua Memoria inserita tra quelle dell' Accademia Reale di Parigi per l' anno 1777.

Data tra le variabili x ed y l' equazione $z=0$, alla quale nel caso di $y=0$ soddisfaccia $x=a$, se sia proposto di svolgere una funzione qualunque ψ delle medesime variabili in una serie ordinata per le potenze positive di y, e si chiami q_n il coefficiente di y^n, sarà

$$q_n = \frac{d^n\psi}{1.2.3\ldots dy^n} - \frac{d^{n-1}.(x-a)^n \dfrac{d^n \frac{d\psi}{dx}\log.z}{1.2\ldots ndy^n}}{1.2.3.\ldots\ldots(n-1)dx^{n-1}}$$

ove si debbono riguardare x ed y come indipendenti tra loro, e porre $y=0$ dopo le differenziazioni relative ad y, ed $x=a$ dopo tutte le differenziazioni.

Sia ψ funzione della sola x, e $z=\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a)-y\phi$, essendo pure ϕ funzione della sola x, avremo $\dfrac{d^n\frac{d\psi}{dx}\log.z}{1.2\ldots ndy^n} =$
$\dfrac{d\psi}{dx}\cdot\dfrac{d^n\log\{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a)-y\phi\,]}{1.2.3\ldots ndy^n} = -\dfrac{d\psi}{dx}\cdot\dfrac{\phi^n}{n[\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a)-y\phi]^n} =$
$-\dfrac{d\psi}{dx}\cdot\dfrac{\phi^n}{n[\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a)]^n}$ quando $y=0$, e siccome $\dfrac{d\psi}{dy}=0$, sarà

$$q_n = \frac{d^{n-1}\cdot\left(\frac{x-a}{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a)}\right)^n \phi^n \frac{d\psi}{dx}}{1.2.3\ \ldots\ ndx^{n-1}}$$

come sopra (5). Lo stesso resultato potremmo ancora ottenere dal teorema di Lagrange ponendo l' equazione

$\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a)y\,\phi=0$ sotto la forma $x-a-y\,\dfrac{(x-a)\phi}{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a)}=0$.

8. Quantunque abbia dato due dimostrazioni del teorema di Laplace negli Atti della nostra Società T. IV. e T. VIII., l' importanza del medesimo ed il non conoscere che da altri ne sia stata confermata la verità, mi muovono ad esporre una terza dimostrazione, che è per qualche lato un poco più semplice delle altre. L' equazione $z=0$ posta $y=0$ si ridurrà ad una equazione $\mathrm{X}=0$ tra x e costanti, la quale ci som-

ministrerà varj valori della x, e se a sia uno di questi valori ed $A = \frac{X}{x-a}$, ove suppongo che i fattori di A siano tutti diversi da $x-a$, o più generalmente che A non sia nè nulla nè infinita nel caso di $x=a$, si potrà dare all'equazione $z=0$ la forma $(x-a)A+\phi=0$, essendo ϕ una funzione di x ed y, che si annulli quando $y=0$. Neppur la funzione ϕ avrà il fattore $x-a$, perchè se lo avesse, l'equazione $z=0$ si risolverebbe nelle due $x-a=0$, ed $A+\frac{\phi}{x-a}=0$, che converrebbe considerare separatamente. Si può ancora supporre che a non si trovi nè in ϕ nè in A, perchè altrimenti si potrebbe mettere un' altra lettera b in luogo di a, e si risolverebbe un problema più generale, e dopo terminate tutte le operazioni si restituirebbe il valore di $b=a$ per aver la soluzione nel caso dato.

Sia primieramente ψ funzione di x sola, e supponghiamo egualmente che non contenga a, potendosi nel caso contrario sostituir, come sopra, ad a un' altra lettera. Ciò posto, se riguardando x come una funzione di a e di y data dall' equazione $z=0$, differenziamo l'equazione medesima, prima per rapporto ad a e poi per rapporto ad y avremo

$$A\frac{dx}{da}+(x-a)\frac{dA}{dx}\cdot\frac{dx}{da}-A+\left(\frac{d\phi}{dx}\right)\cdot\frac{dx}{da}=0$$

$$A\frac{dx}{dy}+(x-a)\frac{dA}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}+\left(\frac{d\phi}{dy}\right)+\left(\frac{d\phi}{dx}\right)\cdot\frac{dx}{dy}=0$$

e di quì dedurremo $\frac{dx}{dy}=-\frac{1}{A}\left(\frac{d\phi}{dy}\right)\cdot\frac{dx}{da}=-\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\cdot\frac{dx}{da}$, perchè $\left(\frac{d\phi}{dy}\right)$ è $=\left(\frac{dz}{dy}\right)$. Sarà dunque $\frac{d\psi}{dy}=\frac{d\psi}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=-\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\times\frac{d\psi}{dx}\cdot\frac{dx}{da}$, e siccome P non contenendo a, è $P\frac{dx}{da}=\frac{d\int P\,dx}{da}$ quando nell'integrale $\int P\,dx$ si riguarda y come costante, avremo

$$(c)\qquad \frac{d\psi}{dy}=-\frac{d.\int\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{d\psi}{dx}\,dx}{da}=\frac{d.\int\alpha\,dx}{da}$$

facendo $\alpha = -\frac{1}{A} \cdot \left(\frac{dz}{dy}\right) \cdot \frac{d\psi}{dx}$. E se u è funzione di x e di y, poichè $du = \left(\frac{du}{dy}\right) dy + \left(\frac{du}{dx}\right) dx$, ove $\left(\frac{du}{dy}\right) dy$ e $\left(\frac{du}{dx}\right) dx$ rappresentano rispettivamente i differenziali di u presi per rapporto ad y ed x considerate come indipendenti tra loro, sarà

$$(d) \qquad \frac{du}{dy} = \left(\frac{du}{dy}\right) + \left(\frac{du}{dx}\right) \frac{dx}{dy} = \left(\frac{du}{dy}\right) - \frac{d.\int \frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) dx}{d\alpha}.$$

L' equazione (c) differenziata ci darà $\frac{d^2\psi}{dy^2} = \frac{d^2.\int \alpha dx}{d\alpha dy}$; ma ponendo nella equazione (d) $\int \alpha dx$ in luogo di u abbiamo

$$\frac{d.\int \alpha dx}{dy} = \int \left(\frac{d\alpha}{dy}\right) dx - \frac{d.\int \frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right) \alpha dx}{d\alpha},$$

dunque facendo $\beta = \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)$ e $\beta_1 = -\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\alpha$, sarà

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} = \frac{d.\int \beta dx}{d\alpha} + \frac{d^2\int \beta_1 dx}{d\alpha^2}.$$

Differenziando di nuovo troveremo

$$\frac{d^3\psi}{dy^3} = \frac{d^2.\int \beta dx}{d\alpha dy} + \frac{d^3.\int \beta_1 dx}{d\alpha^2 dy},$$

e poichè l' equazione (d) ci dà

$$\frac{d.\int \beta dx}{dy} = \int \left(\frac{d\beta}{dy}\right) dx - \frac{d.\int \frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right) \beta dx}{d\alpha},$$

$$\frac{d.\int \beta_1 dx}{dy} = \int \left(\frac{d\beta_1}{dy}\right) dx - \frac{d.\int \frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right) \beta_1 dx}{d\alpha},$$

ponendo γ in luogo di $\left(\frac{d\beta}{dy}\right)$, γ_1 in luogo di $\left(\frac{d\beta_1}{dy}\right) - \frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\beta$, e γ_2 in luogo di $-\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\beta_1$ avremo

$$\frac{d^3\psi}{dy^3} = \frac{d.\int\gamma dx}{da} + \frac{d^2\int\gamma_1 dx}{da^2} + \frac{d^3.\int\gamma_2 dx}{da^3}.$$

Continuando queste operazioni vedremo in generale, che il valore di $\frac{d^n\psi}{dy^n}$ sarà della forma seguente

$$(e) \qquad \frac{d^n\psi}{dy^n} = \frac{d.\int B dx}{da} + \frac{d.^2\int B_1 dx}{da^2} + \frac{d^3\int B_2 dx}{da^3} \dots\dots + \frac{d^n.\int B_{(n-1)} dx}{da^n}$$

ove convien determinare le quantità B, B_1, B_2, &c. Chiamiamo B', B'_1, &c. i valori B, B_1, &c. quando n diventa $n+1$, ed avremo similmente

$$(f) \qquad \frac{d^{n+1}\psi}{dy^{n+1}} = \frac{d.\int B' dx}{da} + \frac{d.^2\int B'_1 dx}{da^2} + \frac{d^3.\int B'_2 dx}{da^3} + \&c.$$

Ma l' equazione (e) differenziata ci dà

$$\frac{d^{n+1}\psi}{dy^{n+1}} = \frac{d.\int\frac{dB}{dy}dx}{da} + \frac{d^2.\int\left(\frac{dB_1}{dy}\right)dx}{da^2} + \frac{d^3.\int\left(\frac{dB_2}{dy}\right)dx}{da^3} + \&c.$$

$$- \frac{d^2.\int\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)B dx}{da^2} - \frac{d^3.\int\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)B_1 dx}{da^3} - \&c.$$

dunque paragonando questa coll' equazione (f) otterremo la serie seguente di equazioni a differenze finite ed infinitesime

$$(g) \qquad \begin{aligned} B' &= \left(\frac{dB}{dy}\right) \\ B'_1 &= \left(\frac{dB_1}{dy}\right) - \frac{B}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right) \\ B'_2 &= \left(\frac{dB_2}{dy}\right) - \frac{B_1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right) \\ &\&c. \end{aligned}$$

Se adesso osserviamo che $\frac{d.\int Bdx}{da} = B\frac{dx}{da}$, avremo

$$(h) \qquad \frac{d^n\psi}{dy^n} = B\frac{dx}{da} + \frac{d.B_1\frac{dx}{da}}{da} + \frac{d^2.B_2\frac{dx}{da}}{da^2} + \&c.$$

Ora per isvolgere la funzione ψ in una serie ordinata per le potenze di y bisogna trovare il valore di $\frac{d^n\psi}{dy^n}$ quando $y = 0$; ma l' equazione $z = 0$ nel caso di y zero ci dà $x = a$, dunque avremo il ricercato valore di $\frac{d^n\psi}{dy^n}$, se nel secondo membro dell' equazione (h) porremo $y = 0$ ed $x = a$. Per altra parte, siccome A, ψ e $\left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{d\phi}{dy}\right)$ ed in conseguenza le quantità B, B_1, &c. non contengono a, facilmente si vede che $\frac{d^r B_{(s)}\frac{dx}{da}}{da^r}$ ponendovi $x = a$, è lo stesso che $\frac{d.B^r_{(s)}}{dx^r}$, se vi si pone $x = a$ dopo le differenziazioni. Sarà pertanto con questa condizione

$$\frac{d^n\psi}{dy^n} = B + \frac{d.B_1}{dx} + \frac{d.^2B_2}{dx^2} + \frac{d.^3B_3}{dx^3} \ldots\ldots + \frac{d^{n-1}.B_{(n-1)}}{dx^{n-1}}.$$

Converrebbe adesso trovare i valori di B, B_1, &c. mediante l'integrazione dell' equazioni (g); ma senza eseguire questa operazione, dalla quale difficilmente ottener si potrebbe sotto una forma abbastanza comoda il valor generale di $B_{(r)}$, la sola cognizione delle relazioni che hanno tra loro le quantità B, B_1, &c. ci basterà per conseguire una espressione assai semplice del valore di $\frac{d^n\psi}{dy^n}$ nel caso di y zero. Prima però è necessario di dare un' altra forma all' equazione precedente. A tale oggetto si osservi che, quando si fa $x = a$, dopo le differenziazioni, è sempre per una funzione qualunque P di x, la quale non contenga a,

$$\frac{d^{n-1}.(x-a)^r\ \mathrm{P}}{dx^{n-1}} = (n-1)(n-2)\ \ldots\ldots\ (n-r)\,\frac{d^{n-r-1}\mathrm{P}}{dx^{n-r-1}}$$

ove si suppone $r < n$; dunque avremo

$$\frac{d^n\psi}{dy^n} = \frac{d^{n-1}[b(x-a)^{n-1} + b_1\,(x-a)^{n-2} + h_2\,(x-a)^{n-3}\ldots + b_{(n-1)}]}{dx^{n-1}}$$

e sarà $b = \frac{\mathrm{B}}{1.2\ldots.(n-1)}$, $b_1 = \frac{\mathrm{B}1}{2.3\ldots..(n-1)}$, $b_2 = \frac{\mathrm{B}2}{3.4\ldots.(n-1)}$, &c. cioè avranno luogo tra b, b_1, b_2, &c. le seguenti equazioni

$$(i)\qquad \begin{aligned} nb' &= \left(\frac{db}{dy}\right) \\ nb'_1 &= \left(\frac{db_1}{dy}\right) - \frac{b}{\mathrm{A}}\left(\frac{dz}{dy}\right) \\ nb'_2 &= \left(\frac{db_2}{dy}\right) - \frac{2b_1}{\mathrm{A}}\left(\frac{dz}{dy}\right) \\ nb'_3 &= \left(\frac{db_3}{dy}\right) - \frac{3b_2}{\mathrm{A}}\left(\frac{dz}{dy}\right) \\ &\&\mathrm{c.} \end{aligned}$$

Consideriamo adesso la quantità

$$\frac{\mathrm{A}b}{z} + \frac{\mathrm{A}^2b_1}{z^2} + \frac{\mathrm{A}^3b_2}{z^3}\ldots + \frac{\mathrm{A}^n b(_{n-1})}{z^n}$$

la quale supposta x costante è una funzione di n e di y, che chiameremo $\mathrm{S}_{n,y}$. Ponendovi $n+1$ in luogo di n avremo

$$\mathrm{S}_{n+1,y} = \frac{\mathrm{A}b'}{z} + \frac{\mathrm{A}^2b'_1}{z^2} + \frac{\mathrm{A}^3b'_2}{z^3} + \frac{\mathrm{A}^4b'_3}{z^4} + \&\mathrm{c.}$$

e sostituendovi i valori di b', b'_1, &c. ricavati dall'equazioni (i)

$$n\mathrm{S}_{n+1,y} = \frac{\mathrm{A}}{z}\left(\frac{db}{dy}\right) + \frac{\mathrm{A}^2}{z^2}\left(\frac{db_1}{dy}\right) + \frac{\mathrm{A}^3}{z^3}\left(\frac{db_2}{dy}\right) + \frac{\mathrm{A}^4}{z^4}\left(\frac{db_3}{dy}\right) + \&\mathrm{c.}$$

$$-\frac{Ab}{z^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)-\frac{2A^2b_1}{z^3}\left(\frac{dz}{dy}\right)-\frac{3A^3b_2}{z^4}\left(\frac{dz^3}{dy}\right)-\&c.$$

Ma la quantità $S_{n,y}$ differenziata per rapporto ad y ci dà

$$\frac{dS_{n,y}}{dy}=\frac{A}{z}\left(\frac{db}{dy}\right)+\frac{A^2}{z^2}\left(\frac{db_1}{dy}\right)+\frac{A^3}{z^3}\left(\frac{db_2}{dy}\right)+\frac{A^4}{z^4}\left(\frac{db_3}{dy}\right)+\&c.$$
$$-\frac{Ab}{z^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)-\frac{2A^2b_1}{z^3}\left(\frac{dz}{dy}\right)-\frac{3A^3b_2}{z^4}\left(\frac{dz}{dy}\right)-\&c.$$

Quindi avremo l' equazione $S_{n+1,y}=\frac{1}{n}\cdot\frac{dS_{n,y}}{dy}$, dalla quale si deduce $S_{n,y}=\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\cdot\frac{d^{n-1}S_{1,y}}{dy^{n-1}}$, e poichè $S_{1,y}=\frac{Ab}{z}$ postovi $n=1$, cioè $=-\frac{d\psi}{dx}\left(\frac{dz}{zdy}\right)=-\frac{d\psi}{dx}\left(\frac{d.\log.z}{dy}\right)$, sarà

$$S_{n,y}=\frac{Ab}{z}+\frac{A^2b_1}{z^2}+\frac{A^3b_2}{z^3}+\&c.=-\frac{1}{1.2\ldots.(n-1)}\cdot\frac{d\psi}{dx}\cdot\left(\frac{d^n\log.z}{dy^n}\right).$$

E siccome z è $=(x-a)A$ quando $y=0$, avremo in questo caso

$$\frac{b}{x-a}+\frac{b_1}{(x-a)^2}+\frac{b_2}{(x-a)^3}+\&c.=-\frac{1}{1.2\ldots.(n-1)}\frac{d\psi}{dx}\left(\frac{d^n\log.z}{dy^n}\right).$$

Moltiplicando quest' ultima equazione per $(x-a)^n$, e differenziandola $n-1$ volte per rapporto ad x, otterremo nel caso di $y=0$

$$\frac{d^n\psi}{dy^n}=\frac{d^{n-1}[\,b(x-a)^{n-1}+b_1(x-a)^{n-2}+b_2(x-a)^{n-3}+\&c.\,]}{dx^{n-1}}$$
$$=-\frac{1}{1.2\ldots.(n-1)}\;\frac{d^{n-1}(x-a)^n\,\frac{d\psi}{dx}\left(\frac{d^n\log.z}{dy^n}\right)}{dx^{n-1}}.$$

E se chiamiamo q_n il coefficiente di y^n nella serie che nasce dallo sviluppo di ψ, avremo

$$q_n = -\frac{d^{n-1}(x-a)^n \frac{d\psi}{dx} \frac{d^n\log.z}{1.2\ldots ndy^n}}{1.2.3\ldots(n-1)dx^{n-1}}$$

ove dal secondo membro essendo state tolte le parentesi relative alla differenziazione per y si comprende, che debbono riguardarsi le variabili x ed y come tra loro indipendenti, e porre $y=0$ dopo le differenziazioni relative ad y, ed $x=a$ dopo tutte le differenziazioni. Sarà dunque con queste condizioni

$$\psi = \psi - y(x-a)\frac{d\psi}{dx}\cdot\frac{d\log.z}{dy} - y^2\frac{d(x-a)^2\frac{d\psi}{dx}\frac{d^2\log.z}{1.2dy^2}}{dx} -$$

$$-y^3\frac{d^2(x-a)^3\frac{d\psi}{dx}\cdot\frac{d^3\log.z}{1.2.3dy^3}}{1.2.dx^2} - \&c.$$

Se ψ è funzione di x e di t, il secondo membro di questa equazione conterrà y e t, e se si volesse ordinare la serie, che esprime il valore di ψ per le potenze ed i prodotti di y e di t, ciò si potrà eseguire molto facilmente. Infatti il coefficiente di t^n sarà $\frac{d^n\psi}{1.2\ldots ndt^n}$, il coefficiente di $t^{n-1}y$ sarà

$-\frac{(x-a)\frac{d^n\psi}{dxdt^{n-1}}\frac{d\log.z}{dy}}{1.2\ldots(n-1)}$, quello di $t^{n-2}y^2$ sarà

$-\frac{d(x-a)^2\frac{d^{n-1}\psi}{dxdt^{n-2}}\frac{d^2\log.z}{1.2dy^2}}{1.2\ldots(n-2)dx}$, quello di $t^{n-3}y^3$ sarà

$-\frac{d^2(x-a)^3\frac{d^{n-2}\psi}{dxdt^{n-3}}\frac{d^3\log.z}{1.2.3dy^3}}{1.2\;1.2\ldots(n-3)dx^2}$, e così in seguito fino al coefficiente di y^n che sarà $-\frac{d^{n-1}(x-a)^n\frac{d\psi}{dx}\frac{d^n\log.z}{1.2\ldots ndy^n}}{1.2\ldots(n-1)dx^{n-1}}$, nelle quali formole si dovrà porre $t=0$ dopo le differenziazioni relative a questa variabile. Se adesso supporremo che sia $t = y$, in modo che sia ψ funzione di x e di y, è evidente che la somma di tutti questi coefficienti formerà il coefficiente di y^n nella serie, che rappresenta in questo caso il valore di ψ. Chiamando dunque r_n quest' ultimo coefficiente avremo

$$r_n = \frac{d^n\psi}{1.2\ldots ndy^n} - \frac{(x-a)\frac{d^n\psi}{dxdy^{n-1}}\cdot\frac{d.\log.z}{dy}}{1.2.\ldots(n-1)}$$

$$-\frac{d.(x-a)^2\frac{d^{n-1}\psi}{dxdy^{n-2}}\cdot\frac{d^2\log.z}{1.2dy^2}}{1.2\ldots(n-2)dx} - \frac{d^2.(x-a)^3\frac{d^{n-2}\psi}{dxdy^{n-3}}\frac{d^3\log.z}{1.2.3dy^3}}{1.2.1.2.\ldots(n-3)dx^2}$$

$$-\frac{d^3(x-a)^4\frac{d^{n-3}\psi}{dxdy^{n-4}}\frac{d^4\log.z}{1.2.3.4dy^4}}{1.2.3.1.2\ldots(n-4)dx^3}\ldots-\frac{d^{n-1}.(x-a)^n\frac{d\psi}{dx}\frac{d^n\log.z}{1.2\ldots ndy^n}}{1.2.\ldots(n-1)dx^{n-1}},$$

Ma siccome convien fare $x = a$ dopo le differenziazioni, e facilmente apparisce essere in tal caso $(x-a)\frac{d^n\psi}{dxdy^{n-1}}\frac{d\log.z}{dy} =$

$$\frac{d^{n-1}(x-a)^n\frac{d^n\psi}{dxdy^{n-1}}\frac{d\log.z}{dy}}{1.2.\ldots(n-1)dx^{n-1}},\quad \frac{d.(x-a)^2\frac{d^{n-1}\psi}{dxdy^{n-2}}\cdot\frac{d^2\log.z}{dy^2}}{dx} =$$

$$\frac{d^{n-1}(x-a)^n\frac{d^{n-1}\psi}{dxdy^{n-2}}\cdot\frac{d^2\log.z}{dy^2}}{2.3.\ldots(n-1)dx^{n-1}},\quad \frac{d.^2(x-a)^3\frac{d^{n-2}\psi}{dxdy^{n-3}}\cdot\frac{d^3\log.z}{dy^3}}{dx^2} =$$

$$\frac{d^{n-1}.(x-a)^n\frac{d^{n-2}\psi}{dxdy^{n-3}}\frac{d^3\log z}{dy^3}}{3.4.\ldots(n-1)dx^{n-1}}, \text{ \&c.},$$

sostituendo questi valori troveremo

$$r_n = \frac{d^n\psi}{1.2.\ldots ndy^n} - \frac{d^{n-1}.(x-a)^n\,Q}{1.2.\ldots(n-1).1.2\ldots ndx^{n-1}}$$

essendo

$$Q = n \frac{d^n\psi}{dxdy^{n-1}} \cdot \frac{d\log.z}{dy} + \frac{n(n-1)}{2} \frac{d^{n-1}\psi}{dxdy^{n-2}} \cdot \frac{d^2\log.z}{dy^2}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} \cdot \frac{d^{n-2}\psi}{dxdy^{n-3}} \cdot \frac{d^3\log.z}{dy^3} \dots + \frac{d\psi}{dx} \cdot \frac{d^n\log.z}{dy^n}$$

$$= \frac{d^n . \frac{d\psi}{dx} \log.z}{dy^n} - \log.z \frac{d^{n+1}\psi}{dxdy^n}.$$

Avremo adunque

$$r_n = \frac{d^n\psi}{1.2....ndy^n} - \frac{d^{n-1}.(x-a)^n . \frac{d^n.\frac{d\psi}{dx}\log.z}{1.2....ndy^n}}{1.2.\,....(n-1)dx^{n-1}}$$

$$+ \frac{d^{n-1}.(x-a)^n.\log.z \frac{d^{n+1}\psi}{dxdy^n}}{1.2....(n-1)1.2...ndx^{n-1}},$$

ove si potrà omettere l' ultimo termine, il quale è sempre $= 0$. Infatti posto $y = 0$ questo termine avrà la forma

$$[C'(x-a)+C''(x-a)^2+C'''(x-a)^3 \dots + C^{(n)}(x-a)^n]\log.(x-a)$$

$$+ D'(x-a)+D''(x-a)^2+D'''(x-a)^3 \dots + D^{(n)}(x-a)^n$$

ove i coefficienti C', C'', &c. D', D'', &c. dipendenti dalla quantità $\frac{d^{n+1}\psi}{dxdy^n}$ non possono divenire infiniti quando $x=a$, nel qual caso è sempre $(x-a)\log.(x-a) = 0$, se r è $= 0, > 1$. Pertanto otterremo finalmente con le solite condizioni

$$r_n = \frac{d^n\psi}{1.2....ndy^n} - \frac{d^{n-1}.(x-a)^n \frac{d.^n\frac{d\psi}{dx}\log.z}{1.2...ndy^n}}{1.2.\,..(n-1)dx^{n-1}}.$$

Abbiamo trovato la serie che rappresenta ψ dipendentemente dal fattore $x-a$, ed una simile serie si troverà per esprimere ψ, qualunque altro fattore si assuma della quantità in cui si cangia z, quando vi si fà $y=0$; ma perchè la cosa riesca, è necessario che tutti questi fattori siano diversi, ed infatti abbiamo supposto nei calcoli precedenti, che A non comprenda altri fattori eguali ad $x-a$. Nel caso che vi siano più fattori eguali espressi da $(x-a)^i$, la quantità z si può concepire risoluta in i fattori z', z'', z''', &c., ciascuno dei quali abbia la forma $(x-a)A'+\phi'$, ove A' non contenga più il fattore $x-a$, e ϕ' sia una funzione di x ed y, che svanisca con y. Ciascuno dei fattori z', z'', z''', &c. ci darà per coefficiente di y^n nello sviluppo di ψ la quantità

$$\frac{d^n\psi}{1.2\ldots ndy^n}-\frac{d^{n-1}.(x-a)^n\frac{d.^n\frac{d\psi}{dx}\log.z'}{1.2\ldots ndy^n}}{1.2\ldots(n-1)dx^{n-1}}.$$

Se adesso prendiamo il medio aritmetico tra le i serie, che nascono dal fattore $(x-a)^i$, e chiamiamo q_n il coefficiente di y^n in questa serie media, avremo

$$q_n=\frac{d^n\psi}{1.2\ldots ndy^n}-\frac{d^{n-1}.(x-a)^n\frac{d.^n\frac{d\psi}{dx}(\log.z'+\log.z''+\log.z'''+\&c.)}{1.2.\ldots\ldots ndy^n}}{1.2.\ldots\ldots(n-1)idx^{n-1}}$$

cioè a motivo di $\log.z'+\log.z''+\log.z'''+\&c.=\log.z$,

$$q_n=\frac{d^n\psi}{1.2\ldots\ldots ndy^n}-\frac{d^{n-1}.(x-a)^n\frac{d^n.\frac{d\psi}{dx}\log.z}{1.2\ldots ndy^n}}{1.2.\ldots\ldots(n-1)idx^{n-1}}$$

posto, come sopra, $y = 0$ dopo le differenziazioni relative ad y, ed $x = a$ dopo tutte le differenziazioni.

Laplace assegna in generale il precedente valore al coefficiente di y^n nello sviluppo di ψ, quando la funzione z nel caso di $y = 0$ è divisibile per $(x-a)^i$. Risulta dalla nostra analisi la verità di questo teorema quando $i = 1$, se però i è > 1, q_n non esprime che il coefficiente di y^n nella serie, la quale è il medio aritmetico tra tutte quelle, che rappresentano il valore di ψ dipendentemente dal fattore $(x-a)^i$. Ma questa serie media non somministra il giusto valore di ψ, come può mostrarsi con un esempio semplicissimo. Sia data l' equazione $z = (x-a)^3 - y^3(b+cx)^3 = 0$, e si voglia svolgere il valore di x in una serie ordinata per le potenze di y. Saranno $x-a-y(b+cx)$, $x-a-\beta y(b+cx)$, $x-a-\beta^2 y(b+cx)$ i fattori di z, ove 1, β e β^2 rappresentano le tre radici cubiche dell' unità, e questi fattori ci daranno le tre serie

$$x=a+(ac+b)y+c(ac+b)y^2+c^2(ac+b)y^3+c^3(ac+b)y^4+\&c.$$

$$x=a+\beta(ac+b)y+\beta^2 c(ac+b)y^2+c^2(ac+b)y^3+\beta c^3(ac+b)y^4+\&c.$$

$$x=a+\beta^2(ac+b)y+\beta c(ac+b)y^2+c^2(ac+b)y^3+\beta^2 c^3(ac+b)y^4+\&c.$$

ciascuna delle quali soddisfà all' equazione $z = 0$. Se prendiamo il medio aritmetico tra questi tre valori di x, avremo la serie, che ci dà il teorema di Laplace, cioè

$$x = a + c^2(ac+b)y^3 + c^5(ac+b)y^6 + \&c.$$

la quale però non soddisfà all'equazione $z = 0$.

Quantunque la precedente dimostrazione sia un poco meno complicata di quella data da noi nel T. VIII. della Società, lo è tuttavia abbastanza per far desiderare, che i Geometri prendano la cura di sostituirgliene un' altra più semplice.

TEORICA
DEGLI OBJETTIVI ACROMATICI
PROPOSTI
DAL SIGNOR ROGERS

MEMORIA

DEL SOCIO
GIOVANNI SANTINI
PROFESSORE DI ASTRONOMIA NELL'UNIVERSITA' DI PADOVA

Presentata li 8. *Maggio* 1829.

Dopo che Dollond ed Eulero verso la metà dello scorso secolo dimostrarono colla teoria e colla esperienza, che si potevano togliere, od almeno attenuare fino al punto di renderli innocui alla chiara visione gli errori provenienti dalla diversa rifrangibilità dei colori, e dalla figura sferica dei vetri nei Cannocchiali, i più celebri matematici si occuparono con ardore nello sviluppo della teorica di questi preziosi stromenti, ai quali va l'Astronomia debitrice di tante e sì luminose scoperte; e gli ottici pratici più riputati dietro la scorta dei precetti loro additati, pervennero in fatti a costruire dei Cannocchiali acromatici dotati di una chiarezza, e di una forza amplificativa sorprendente. Ciò non pertanto scarso è il numero di sì fatti Cannocchiali in grandi dimensioni scevri da qualche difetto; ed è oltremodo difficile il procuraneli anche con grandi spese, eccedenti per lo più i limiti che i privati sono astretti di imporsi negli oggetti di loro studio e diletto; lo che non a mancanza di teoria vuolsi attribuire, ma piutosto ad una peculiare disposizione scelta dai pratici, commendata anco dai teorici, ed alle difficoltà che in pratica seco conduce sì fatta disposizione.

Si costruiscono per lo più i grandi objettivi acromatici con due, talvolta anco con tre lenti di due diverse specie di cristalli comunemente conosciuti sotto il nome di *Crown* e di *Flint*, i quali operano nella decomposizione della luce una dispersione molto differente; e fra le varie disposizioni che a queste lenti si può dare per produrre immagini chiare, e distinte, quella si presceglie in pratica nella quale le lenti si riducono a contatto o ad una minima distanza fra loro ponendo esternamente una lente convessa di Crown, internamente una concava di Flint, e talvolta anco al di dietro di questa una terza lente convessa dello stesso vetro della prima. Non è nostro scopo di rintracciare i precetti per il calcolo dei raggi di curvatura delle diverse superficie delle lenti in sì fatta disposizione; questi si trovano esposti in molte Opere, e particolarmente nella Diottrica di Eulero, nelle Opere del P. Boschovich, ed anco nel primo volume del trattatello da me pubblicato lo scorso anno in Padova col titolo *Teorica degli stromenti ottici*, dove ho raccolto i precetti per la costruzione degli objettivi acromatici secondo le più accreditate teorie. Se nulla lasciano a desiderare per parte della teoria questi precetti, rimane un grandissimo ostacolo in pratica nella difficoltà di procurarsi dei pezzi di Flint puro ed omogeneo, scevro da filamenti, da bolle e da certa specie di onde le quali turbano la regolarità delle rifrazioni, e tanto danno arrecano alla precisione delle immagini. Questa difficoltà fu provata dai primi costruttori degli objettivi acromatici, e piuttosto che diminuire si è aumentata, giacchè quantunque molte celebri fabbriche di cristalli siano sorte in Inghilterra, in Francia ed in Germania, sembra che non siasi per anco riuscito a scuoprire un processo per la fusione e raffreddamento del Flint, atto a renderlo a colpo sicuro in gran quantità omogeneo, quale richiedesi per la costruzione degli stromenti ottici, sicchè convenga scegliere fra una gran quantità di pezzi quello che è atto alla costruzione di una lente, e mentre facilmente si incontrano molti pezzi idonei alla costruzione di minori objettivi di uno, o due pollici di apertura, rarissimo è il caso di potersene procurare dei pezzi abbastanza grossi, e larghi per formare un objettivo maggiore di 5 pollici, a segno che riguardasi a giusto titolo come un prodigio dell'Arte ottica il grande cannocchiale di 160 pollici di distanza focale, e di 9 pollici di apertura fabbricato a Monaco dal celebre Fraunhofer, e parallatticamente montato per l'osservatorio di Dorpat in Russia.

Queste difficoltà suggerirono il compenso di sostituire al Flint un fluido trasparente dotato di una gran forza dispersiva; sembra che li Signori Blair (padre e figlio), il Signor Brewster in Inghilterra, il Sig. Girard in Vienna siano felicemente riusciti nei primi loro tentativi. Ultimamente anco il Sig. Barlow, dietro un annunzio pubblicato dal Dott. Brewster nel giornale filosofico di Edimburgo, ha costruito due di questi cannocchiali Acromatici, in uno dei quali l'objettivo ha $3\frac{1}{4}$ poll; nell'altro 6 poll. di apertura. Col primo riconobbe per doppie tutte quelle stelle come tali osservate dal Sig. Dott. W. Herschel con un'objettivo di prova di poll. $3\frac{1}{2}$ di apertura; col secondo vide separate ancora delle stelle più vicine, che con questo apparivano semplici, e più difficili a riconoscersi per doppie. Per quanto felici siano questi risultamenti, vi si possono fare molte ragionevoli objezioni, che molto limitano l'uso di questi Acromatici, i quali d'altronde presentano in pratica grandissime difficoltà, e lasciano sempre il desiderio di vedere perfezionati i metodi per la fabbrica del Flint.

Primieramente è molto difficile racchiudere fra due vetri un fluido con tale cemento, che non evapori, e non venga a diminuirsene la massa, ceme accade negli ordinari livelli internamente smerigliati, i quali per la evaporazione presto divengono inservibili, ed obbligano chi ne fa uso a riempirli con nuovo alcool. Il Dott. Blair assicura, che in trent' anni nulla ha per questa parte perduto l'objettivo costruito da suo padre, e quantunque siasi il fluido un poco alterato, ed abbia deposto alcuni cristalli, tuttavia supera ancora in bontà i migliori cannocchiali acromatici della stessa dimensione. (*Bibliotheque universelle Avril. et Juin.* 1828). In secondo luogo, conviene lasciare un piccolo vacuo non riempiendo esattamente lo spazio fra le due lenti racchiuso, affinchè dilatandosi il fluido per l'incremento della temperatura, quelle non si rompano. Tale spazietto in vero apporterà nessuno, o leggero nocumento alla bontà del cannocchiale, quando si osservi un oggetto in direzione orizzontale, od elevato pochi gradi sopra l'orizzonte; ma se vadasi avvicinando al zenit, quella bolla si trasporterà verso il centro dell' objettivo, e deturperà le immagini, togliendo la regolarità delle rifrazioni nella parte migliore e più interessante. In terzo luogo, nei fluidi col variare della temperatura varia fortemente l'indice di rifrazione, ed affinchè l'acromatismo rimanga costante per ogni grado del termometro, richiedesi, che detto m' l' indice di rifrazione per i raggi medii; $m'+dm'$ per i raggi estremi dello spettro solare ad un determinato grado di temperatura, rimanga costante il rapporto $\frac{dm'}{m'-1}$, comunque quella venga a variare. Non è indicato di qual fluido abbiano fatto uso i Signori Blair; nel citato annunzio del Dott. Brewster dicesi, che il Sig. Barlow ha adoperato il solfuro di carbonio. Conviene inoltre che al momento dell' osservazione la temperatura sia uniforme per tutta la massa, altrimenti nei diversi strati verrebbero a prodursi certe onde, che come nel Flint impuro turberebbero la regolarità delle rifrazioni. Queste considerazioni sembrano di molto ristringere l' uso degli objettivi costruiti con sostanze fluide, i quali dalla parte pratica presentano alla maggior parte degli artefici grandi difficoltà, e richiedono per la loro costruzione una grandissima diligenza; perciò rimane sempre, come da bel principio annunziammo, il desiderio che si rimuovano gli ostacoli che si incontrano nella fabbrica dei comuni cannocchiali Acromatici col Crown, e col Flint.

Il Chiarissimo Sig. Littrow, Professore di Astronomia nell' Università di Vienna, sviluppò per il primo le condizioni alle quali si dovrebbe soddisfare per ottenere un buon cannocchiale Acromatico, mediante due specie di vetri con due sole lenti, delle quali la prima fosse convessa, e l' altra concava portata dalla prima in gran distanza. È palese, che quando ciò riesca, la lente concava per essere situata molto vicina al foco della lente di Crown, dove il fascio luminoso è già ristretto in un angusto spazio, riuscirà di dimensioni molto minori, ed in conseguenza si richiederanno per la sua costruzione minori pezzi di Flint puro ed omogeneo, quali più facilmente si ottengono dalle fabbriche. Colla scorta della teoria è facile di assegnare le condizioni alle quali si deve soddisfare, affinchè vengano anche in questa disposizione distrutti gli errori di rifrangibilità e di figura. Ma si cade nell' inconveniente di aumentare la lunghezza del cannocchiale, la quale tanto più fassi maggiore, quanto minore è la forza dispersiva del Flint in confronto di quella del Crown posti in opera. Dimostrò il lodato autore, che se ottenere si potesse una pasta di Flint in cui la forza dispersiva fosse quattro o cinque volte maggiore di quella dell' ordinario flint inglese, una tale distribuzione condurrebbe a risultati vantaggiosi, perchè con piccole porzioncelle di un tal vetro pure ed omogenee riuscire si potrebbe a costruire un buon cannocchiale Acromatico di grandi dimensioni. La composizione però di un tal Flint si desidera tuttavia, e si può temerla non esente da gravi difficoltà, riflettendo che la forza dispersiva aumenta con la quantità di ossido di piombo, conche aumentasi la difficoltà di mescolare perfettamente gli elementi componenti tal vetro; ed oltre ad aumentarsi il numero ed il pericolo delle onde, e dei filamenti, una soverchia quantità di ossido di piombo tende a diminuire la diafaneità, e ad imprimergli un colore lattiginoso. Giova non pertanto sperare, che i progressi sempre crescenti della chimica pervengano a rimuovere queste difficoltà, nel qual caso il progetto del Sig. Littrow sarà per l'ottica pratica sommamente vantaggioso. Questo suo interessante lavoro è inserito nel IV. volume del giornale di Fisica e Matematica pubblicato in Vienna dai Signori Professori Ettingshausen, e Bahumgartner sotto il titolo *Zeitschrift für Physik und Mathematik* IV. 257. Circa lo stesso tempo, cioè agli 11 di Aprile 1828. il Sig. Rogers lesse alla Società astronomica di Londra una memoria, di cui si dà l'annunzio nel *giornale Filosofico* per il mese di Giugno 1828, ed anco nell' ora citato giornale di Fisica e di Matematica (Vol. V. pag. 120.), la quale ha per iscopo di costruire con un piccolo pezzo di Flint delle fabbriche comuni un gran cannocchiale Acromatico; nel che procede con un metodo molto ingegnoso, il quale sembra dover produrre in pratica un ottimo effetto. Il metodo praticato da Rogers riducesi in sostanza a costruire una lente semplice di Crown, la quale abbia la distanza focale che si vuol dare all'objettivo del cannocchiale composto con l'apertura solita a darsi agli objettivi acromatici della medesima dimensione. Fra questa ed il suo foco introducesi una piccola lente, che egli appella *di correzione*, composta di due lenti, una convessa di Crown, l'altra di Flint ridotte a contatto od in grandissima vicinanza fra loro, ed in modo combinate che producano sui raggi di media rifrangibilità l'effetto di una lente piana, sicchè questi attraversino irrefratti il loro sistema; ma sia al tempo stesso accelerata la convergenza dei raggi rossi, e ritardata quella dei violacei in modo che tutti vengano a riunirsi in un sol punto, formando così chiare e precise le immagini degli oggetti lontani. Nulla di più si richiede per l'acromatismo. Rogers dà pel calcolo delle distanze focali delle lenti nel suo objettivo la seguente regola.

„ *La lunghezza focale di ciascheduna parte della lente*
„ *di correzione stà a quella dell' objettivo di Crown in ragio-*
„ *ne composta della superficie della lente di correzione alla*
„ *superficie dell'objettivo, e della differenza degli indici di di-*
„ *spersione del Flint e del Crown all' indice di dispersione*
„ *del Crown.*

Calcolate prossimamente le distanze focali delle lenti osserva l' Autore, che l' aberrazione longitudinale residua di rifrangibilità si può togliere senza alterare le loro curvature, mediante un piccolo movimento lungo l' asse dell' objettivo dato con un opportuno apparato micrometrico alla lente di correzione; e che del pari si può distruggere l' aberrazione longitudinale di sfericità, separando convenientemente le due lenti di correzione. Infine osserva non essere necessario che le due lenti congiunte producano sui raggi di media rifrangibilità l' effetto di un vetro piano, ma potersi ancora con opportune modificazioni nelle loro dimensioni abbreviar alcun poco la lunghezza del tubo objettivo.

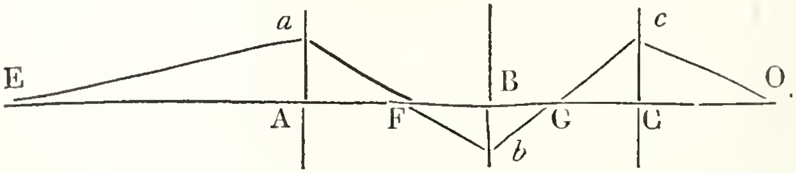
In tal guisa è palese, che con piccoli pezzi di Flint puro, ed omogeneo quali più facilmente ottengonsi dalle fabbriche, si può costruire un cannocchiale acromatico di grandi dimensioni, purchè abbiasi una lente objettiva semplice di Crown, ed è per conseguenza tolta una delle maggiori difficoltà che ai pratici si è sempre presentata nella costruzione dei grandi rifrattori astronomici.

L' importanza di questo argomento mi ha determinato ad esporre in questa breve Memoria i precetti dalla teoria indicati per sì fatte costruzioni, ed illustrarli con un esempio numerico, affinchè abbiano i pratici una guida conveniente per il calcolo di un tal genere di objettivi, i quali per la loro semplicità meritano una particolare attenzione.

Prima però di venire al calcolo dell' objettivo di Rogers, stimo opportuno di riferire brevemente la teoria di quello a due lenti proposto da Litrow, giacchè sebbene questa disposizione non possa utilmente applicarsi con le attuali qualità di Flint, renderà un utile servigio, se avvenga di scuoprire una sostanza molto disperdente da sostituirsegli, siccome lo stesso autore fece saggiamente riflettere nella Memoria, che abbiamo sopra citata; e per procedere con ordine, brevemente riferiremo le formule, alle quali si appoggia la teoria dei sistemi acromatici di lenti disposte intorno ad uno stesso asse, ritenendo le definizioni, ed i simboli adoperati nel primo volume della *Teorica degli stromenti ottici*, alla quale Opera saranno da riferirsi le citazioni dei paragrafi che si incontrano nelle cose seguenti.

FORMULE GENERALI

per il calcolo di un sistema di lenti acromatiche disposte intorno ad un medesimo asse.



I. Sia nella quì unita figura EAO l'asse comune di un sistema di lenti Aa, Bb, Cc . . . , che fingeremo tutte convesse; E il punto radiante; le loro distanze focali siano rispettivamente $p, q, r, \ldots$; E$abc$O il viaggio del raggio ultimo, che da E conducesi alla prima lente, sicchè F, G, O siano i punti di riunione successivi dei raggi procedenti da E, dove pure esistono le immagini del punto E; pongansi le distanze di riunione $\mathrm{EA} = a$, $\mathrm{AF} = \alpha$; $\mathrm{FB} = b$, $\mathrm{BG} = \beta$ $\mathrm{GC} = c$, $\mathrm{CO} = \gamma$ ec. Le semiaperture successive Aa, Bb, Cc delle lenti siano $= x, x', x''$; le loro distanze scambievoli AB, BC . . . $= d, d' \ldots$; le semi-aperture da darsi alla seconda, terza ec. lente, affinchè i raggi provenienti dall' estremità di un' oggetto situato in E, e facienti nel centro della prima lente con l' asse un' angolo determinato φ, da cui dipende il campo del sistema, si indichino per ϖq, $\varpi' r$ . . . . . L' angolo φ nella teoria dei cannocchiali rappresenta il mezzo campo, ed è sempre un piccolo angolo, che si può supporre uguale alla sua tangente od al suo seno; le quantità ϖ, ϖ' sono frazioni assolute, per le quali sì stabilisce generalmente la condizione, che non debbano risultare maggiori di $\frac{1}{4}$, affinchè le intere aperture delle lenti non risultino maggiori della metà della loro distanza focale. Gli indici di rifrazione nel vetro di cui si formano le lenti, siano per i raggi di media rifrangibilità rappresentati rispettivamente da m, m', m'' . . ., e per i raggi estremi dello spettro ricevano le variazioni dm, dm', dm'' . . ., quantità che riescono abbastanza piccole per poterne trascurare le potenze superiori alla prima. I raggi delle superficie della prima lente siano R, R'; della seconda R'', R'''; della terza R^{IV}, R^{V}, ec. Questi raggi devono riguardarsi come positivi per le superficie convesse, negativi per le concave; così pure le distanze focali p, q, r si riguarderanno come positive nelle lenti di convergenza, negative nelle lenti concave, o di divergenza. I numeri arbitrarii, dai quali dipendono i raggi delle lenti, e le aberrazioni di sfericità siano λ, λ', λ'' . . . Questi saranno sempre positivi, e maggiori di uno (Teor. I. vol. § 103.). Si assumano inoltre le denominazioni ivi stabilite (§ 104.), cioè si ponga

$$\mu = \frac{m(4m-1)}{8(m-1)^2(m+2)}\ ; \qquad \nu = \frac{4(m-1)^2}{4m-1}$$

$$\rho = \frac{4+m-2m^2}{2(m+2)(m-1)}\ ; \qquad \sigma = \frac{m(2m+1)}{2(m+2)(m-1)}$$

$$\tau = \frac{m\sqrt{4m-1}}{2(m+2)(m-1)}.$$

Fra le quantità precedenti esisteranno per i principii della diottrica (supponendo trascurabili le grossezze delle lenti) le equazioni seguenti

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}=\frac{m-1}{R}+\frac{m-1}{R'}\;\ldots\ldots\ldots\;(1)$$

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta}=\frac{m'-1}{R''}+\frac{m'-1}{R'''}\;\ldots\ldots\ldots\;(2)$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma}=\frac{m''-1}{R^{\prime v}}+\frac{m''-1}{R^{v}}\;\ldots\ldots\ldots\;(3)$$

$$d=\alpha+b\;;\quad d'=\beta+c\;;\quad \text{ec.}\;\ldots\ldots\ldots\;(4)$$

$$x'=\frac{b}{\alpha}\,x\;;\quad x''=\frac{bc}{\alpha\beta}\,x\;,\qquad \text{ec.}\;\ldots\ldots\ldots\;(5)$$

$$\varpi q=(\alpha+b)\varphi\;;\;\varpi' r=\left(\frac{\alpha\beta}{b}-c\right)\varphi+\varpi c;\quad \text{ec.}\;\ldots\;(6)\,.$$

I raggi delle superficie delle lenti saranno dati dalle seguenti equazioni, nelle quali μ', μ'' . . . . ν', ν'', . . . ρ', ρ''. . . indicano ciò che divengono le rispettive quantità superiori μ, ν, ρ . . . cambiandovi l' indice di rifrazione m in m', ovvero in m'' (§. 104).

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{R}&=\frac{\rho}{a}+\frac{\sigma}{\alpha}\pm\frac{\tau\sqrt{\lambda-1}}{p}\\ \frac{1}{R'}&=\frac{\rho}{\alpha}+\frac{\sigma}{a}\mp\frac{\tau\sqrt{\lambda-1}}{p}\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{R''}&=\frac{\rho'}{b}+\frac{p\sigma'}{\beta}\pm\frac{\tau'\sqrt{\lambda'-1}}{q}\\ \frac{1}{R'''}&=\frac{\rho'}{\beta}+\frac{\sigma'}{b}\mp\frac{\tau'\sqrt{\lambda'-1}}{q}\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{R^{\prime v}}&=\frac{\rho'}{c}+\frac{\sigma''}{\gamma}\pm\frac{\tau''\sqrt{\lambda''-1}}{r}\\ \frac{1}{R^{v}}&=\frac{\rho''}{\gamma}+\frac{\sigma''}{c}\mp\frac{\tau''\sqrt{\lambda'-1}}{r}\end{aligned}\right\}\qquad(9)\,.$$

La condizione, perchè sia annullata l' aberrazione longitudinale di rifrangibilità, sarà (§. 87.)

per 2 lenti $\frac{dm}{m-1} \cdot \frac{1}{p} + \frac{dm'}{m'-1} \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{b^2}{a^2} = 0$ . . . . (10)

per 3 lenti $\frac{dm}{m-1} \cdot \frac{1}{p} + \frac{dm'}{m'-1} \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \frac{dm''}{m''-1} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{b^2c^2}{a^2\beta^2} = 0$...(11)

La condizione, perchè sia tolto il margine colorato in un sistema di tre lenti (non potendo esso annullarsi in un sistema di due lenti) è (§. 93.)

$$\varpi \frac{dm'}{m'-1} + \varpi' \frac{c}{\beta} \cdot \frac{dm''}{m''-1} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

Questa equazione equivale anco alla seguente (vol. II. §. 246.)

$$d' = \frac{q+r}{2-\frac{q}{d}} \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)'$$

che ci sarà utile in seguito.

Per ultimo, le condizioni per esprimere le aberrazioni longitudinali di sfericità in un sistema di due o di tre lenti saranno espresse nelle seguenti equazioni (§. 109.).

per due lenti $P + \frac{b^4}{a^4} Q = 0$ . . . . (13)

per tre lenti $P + \frac{b^4}{a^4} Q + \frac{b^4c^4}{a^4\beta^4} R = 0$ (14)

dove per brevità ponesi

$$P = \frac{\mu}{p}\left(\frac{\lambda}{p^2} + \frac{\nu}{a\alpha}\right); \quad Q = \frac{\mu'}{q}\left(\frac{\lambda'}{q^2} + \frac{\nu'}{b\beta}\right)$$

$$R = \frac{\mu''}{r}\left(\frac{\lambda''}{r^2} + \frac{\nu''}{c\gamma}\right).$$

FORMULE

Per il calcolo di un objettivo acromatico a due lenti separate da un intervallo $= d$.

2. Fingasi la prima lente in A di Crown; la seconda in B di Flint, essendo per A l' indice di rifrazione $= m$; per $B = m'$, l'intervallo $AB = d$, e si cerchino le condizioni, perchè i raggi paralelli all'asse tanto prossimi, che remoti si riuniscano in un punto; o sia perchè siano in questo sistema distrutte le aberrazioni longitudinali di rifrangibilità e di figura. Posta la distanza focale p della prima lente $= 1$, quella della seconda $= q$, avremo in grazia dei raggi paralelli all' asse

$$a = \infty,\ \alpha = p = 1\ ;\ b = -(1 - d)\ \ldots\ldots\ (a)$$

L' equazione (10) darà il valore di q atto a distruggere gli errori di rifrangibilità; e ponendo per brevità

$$N = \frac{dm}{dm'} \cdot \frac{m' - 1}{m - 1}\ \ldots\ldots\ldots\ (b)$$

da essa si dedurrà

$$q = -\frac{(1 - d)^2}{N}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (c)$$

In seguito l' equazione (2) darà

$$\beta = \frac{bq}{b - q} = \frac{(1 - d)^2}{1 - (d + N)}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (d)$$

Rimangono a determinare i raggi delle superficie delle lenti in modo che siano distrutti gli errori di sfericità, al che si perverrà, determinando i numeri λ, λ' in modo che sia soddisfatta l'equazione (13). Ponendo $a = \infty$, $\alpha = p = 1$, si troverà

$$P = \mu\lambda\ ;\ Q = \frac{\mu'\lambda'}{q^3} + \frac{\mu'\nu'}{qb\beta},$$

e la detta equazione darà

$$\lambda' = -\frac{q^3}{b^4} \cdot \frac{\mu}{\mu'}\lambda - \frac{q^2}{b\beta}v' \ldots\ldots\ldots (e)$$

dalla quale, preso λ a piacere si avrà tosto λ'. Quindi le equazioni (7), (8) daranno senza alcuna difficoltà i raggi della superficie delle lenti A, B, e con ciò la disposizione dell'objettivo sarà completamente determinata, nè altro resterà che scegliere convenientemente le arbitrarie d, λ le quali rimangono tuttavia a nostra disposizione.

3. Vediamo ora qual sia l'allungamento che in questo caso riceve il cannocchiale. È palese che ponendo $d = 0$ nelle formole precedenti, si ricade in quelle stesse, che servono al calcolo delle dimensioni di un objettivo, in cui le due lenti sieno all' immediato contatto. Chiamando l', l le lunghezze rispettive del tubo objettivo, quando le lenti sono separate da un intervallo d, e quando sono a contatto, sarà evidentemente

$$l' = d + \beta = \frac{1 - d(1 + \mathrm{N})}{1 - (d + \mathrm{N})}; \quad l = \frac{1}{1 - \mathrm{N}}$$

donde risulterà

$$l' - l = \frac{d\mathrm{N}^2}{(1 - \mathrm{N})[1 - (d + \mathrm{N})]}.$$

Dovendo ora essere β quantità positiva, affinchè i raggi convergano effettivamente ad un punto dopo di avere attraversato la seconda lente, dovrà in virtù dell' equazione (d) essere $d + \mathrm{N} < 1$, cioè $d < 1 - \mathrm{N}$, perciò sarà $l' - l$ quantità positiva, quando N è una frazione, come succede nel caso del Crown e del Flint. Tende dunque questa disposizione ad aumentare la lunghezza del cannocchiale tanto più, quanto più grande sia d, e quanto più grande è la frazione N; se prendesi d molto piccolo non si ha il vantaggio contemplato da bel principio di potere adoperare dei pezzi minori di Flint;

se poi prendasi molto grande e vicino al suo limite $1-\mathrm{N}$, il fattore del denominatore $1-(d+\mathrm{N})$ diviene piccolissimo, e soverchiamente incomoda riesce la lunghezza del tubo objettivo.

Non può pertanto utilmente adoprarsi questa costruzione coi vetri Crown e Flint delle fabbriche comuni, pei quali si ha presso a poco $\mathrm{N}=0,5$; od anche $=0,7$: ma se si riuscisse a trovare due sostanze vitree, per le quali N fosse $=0,1$ od anche $=0,2$, si potrebbe con piccoli pezzi di tale Flint procurare dei grandi e buoni objettivi acromatici, siccome chiaramente dimostrano gli esempii numerici dal Sig. Littrow riferiti nel citato giornale, che quì per amore di brevità tralasciamo.

CALCOLO

Di un objettivo acromatico composto di tre lenti separate giusta il metodo di Rogers.

4. Si consideri un sistema di tre lenti A, B, C disposte intorno ad un medesimo asse; la prima, e la seconda siano della stessa specie di Crown, ambedue convesse, e separate dall' intervallo $\mathrm{AB}=d$; la terza fingasi a contatto della seconda, concava e di Flint. Assumasi ad unità la distanza focale della prima lente, e si supponga, che la seconda e la terza insieme congiunte nei raggi di media rifrangibilità facciano l' ufficio di un vetro piano, sicchè sia $q+r=0$, ovvero $q=-r$.

Avremo in questo caso nelle formule generali del n.° 1 $a=\infty$, $\alpha=p=1$; $b=-(1-d)$; l' equazione $d'=\beta+c$ darà $\beta=-c$. Indicando per m l' indice medio di rifrazione del Crown, per m' quello del Flint, sarà nelle stesse formule $m'=m$, e si dovrà cangiare m'' in m'; l' equazione (11), ponendovi

$$p = a = 1\,,\; q = -r,\; \frac{dm'}{dm} \cdot \frac{m-1}{m'-1} = \xi\,,\; c = -\beta,\ \text{darà}$$

$$1 + \frac{b^2}{q}(1 - \xi) = 0$$

dalla quale si otterrà

$$q = b^2(1 - \xi) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (a)$$

e perciò

$$r = -b^2(1 - \xi) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (b).$$

Preso pertanto *d* a piacere, tosto si avrà *b*; e quindi le equazioni precedenti (*a*), (*b*) daranno le distanze focali della seconda, e terza lente atte a togliere l'aberrazione longitudinale di rifrangibilità prodotta dalla lente A, ed è abbastanza palese che queste equivalgono alla regola data da Rogers, di cui abbiamo sopra riferito l'enunziato.

In seguito l'equazione (2) darà

$$\beta = \frac{bq}{b-q} = -c\,,$$

e l'equazione (3), a motivo di

$$r = -q\,,\; \beta = -c,\ \text{darà}\ \gamma = -b.$$

Resta ad assegnare la figura delle lenti in modo che l'errore di sfericità sia distrutto, al che si perverrà facilmente soddisfacendo all'equazione (14) mediante le arbitrarie $\lambda, \lambda', \lambda''$. È facile vedere, che nel caso presente i valori di P, Q, R si ridurranno ai seguenti

$$P = \lambda\mu;\; Q = \frac{\mu\lambda'}{q^3} + \frac{\mu\nu}{qb\beta};\; R = -\frac{\mu'\lambda''}{q^3} - \frac{\mu'\nu'}{qb\beta}\,.$$

Osservando che $\frac{c^4}{\beta^4} = 1$, la detta equazione diverrà

$$\mu\lambda + \frac{b^4}{q^3}(\mu\lambda' - \mu'\lambda'') + \frac{b^3}{q\beta}(\mu\nu - \mu'\nu') = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; (c)$$

dalla quale, presi a piacere due dei tre numeri arbitrarii λ, λ', λ'', si avrà l' altro. In seguito il calcolo numerico delle equazioni (7), (8), (9) darà i raggi delle superficie delle singole lenti A, B, C.

Esempio Numerico.

5. Si voglia costruire un objettivo acromatico dietro questa teoria con due specie di vetro, per il quale siano gli indici di rifrazione e di dispersione quelli stessi, dei quali ho fatto uso nella *Teorica degli stromenti ottici* vol. I. §.° 126; cioè

Crown, pei raggi medii . . . . $m = 1{,}530000$
pei raggi rossi . . . $+ m - dn = 1{,}521000$
e perciò . . . . $dm = 0.009000$
Flint, pei raggi medii . . . . $m' = 1{,}634494$
pei raggi rossi . . . . . $m' - dm' = 1{,}616707$
$dm' = 0.017787.$

Dietro questi dati si troverà

$$\xi = \frac{dm'}{dm} \cdot \frac{m-1}{m'-1} = 1{,}650853.$$

Assunta la distanza focale p della prima lente $= 1$, pongasi l' arbitraria $d = \frac{2}{3}$; sarà $b = -\frac{1}{3}$; in seguito si troverà

$$q = \frac{\xi - 1}{q} = 0{,}072317 \;;\; r = -0.072317$$

$$\beta = \frac{q}{1+3q} = 0{,}0594247 = -c$$

$$b = -\gamma = -0{,}333333.$$

Non resterà più, che a determinare la figura delle lenti soddisfacendo all' equazione (c). A tale oggetto, conviene prima di tutto apparecchiare i valori delle funzioni μ, μ'; v, v' etc. dietro le equazioni riferite al n.° 1. Si troverà così, come nel §. 126

$$\text{per } m = 1{,}530000 \ldots\ldots \text{per } m' = 1{,}634494$$

$$\log.\mu = 9.9945449 \ldots\ldots \log.\mu' = 9.8883567$$

$$\log.v = 9{,}3413418 \ldots\ldots \log.v' = 9{,}4635639$$

$$\log.\sigma = 0{,}2201369 \ldots\ldots \log.\sigma' = 0{,}1798181$$

$$\log.\rho = 9.3554177 \ldots\ldots \log.\rho' = 8.8005278$$

$$\log.\tau = 9.9622458 \ldots\ldots \log.\tau' = 9.9211687$$

$$\sigma = 1.660110 \ldots\ldots \sigma' = 1.5129280$$

$$\rho = 0{,}226682 \ldots\ldots \rho' = 0.0631725.$$

L' equazione (c) contenendo tre indeterminate λ, λ', λ'', si potrà prendere a piacere la figura delle prime due lenti di Crown. Riesce in pratica più comoda di tutte la figura isoscele, perchè in una sola forma, o con un solo raggio si arruotano le due superficie della stessa lente; stabiliremo perciò, che le due lenti di Crown siano isosceli, con che i numeri λ, λ' saranno determinati dalle seguenti equazioni (§. 106).

$$\sqrt{\lambda - 1} = \frac{\sigma - \rho}{2\tau}\,;\ \sqrt{\lambda' - 1} = \frac{\sigma - \rho}{2\tau} \cdot \frac{b - \beta}{b + \beta}.$$

Quindi in numeri sarà

$$\log.\sqrt{\lambda - 1} = 9.8891001\,;\quad \lambda = 1{,}6000676$$

$$\log.\sqrt{\lambda' - 1} = 0.0456194\,;\quad \lambda' = 2{,}233782.$$

Mediante i valori precedenti l' equazione (c) diverrà

$$\mu\lambda' - \mu'\lambda'' + 0{,}0505568 = 0$$

ovvero

$$\lambda'' = 0,0653767 + 1,276992 . \lambda' = 2,917899.$$

Determinati i numeri λ, λ', λ'' si avranno i raggi delle superficie dalle equazioni (7), (8), (9) senza alcuna difficoltà: più comodamente si calcoleranno quelli della prima e seconda lente dalle equazioni fondamentali (1), (2) ponendovi

$$R' = R;\ R'' = R''';\ p = 1;\ q = 0,072317.$$

Si troverà così

$$R = R' = 2(m-1) = 1,060000$$

$$R'' = R''' = 2(m-1)q = 0,0766555$$

Per ultimo, introducendo nelle equazioni (9) i precedenti valori di c, γ, r, τ', σ' . . . . . λ'', ed osservando le regole dei segni, si troverà

$$\frac{1}{R'^{v}} = -1,06307 + 4,53878 \mp 15,97115$$

$$\frac{1}{R^{v}} = +0,189517 - 25,45960 \pm 15,97115 .$$

Presi i segni superiori, affinchè i valori di R'^{v}, R^{v} divengano ambedue negativi, e la lente risulti concavo-concava si troverà

$$R'^{v} = -0,0800292;\ R^{v} = -0,1075404.$$

Resta ancora a determinare l' apertura della prima lente. Assumendo che nessuna apertura debba eccedere la metà della propria distanza focale, come ordinariamente si pratica da gli ottici, affine di evitare angoli incidenti e rifratti troppo grandi, si determineranno primieramente le aperture delle due minori lenti a contatto, le quali si assumeranno $= \frac{1}{2}q$. Sarà così $x' = x'' = \frac{1}{4}q = 0,01808$ circa; dopo di che l'equazione (5) darà $x = \frac{ax'}{b} = 3x' = 0,05424$; e l' apertura totale sarà $=0,10848$. In numeri rotondi, vogliamo ritenerla $= \frac{1}{10}$ che notabilmente eccede quella che in pratica si suole adottare per i maggiori objettivi acromatici, e vogliamo supporre le grossezze delle prime due lenti $= 0,002$, mentre quella della terza lente concava sia $= 0,001$, ed in questa ipotesi calcoleremo gli errori residui di rifrangibilità e di figura.

6. Cominciamo da quelli di rifrangibilità; si chiamino $k, k', k'', k''', k^{\prime v}, k^{v}$ le distanze del punto, in cui ad ogni nuova rifrazione un raggio luminoso paralello, e prossimo all' asse lo incontrerebbe dietro la superficie refringente, se fosse prolungato; perchè fossero tolti gli errori di rifrangibilità, dovrebbe k^{v} risultare lo stesso tanto per i raggi medii, come per i raggi rossi, o violacei. Queste quantità si calcoleranno coi precetti del §.° 121. una dietro l' altra colla scorta delle seguenti equazioni, le quali per maggiore comodo si sono disposte in modo da considerare tutti i raggi R, R'. . . . . R^{v} come positivi; d rappresenta la distanza della prima dalla seconda lente assunta $= \frac{2}{3}$; v, v', v'' sono le grossezze attribuite alle lenti, cosicchè nel caso attuale si ha

$$v = v' = 0,002;\ v'' = 0,001.$$

$$1.^a \text{ lente } \frac{R}{k} = \frac{m-1}{m};\ \frac{R'}{k'} = \frac{mR'}{k-v} + m - 1$$

$$2.^a \text{ lente } \frac{R''}{k''} = \frac{R''}{m(k'-d)} + \frac{m-1}{m};\ \frac{R'''}{k'''} = \frac{mR''}{k''-v'} + m - 1$$

$$3.^a \text{ lente } \frac{R^{\prime v}}{k^{\prime v}} = \frac{R^{\prime v}}{m'k'''} - \frac{m'-1}{m'};\ \frac{R^{v}}{k^{v}} = \frac{m'R^{v}}{k^{\prime v}-v'} - (m'-1).$$

Prendendo per m, m' prima l' indice di rifrazione per i raggi medii nel Crown e nel Flint, quindi quello conveniente ai raggi rossi, dietro le superiori equazioni si formeranno i seguenti valori

Per i raggi medii	*Per i raggi rossi*
$k = 3,060000$	$k = 3,094550$
$k' = 0,999673$	$k' = 1,016946$
$k'' = 0,1542802$	$k'' = 0,1575919$
$k''' = 0,0589577$	$k''' = 0,0603419$
$k'^{v} = 0,1809460$	$k'^{v} = 0,1823450$
$k^{v} = 0,314150$	$k^{v} = 0,314422$

Aberrazione residua di rifrangibilità $= 0,000272$.

7. Prima di procedere al calcolo dell' aberrazione di sfericità, è opportuno di distruggere questa piccola aberrazione residua di rifrangibilità, al che comodamente si perviene mediante una piccola variazione data alla distanza d, che indicheremo per δd. Chiamando δk la corrispondente variazione di k^{v}, si troverà differenziando le superiori equazioni

$$\delta k^{v} = -\frac{\overline{k^{v}}^{2}}{(k'-d)^{2}}\,\delta d.$$

Riducendo a numeri il coefficiente di δd tanto per i raggi medii, quanto per i rossi, si ottiene

per i medii . . . $k^{v} = 0,314150 - 0,889959 . \delta d$

per i rossi . . . . $k^{v} = 0,314422 - 0,805748 . \delta d.$

Uguagliando i due valori di k^{v}, si troverà

$$\delta d = -\frac{272}{84211} = -0,003230\,;$$

perciò il valore corretto di d sarà $= 0,663437$.
Ricalcolando con questo valore di d i numeri $k \ldots . k^{v}$ dietro le stesse equazioni, si otterrà

Per i raggi medii	*Per i raggi rossi*
$k = 3{,}060000$	$k = 3{,}094550$
$k' = 0{,}999673$	$k' = 1{,}016946$
$k'' = 0{,}1547307$	$k'' = 0{,}1580190$
$k''' = 0{,}0590609$	$k''' = 0{,}0603006$
$k^{iv} = 0{,}1815420$	$k^{iv} = 0{,}1828973$
$k^{v} = 0{,}317137$	$k^{v} = 0{,}317121$.

Quindi l' aberrazione residua di rifrangibilità sarà $= 0.000016$; quantità piccolissima e trascurabile.

8. Vediamo ora, come in questo objettivo siano tolti gli errori di sfericità, per il che con un calcolo trigonometrico e rigoroso conviene calcolare la via tenuta da un raggio luminoso incidente verso gli estremi dell' objettivo in direzione paralella all' asse dietro i precetti del §. 120. Siano perciò i, i', i'', i''', i^{iv}, i^{v} gli angoli successivi di incidenza in cadaun punto, ove ha luogo una rifrazione, l, l', $l'' \ldots l^{v}$ i corrispondenti angoli rifratti; O, $O' \ldots O^{v}$ gli angoli, sotto i quali la direzione del raggio luminoso dopo la prima, seconda, . . . sesta rifrazione taglia l' asse; k, $k' \ldots k^{v}$ le distanze dei punti d' incontro di essa direzione con l' asse dalle rispettive superficie refringenti. Disponendo le formule in modo da riguardare nella presente costruzione i raggi come tutti positivi, si otterranno queste quantità dal calcolo successivo delle seguenti equazioni per ogni dato valore di i

1.^{a} lente;

$$\text{sen}.l = \frac{\text{sen } i}{m};\ O = i - l;\ k - R = \frac{R \text{sen}.l}{\text{sen } O}\ .$$

$$\text{sen}.i' = \frac{k + R' - v}{R'}\ \text{sen}.O;\ \text{sen}.l' = m.\text{sen}.i';\ O' = l' - i' + O$$

$$k' + R' = \frac{R' \text{sen}.l'}{\text{sen}.O'}\ .$$

2.ª lente ;

$$\text{sen.}\, i'' = \frac{k' - d - R''}{R''}\,.\,\text{sen.} O'; \quad \text{sen.}\, l'' = \frac{\text{sen.}\, i''}{m}; \quad O'' = i'' - l'' + O'$$

$$k'' - R'' = \frac{R''\,\text{sen.}\, l''}{\text{sen.} O''};$$

$$\text{sen.}\, i''' = \frac{R''' + k'' - v'}{R'''}\,.\,\text{sen.} O''; \quad \text{sen.}\, l'' = m\,\text{sen.}\, i'''; \quad O''' = l''' - i''' + O'';$$

$$k''' + R''' = \frac{R'''\,\text{sen.}\, l'''}{\text{sen.} O''}\,.$$

3.ª lente ;

$$\text{sen.}\, i^{\prime v} = \frac{k''' + R^{\prime v}}{R^{\prime v}}\,\text{sen.} O'''; \quad \text{sen.}\, l^{\prime v} = \frac{\text{sen.}\, i^{\prime v}}{m'}; \quad O^{\prime v} = l^{\prime v} - i^{\prime v} + O'''\,,$$

$$k^{\prime v} + R^{\prime v} = \frac{R^{\prime v}\,\text{sen.}\, l^{v}}{\text{sen.} O^{\prime v}};$$

$$\text{sen.}\, i^{v} = \frac{k^{v} - R^{v} - v}{R^{v}}\,.\text{sen.} O^{\prime v}; \quad \text{sen.}\, l^{v} = m\,\text{sen.}\, i^{v}; \quad O^{v} = i^{v} - l^{v} + O^{\prime v}$$

$$k^{v} - R^{v} = \frac{R^{v}\,\text{sen.}\, l^{v}}{\text{sen.} O^{v}}\,.$$

9. Affinchè fossero distrutti gli errori tutti di rifrangibilità, e di figura dovrebbe il valore di k^v tanto per i raggi medii, quanto per i raggi rossi e violacei sì prossimi che remoti dall' asse, risultare costante; ma a tanta precisione non si può aspirare per le ragioni che più diffusamente si espongono nella diottrica; ed è forza contentarsi di riunire in un sol punto i raggi eterogenei prossimi all' asse coi ragii medii remoti, tollerando una piccola aberrazione residua di sfericità nei raggi rossi. Assumendo l' apertura $= \frac{1}{10}$, si troverà $i = 2^\circ.\, 42'.\, 13''$; riterrò in numeri rotondi $i = 2.^\circ 43'$; conservando per i raggi delle superficie, per la distanza d corretta, e per le grossezze delle lenti i valori superiormente assegnati, trovo i risultati espressi nella seguente tabella.

Raggi medii	*Raggi rossi.*
$i = 2.^\circ\ 43'.\ 0'',0$	$i = 2.^\circ\ 43'.\ 0'',\ 0$
$l = 1.\ 46.\ 30,8$	$l = 1.\ 47.\ 8,6$
$O = 0.\ 56.\ 29,2$	$O = 0.\ 55.\ 51,4$
$k = 3,0585405$	$k = 3,0030420$
$i' = 3.^\circ\ 39'.\ 30'',40.$	$i' = 3.^\circ\ 38'.\ 52'',63$
$l' = 5.\ 36.\ 9,16$	$l' = 5.\ 33.\ 12,53$
$O' = 2.\ 53.\ 7,96$	$O' = 2.\ 50.\ 11,30$
$k' = 0,995676$	$k' = 1.012955.$
$i'' = 9.^\circ\ 39'.\ 45'',36$	$i'' = 10.^\circ\ 8'.\ 43'',80$
$l'' = 6.\ 17'.\ 53,35$	$l'' = 6.\ 39.\ 1,45$
$O'' = 6.\ 14.\ 59.\ 77$	$O'' = 6.\ 19.\ 53,65$
$k'' = 0,1539007$	$k'' = 0,1571542$
$i''' = 18.^\circ\ 56'.\ 27'',60$	$i''' = 1\ .^\circ 28'.\ 52'',30$
$l''' = 29.\ 46.\ 38,1$	$l''' = 30.\ 28.\ 50,9$
$O''' = 17.\ 5.\ 10,3$	$O''' = 17.\ 19.\ 51,2$
$k''' = 0,0529159$	$k''' = 0,0538743$
$i^{iv} = 29.^\circ\ 12'.\ 51'',8$	$i^{iv} = 29.^\circ\ 53'.\ 44'',8$
$l^{iv} = 17.\ 22,\ 27,2$	$l^{iv} = 17.\ 57.\ 23,6$
$O^{iv} = 5.\ 14.\ 45,7$	$O^{iv} = 5.\ 23.\ 30,0$
$k^{iv} = 0,1813396$	$k^{iv} = 0,1825478$
$i^{v} = 3.^\circ\ 32'.\ 54'',9$	$i^{v} = 3.^\circ\ 42'.\ 26'',3$
$l^{v} = 5.\ 48.\ 23,0$	$l^{v} = 6.\ 0.\ 1,9$
$O^{v} = 2.\ 59.\ 17,6$	$O^{v} = 3.\ 5.\ 54,4$
$k^{v} = 0,316238$	$k^{v} = 0,315527$

---

pei raggi prossimi si trovò

$k^{v} = 0,317137$ . . . . $k^{v} = 0,317121$

Quindi l'aberrazione di sfericità residua

nei raggi medii = 0, 000899

nei raggi rossi = 0, 001594

Affinchè gli errori di sfericità non apportino in un cannocchiale una sensibile confusione, dimostrammo al §. 116. del 1.° Volume non dovere l' aberrazione longitudinale residua (almeno nei raggi di media rifrangibilità costituenti l'immagine principale e più splendente) oltrepassare il limite 0,0000747.p. La precedente risultando all'incirca dieci volte maggiore, dovrà ancora attenuarsi mediante piccole alterazioni introdotte nel sistema delle lenti. Qui intanto rendesi manifesto, che se anche giungasi a distruggere esattamente l'aberrazione di sfericità nei raggi medii, rimarrà tuttavia una piccola aberrazione nei raggi rossi, la quale se si può attenuare cambiando la figura della prima lente, non si può togliere del tutto, se non con forme di lenti incomode nella pratica, come mostrammo accadere negli objettivi duplicati nella più volte citata *Teorica degli stromenti ottici*; perciò da ora in poi cercheremo solo di togliere l' aberrazione di figura per i raggi medii, tollerando la residua nei raggi estremi dello spettro solare.

10. Il Sig. Rogers vanta, come uno dei principali pregi della sua costruzione il poter togliere l' errore di figura con un piccolo allontanamento della seconda dalla terza lente, che prescrive doversi lasciare arbitrario mediante un apparato micrometrico, finchè per osservazione trovisi questo distrutto, o almeno attenuato a segno di essere impercettibile all'occhio, il quale per la sua arcana costruzione non richiede nell'acromatismo l' ultima esattezza. Quantunque non sembri gran fatto lodevole il permettere che le lenti di questo sistema siano avvicinate ed allontanate mediante apparati micrometrici, per la facilità, con cui possono insorgere errori di centratura (se l' apparato tutto non sia perfettissimo) anche più pericolosi di quelli che si vogliono evitare, non parmi nè anche possi-

bile di togliere con questo mezzo l'errore di sfericità. In fatti, introducendo una piccola distanza $\delta d'$ fra la seconda e terza lente, si riproducono gli errori di rifrangibilità che erano stati precedentemente distrutti; conviene pertanto far variare contemporaneamente d di una quantità arbitraria δd; quindi per i raggi prossimi all'asse si troverà

$$\delta k^v = -\frac{\overline{k^v}^2}{(k'-d)^2}\,\delta d - \frac{\overline{k^v}^2}{k'''^2}\,\delta d'$$

La quale ridotta a numeri nel nostro caso tanto per i raggi medii come per i raggi rossi, darà la distanza del punto di concorso dietro l'ultima lente espressa come segue ;

per i raggi medii $k^v = 0{,}317137 - 0{,}88962.\delta d - 28{,}8332.\delta d' \ldots (1)$

per i raggi rossi $k^v = 0{,}317121 - 0{,}80462.\delta d - 27{,}5364.\delta d' \ldots (2)$

Più prolisso e laborioso riesce il calcolo della variazione di k^v per i raggi medii condotti paralellamente all'asse verso le estremità ; imperciocchè variano con δd le quantità i'', $i''' \ldots i^v$, $l'' \ldots l^v$, $k'' \ldots k^v$; e dipendentemente da $\delta d'$ variano le quantità i^v, i^v, l'^v, l^v, .. k'^v, k^v. Queste variazioni si otterranno differenziando le equazioni del n.° 8; così sarà, per esempio,

$$di'' = -\frac{1}{\mathrm{R}''}\cdot\frac{\mathrm{sen}.\mathrm{O}'}{\cos.i''}.\delta d\,; \quad dl'' = \frac{\cos.i''}{m\cos.l''}\cdot di''; \; d\mathrm{O}'' = di'' - dl'';$$

$$dk'' = (k'' - \mathrm{R}'').\mathrm{cot}.l''.dl'' - (k'' - \mathrm{R}'').\mathrm{cot}.\mathrm{O}''.d\mathrm{O}''$$

Simili equazioni daranno i valori di dk''', dk'^v, dk^v, dal calcolo successivo delle quali trovo i seguenti risultamenti

$$dk'' = -\,0{,}13695.\ \delta d$$

$$dk''' = +\,0{,}00003.\ \delta d$$

$$dk'^v = -\,0{,}24524.\ \delta d - 7{,}52629\ \delta d'$$

$$dk_v = -\,1{,}21610.\ \delta d - 34{,}87460.\ \delta d'.$$

Quindi si formerà la seguente equazione di condizione

$$k^v = 0{,}316238 - 1{,}21610 . \delta d - 34{,}87460 . \delta d' \; \ldots . (3).$$

Uguagliando i valori di k^v dati dalle equazioni (1), (2) (3) si ottiene

$$\delta d = + 0{,}014013 \; ; \; \delta d' = - 0{,}0009021$$

ed essendosi precedentemente supposte a contatto le lenti di correzione, il risultato negativo è inammissibile. Vuolsi non pertanto osservare, che le variazioni di k^v variano notabilmente cogli indici di rifrazione, ed è quindi possibile che con altre paste di vetri anche in una simile disposizione si riesca a distruggere contemporaneamente i due errori di rifrangibilità, e di figura con la semplice variazione delle distanze; variando però con δd molto fortemente ambedue le aberrazioni, riuscirà una tale via (parmi) sempre pericolosa in pratica, sopra tutto se gli apparati micrometrici non siano con ogni diligenza costruiti.

11. Non potendosi pertanto nella attuale disposizione di lenti distruggere al tempo stesso gli errori di rifrangibilità e di figura con un'alterazione nelle loro distanze scambievoli, è forza ricorrere alla variazione dei raggi di una delle due lenti di correzione, ed a tal' uopo riesce comodissima per il calcolo numerico una variazione arbitraria nei raggi dell'ultima lente, giacchè in tal caso tutte le quantità relative alle due precedenti rimangono invariabili. Indicando con dR'^v, dR^v gli incrementi piccolissimi dati ai raggi R'^v, R^v riguardati come positivi, si calcoleranno i valori di dk^v col mezzo delle seguenti equazioni, che facilmente deduconsi dalla differenziazione delle equazioni generali date di sopra.

1.° Per i raggi prossimi all' asse

$$dk^v = - \frac{(m'-1)\, k'^{v2} . k^{v2}}{(k'^v - y'')^2 . R'^{v2}} \, dR'_v - \frac{(m'-1) k^{v2}}{R^{v2}} . dR^v \; \ldots\ldots (a)$$

2.° Per i raggi rimoti si avrà

$$dk_v = \left(\frac{dk^v}{dR'^v}\right) dR'^v + \left(\frac{dk^v}{dR^v}\right) dR^v \; \ldots\ldots\ldots (b)$$

Il primo termine $\left(\frac{dk^v}{dR'^v}\right) dR'^v$ si otterrà dal calcolo successivo delle seguenti equazioni:

$$di'^v = -\frac{k'''}{R'^{v2}} \cdot \frac{\text{sen.}O'''}{\text{cos.}i'^v} \cdot dR'^v$$

$$dl'^v = \frac{1}{m'} \cdot \frac{\text{cos.}i'^v}{\text{cos.}l'^v}\; di'^v;\; dO'^v = dl'^v - di'^v;$$

$$dk'^v = \frac{k'^v}{R'^v} \cdot dR'^v + (k'^v + R'^v)\text{cot.}l'^v.dl'^v - (k'^v + R'^v)\text{cot.}O'^v.dO'^v;$$

$$di^v = \frac{\text{tang.}i^v}{k'^v - R^v - v'}\, dk'^v + \text{tang.}i^v.\ \text{cot.}O'^v.\ dO'^v$$

$$dO^v = di^v - dl^v + dO'^v$$

$$\left(\frac{dk^v}{dR'^v}\right) dR'^v = (k^v - R^v)\text{cot.}l^v\; dl^v - (k^v - R^v)\ \text{cot.}O^v\, dO^v.$$

Quanto al secondo termine dell'equazione (b) dipendente da dR^v, si otterrà dietro il calcolo dalle seguenti equazioni

$$di^v = -\frac{k'^v - v''}{R^{v2}} \cdot \frac{\text{sen.}O'^v}{\text{cos.}i^v}\; dR^v$$

$$dl^v = m' \cdot \frac{\text{cos.}i^v}{\text{cos.}l^v} \cdot di^v;\; dO^v = di^v - dl^v$$

$$\left(\frac{dk^v}{dR^v}\right) dR^v = \frac{k^v}{R^v} \cdot dR^v + (k^v - R^v)\text{cot.}l^v\; dl^v - (k^v - R^v).\text{cot.O.}^v\, dO^v.$$

12. Se ora riducesi a numeri il valore di dk^v dato dall' equazione (a) del n.° precedente tanto pei raggi medii, come pei rossi, e si aggiungono i risultati ai rispettivi valori di del n.° 7, si avrà pei raggi prossimi all'asse

Medii..... $k^v = 0{,}317137 - 10{,}07444.dR'^v - 5{,}51794.dR^v$.... (4)

Rossi...... $k^v = 0{,}317121 - 9{,}79024.dR'^v - 5{,}37508.dR^v$.... (5).

Passando all' equazione (b), si formerà il termine $\left(\frac{dk^v}{dR'^v}\right) dR'^v$

dietro le superiori equazioni applicate ai raggi di media rifrangibilità, il calcolo delle quali dà i seguenti risultati

$$di'^{v} = -2{,}781256.dR'^{v}$$

$$dO'^{v} = +1{,}225099.dR'^{v}$$

$$dl'^{v} = -1{,}556157.dR'^{v}$$

$$dk'^{v} = -2{,}521407.dR'^{v}$$

$$di^{v} = -1{,}311933.dR'^{v}$$

$$dO^{v} = +2{,}195614.dR'^{v}$$

$$dl^{v} = -2{,}282448.dR'^{v}$$

$$\left(\frac{dk^{v}}{dR'^{v}}\right) dR^{v} = -12{,}155458.dR'^{v}.$$

Per ultimo si formerà $\left(\frac{dk^{v}}{dR^{v}}\right) dR^{v}$ mediante i seguenti valori

$$di^{v} = -1{,}428507.dR^{v}$$

$$dO^{v} = +0{,}913923.dR^{v}$$

$$dl^{v} = -2{,}342430.dR^{v}$$

$$\left(\frac{dk^{v}}{dR^{v}}\right) dR^{v} = -4{,}976608.dR^{v}$$

perciò sarà

$$dk^{v} = -12{,}155458.dR'^{v} - 4{,}976608.dR^{v}.$$

quindi la seguente equazione di condizione per i raggi remoti

$$k^{v} = 0{,}316238 - 12{,}155458.dR'^{v} - 4{,}976608.dR^{v} \;.\;.\;.\;.\; (6)$$

Uguagliando i valori di k^{v} dati dalle equazioni (4), (5), (6) per far concorrere in un solo punto i raggi eterogenei prossimi all'asse coi medii remoti, si troverà coi soliti metodi

$$dR'^{v} = -0{,}00026548;\; dR^{v} = +0{,}00064013;\; k^{v} = 0{,}316280.$$

Pertanto i raggi corretti dell' ultima lente concavo-concava risulteranno come segue

$$R'^{v} = 0{,}0800292 - 0{,}0002655 = 0{,}0797637\;;$$

$$R^{v} = 0{,}1075404 + 0{,}0006401 = 0{,}1081805\;,$$

e la disposizione completa dell' objettivo acromatico dovrà essere la seguente (supponendo gli indici di rifrazione, come a bel principio li abbiamo assunti)

1.ª lente, isoscele di Crown, convessa; distanza focale = 1,000000
Raggio comune alle due superficie . . . = 1,060000

2.ª lente, isoscele dello stesso Crown; distanza focale = 0,072317
Raggio comune alle due superficie . . . = 0,0766555

3.ª lente, concavo-concava di Flint; distanza focale risultante dai superiori raggi corretti = −0,0723599

Raggio della 1.ª superficie rivolta verso gli oggetti = −0,0797637

Raggi della 2.ª superficie rivolta all' occhio = −0,1081805

Distanza della prima dalla seconda lente . . . = 0,663437

Grossezza della prima e della seconda lente = 0,002 circa

Grossezza della terza lente . . . . = 0,001

Semi-apertura della prima lente = x . . . . . . = 0,05

La semi-apertura delle due lenti di correzione = $\frac{1}{3}x$ = 0.017 cir.

L' estremo raggio principale, che attraversando il centro della prima lente potrà essere rifratto dalla seconda e terza lente farà con l' asse un' angolo di 1.° 25′; perciò il campo sarà sempre convenientemente grande.

13. Nell' objettivo precedentemente descritto sarebbero tolti gli errori di rifrangibilità nei raggi eterogenei prossimi all' asse, e di figura nei raggi medii estremi, se i piccoli errori commessi nella stima delle parti proporzionali in una sì lunga serie di operazioni numeriche, e le seconde potestà delle correzioni trovate, trascurate per la natura stessa del calcolo differenziale, non esercitassero sui finali valori di k^{0} una qualche influenza. È quindi opportuno di mostrare col calcolo la grandezza delle aberrazioni residue. Si riprenderà quin-

di da capo il calcolo delle quantità k, k'. . . k^v, tanto pei raggi prossimi all'asse, come pei remoti, e siccome la posizione, e le dimensioni delle prime due lenti non hanno variato, basterà proseguire il calcolo delle indicate quantità da k'' in poi. Si troverà così pei raggi prossimi all'asse.

Medii	*Rossi*
$k^{\prime v} = 0{,}1820756$	$k^{\prime v} = 0{,}1834296$
$k^v = 0{,}316145$	$k^v = 0{,}316136$

e perciò l'aberrazione residua di rifrangibilità sarà$=0{,}000009$; quantità esigua e trascurabile.

Quanto ai raggi remoti si troverà

Pei medii	*Pei rossi*
$i^{\prime v} = 29.^\circ 15'.24'',8$	$i^{\prime v} = 29^\circ.56'.23'',6$
$l^{\prime v} = 17.\ 23.\ 52{,}8$	$l^{\prime v} = 17.\ 58.\ 53{,}1$
$O^{\prime v} = 5.\ 13.\ 38{,}3$	$O^{\prime u} = 5.\ 22.\ 20{,}7$
$k^{\prime v} = 0{,}\ 1820153$	$k^{\prime v} = 0{,}1832289$
$i^v = 3^\circ.31'.\ 0'',18$	$i^v = 3^\circ.40'.28'',17$
$l^v = 5.45.\ 14{,}82$	$l_v = 5.\ 56.\ 49{,}\ 85$
$O^v = 2.\ 59.\ 23{,}\ 66$	$O^v = 3.\ \ 5.\ 59{,}\ 0$
$k^v = 0{,}\ 316120$	$k^v = 0{,}315466.$

Aberrazione di figura residua nei raggi medii $= 0.000025$.

nei raggi rossi $= 0.000679$.

Vedesi pertanto, che l'aberrazione di sfericità residua nei raggi medii è all'incirca tre volte minore di quella, che può esercitare una sensibile influenza, e perciò trascurabile; ma rimane quì pure come negli objettivi duplicati, e triplicati a contatto una piccola aberrazione nei raggi rossi, la quale non può essere tolta del tutto, e solo potrà diminuirsi assumendo altre forme per le due prime lenti, la figura delle quali rimase al nostro arbitrio. Quì però vuolsi osservare, che a motivo della piccola distanza focale delle due lenti di correzione, sembra per esse conveniente la figura isoscele, almeno prossimamente, per non cadere in raggi di curvatura troppo piccoli, e d' altronde la figura della prima lente in virtù dell' equazione (*c*) del n.° 4. ha su quella delle altre due una piccola influenza. Quindi la disposizione da noi riferita riunisce al pregio della semplicità eziandio quello della tenuità delle aberrazioni residue pei raggi paralelli all' asse; a ciò si aggiunge, che è anche tolto all' incirca il contorno colorato in quanto che questo può derivare dalla decomposizione dei raggi principali di media rifrangibilità; imperciocchè la lente di correzione produce in essi all' incirca l' effetto di un vetro piano, piccolissima essendo la differenza fra le opposte distanze focali della seconda e della terza lente, la qual cosa anche si manifesta dall' equazione (12)' del n.° 1. che è sensibilmente soddisfatta. Sembra quindi tale costruzione dover produrre in pratica un buon effetto; ciò non pertanto è da osservarsi, che esigerà questa una grandissima diligenza, giacchè è facile convincersi dalle cose precedenti, che le aberrazioni di rifrangibilità, e di figura variano fortemente per piccole alterazioni date ai raggi delle lenti di correzione, e quindi un piccolo errore in questi può esercitare una pericolosa influenza. Per questa ragione non sembra potersene raccomandare l' uso che per i maggiori cannocchiali, per i quali sì fatta disposizione può divenire molto vantaggiosa, richiedendosi per essa dei mediocri pezzi di Flint puro, come più chiaramente apparirà dal seguente esempio numerico.

Colle paste di Crown, e di Flint, che hanno servito di base all'esempio precedente, si vuol costruire un grande rifrattore astronomico, il quale abbia 10 *piedi di distanza focale.*

1.° Si farà la prima lente di Crown isoscele; i raggi delle sue due superficie saranno $= 10.^{p}\ 7.^{pol}\ 2^{l}, \frac{2}{5}$. Nel nostro calcolo abbiamo portato l'apertura di questa lente ad $\frac{1}{10}$ della sua distanza focale; quindi sarebbe $= 12\frac{1}{2}$ pol. e supererebbe quella di qualunque cannocchiale fin' ora costruito. Si potrà diminuire un' apertura così eccedente, e ridurla a 9, o 10. poll. con che eziandio gli errori residui di sfericità avranno minore influenza. La grossezza della lente risulterà circa 3. linee.

2.° La seconda lente si farà pure dello stesso vetro, convessa ed isoscele; i raggi delle due superficie dovranno essere $= 0^{p}.\ 9^{pol}.\ 2^{l}, 384$ circa; la sua apertura sarà di circa 4 poll., la sua grossezza nel calcolo è stata assunta uguale alla precedente; ma poca influenza ha nel risultato, se anche risulta un poco minore.

3.° La terza lente sarà di Flint concavo-concava, ed avrà l'apertura di 4 pol. come la precedente, laddove negli objettivi a contatto avrebbe dovuto essere di 9, o 10. poll. come quella della prima lente; se si lascierà nel mezzo una grossezza di circa $1.\frac{1}{2}$ linee; cioè circa la metà di quella della seconda.

Il raggio della prima superficie sarà $= 0.^{p}\ 9.^{p}\ 6,^{l}860.$ circa
quello della seconda . . . . $=$ 1. 0. 11,780.

4.° Le due lenti di correzione si fisseranno, come i comuni objettivi, in un anello di ottone; e siccome le due interne superficie rimangono quasi a contatto per la piccola differenza dei raggi, per evitare l'immediato contatto verso il centro, e gli anelli colorati che ne risulterebbero, si frapporranno fra l'una e l'altra lente tre piccoli pezzetti di foglia di stagno ugualmente grossi, come nei suoi objettivi praticò Fraunhofer, e si userà ogni diligenza nel centrarle dentro l'anello.

Per ultimo in un tubo, intorno ad un' asse comune, si porrà la prima lente ad una sua estremità, e la lente di correzione in modo, che le loro interne superficie siano alla distanza di 6.^{p} 7.^{vol} 7^{l}, 349, ed in modo che tutto il sistema sia esattamente centrato; lo che si potrà verificare nel modo proposto, e praticato da Wollaston per gli objettivi triplicati.

Tale dovrà essere la disposizione delle lenti, perchè l'objettivo composto produca una immagine chiara, e precisa degli oggetti lontani; ad esso si adatterà una serie di oculari per i diversi ingrandimenti dalla chiarezza naturale fino al massimo ingrandimento che può sostenere, i quali si costruiranno coi precetti, che diffusamente si espongono nel secondo volume della *Teorica degli Stromenti Ottici*.

SOPRA GLI INTEGRALI DEFINITI.

MEMORIA

DEL

CAV. GIULIANO FRULLANI

Ricevuta adì 21. *Novembre* 1829.

Nel IV. Volume del suo Calcolo Integrale Euler trattò il primo la formola trascendente $\int\frac{\sin.\phi.d\phi}{\phi}$ estesa tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \infty$. In appresso altri geometri distintissimi si occuparono di quella formola stessa, e ciò con impegno tanto maggiore in quanto si riconobbe che varie estese classi di trascendenti ne dipendevano.

Io mi propongo in questa Memoria di esporre alcune considerazioni non tanto relative alla formola quì sopra citata, come riguardanti altre analoghe trascendenti.

1. Per determinare l' Integrale $\int\frac{\sin.\phi d\phi}{\phi}$ tra i limiti $\phi=0$ $\phi = \infty$ incomincierò con dividerne l' estensione in una infinità di parti; successivamente prendendolo da zero sino a π, da 2π sino a 3π, e così seguitando in infinito: ove π dinota la mezza circonferenza del circolo di cui l' unità sia il raggio.

Così formeremo una serie infinita e convergente, di cui troveremo facilmente la somma. Infatti noi avremo

$$\left.\begin{matrix}\phi = 0\\ \phi = \infty\end{matrix}\right\} \int\frac{\sin.\phi.d\phi}{\phi} = \int du\Sigma\ \frac{\sin.(u+i\pi)}{u+i\pi}.$$

Avvertendo che l'integrale relativo ad u deve estendersi da $u=0$ sino ad $u=\pi$; mentre la somma denotata dal segno Σ deve essere estesa a tutti i valori interi e positivi di i, da $i=0$, sino ad $i=\infty$.

Così la Equazione precedente si ridurrà alla seguente:

$$\left.\begin{matrix}\phi=0\\ \phi=\infty\end{matrix}\right\}\int\frac{\sin.\phi.d\phi}{\phi}=\int du.\sin.u\left\{\frac{1}{u}-\frac{1}{u+\pi}+\frac{1}{u+2\pi}-\frac{1}{u+3\pi}+\text{ec.}\right\}$$

Ma tra i limiti $u=0$, $u=\pi$ noi abbiamo

$$\int\frac{\sin.u.du}{i\pi+u}=\int\frac{\sin.u.du}{(i+1)\pi-u}$$

d'onde dedurremo:

$$\left.\begin{matrix}\phi=0\\ \phi=\infty\end{matrix}\right\}\int\frac{\sin.\phi\,d\phi}{\phi}=\int du\sin.u\left\{\frac{1}{u}-\frac{1}{2\pi-u}+\frac{1}{2\pi+u}-\frac{1}{4\pi-u}+\frac{1}{4\pi+u}-\text{ec.}\right\}$$

Or si ha pure per un Teorema dovuto ad Euler e che suol riportarsi nei trattati di Calcolo integrale,

$$\frac{1}{2}\text{cotang.}\frac{u}{2}=\frac{1}{u}-\frac{1}{2\pi-u}+\frac{1}{2\pi+u}-\frac{1}{4\pi-u}+\text{ec.}$$

e quindi

$$\left.\begin{matrix}\phi=0\\ \phi=\infty\end{matrix}\right\}\int\frac{\sin.\phi.d\phi}{\phi}=\frac{1}{2}\int du.\sin.u.\,\text{cotang.}\frac{u}{2}$$

Effettuando l' integrazione nel secondo membro, otterremo immediatamente

$$\left.\begin{matrix}\phi=0\\ \phi=\infty\end{matrix}\right\}\int\frac{\sin.\phi.d\phi}{\phi}=\frac{\pi}{2}$$

2. Io comunicai, già da tempo, questo modo di determinare l' integrale $\int\frac{d\phi\sin.\phi}{\phi}$ esteso tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\infty$ al

cel. Sig. Poisson, uno dei più distinti geometri dei nostri giorni. Inerendo Egli ad alcune mie vedute sulla teoria degli Integrali definiti, soggiungevami in proposito della ricerca quì sopra esposta con le riflessioni seguenti, che volentieri riferisco per la giustezza delle idee che vi si contengono ,,... On
,, faira disparoitre toutes les difficultés que les intégrales des
,, quantités périodiques peuvent présenter en les considerant
,, non pas isolément, mais comme les limites d'autres intégrales
,, de quantités decroissantes. En général pour éviter de
,, commettre des erreurs dans le Calcul des Intégrales définies,
,, il faut admettre les resultats qui seroient verifiables
,, approximativement en nombres, et les expressions
,, qui sont implicitement les limites de semblables resultats.
,, C' est là un principe dont je crois qu' il est important de
,, ne jamais s' écarter. Pour cette raison j'aime beaucoup votre
,, manière de parvenir directement à la valeur de l' intégrale $\int\frac{\sin.\phi.d\phi}{\phi}$ en la decomposant en une somme d'intégrales
,, prises depuis $\phi=0$ jusqu'à $\phi=\pi$. Ce procedé est,
,, en effet, l' imitation du calcul numerique qu' il faudroit
,, faire pour obtenir les valeurs approchées de l' intégrale entre
,, les limites zéro et l'infini ec. ,,

3. La formola più generale $\int\frac{d\phi\sin.r\phi}{\phi}$ estesa pur essa tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\infty$ si riduce alla precedente. Ha luogo difatti, sempre che sia r una quantità positiva e maggiore di zero, la equazione

$$\left.\begin{matrix}\phi=0\\ \phi=\infty\end{matrix}\right\}\int\frac{d\phi.\sin r\phi}{\phi}=\int\frac{d\phi\sin\phi}{\phi}$$

Per dimostrarla io considero la equazione $y=\frac{\sin.r\phi}{\phi}$. Questa si riferisce ad una curva anguiforme la quale all' origine delle coordinate ortogonali ϕ ed y taglia l' asse y ad una distanza r dall' asse delle φ, intorno al quale serpeggia successivamente tagliandolo nei punti ove $\varphi=\frac{\pi}{r}, \frac{2\pi}{r}, \frac{3\pi}{r}, \frac{4\pi}{r}$ ec. in infinito; essendo π la mezza periferia del circolo di cui l' unità è il raggio. Infinite porzioni decrescenti, alternativamente positive e negative costituiranno le aree comprese tra la curva e l' asse delle ascisse φ; e quelle porzioni saranno rappresentate dalle formole

$$(A) \quad \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \varphi=0 \\ \varphi=\frac{\pi}{r} \end{array}\right\} \int\frac{\sin.r\varphi.d\varphi}{\varphi} \\ \\ \left.\begin{array}{l} \varphi=\frac{\pi}{r} \\ \varphi=\frac{2\pi}{r} \end{array}\right\} \int\frac{\sin.r\varphi.d\varphi}{\varphi} \\ \qquad\qquad\vdots \\ \left.\begin{array}{l} \varphi=\frac{m\pi}{r} \\ \varphi=\frac{(m+1)\pi}{r} \end{array}\right\} \int\frac{\sin.r\varphi\, d\varphi}{\varphi} \\ \qquad\qquad \text{ec.} \end{array}\right.$$

E tutte queste quantità insieme aggiunte è manifesto che comporranno la formola $\int\frac{\sin.r\varphi.d\varphi}{\varphi}$ estesa tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\infty$.

Ora è facile a vedersi che ciascuna di quelle formole è indipendente da r.

Poichè, quanto alla prima, abbiamo integrando indefinitamente,

$$\int\frac{\sin.r\varphi}{\varphi}\,d\varphi=C+r\varphi-\frac{r^3\varphi^3}{2.3.3}+\frac{r^5\varphi^5}{2.3.4.5.5.}-\text{ec.}$$

ove C è una costante arbitraria. Indi si deduce

$$\left.\begin{array}{l}\phi = 0\\ \phi = \frac{\pi}{r}\end{array}\right\}\int \frac{\sin.r\phi}{\phi}\,d\phi = \pi - \frac{\pi^3}{2.3.3} + \frac{\pi^5}{2.3.4.5.5} - \text{ec.}$$

espressione che non dipende da r.

Più generalmente troveremo indipendente da r la formula

$$\left.\begin{array}{l}\phi = \frac{m\pi}{r}\\ \phi = \frac{(m+1)\pi}{r}\end{array}\right\}\int \frac{d\phi \sin.r\phi}{\phi}$$

che esprime il termine generale della serie (A); e quindi sarà pure indipendente da r la formula

$$\left.\begin{array}{l}\phi = 0\\ \phi = \infty\end{array}\right\}\int \frac{d\phi \sin.r\phi}{\phi}$$

che ne rappresenta la somma.

Così rimarrà dimostrata la equazione

$$\left.\begin{array}{l}\phi = 0\\ \phi = \infty\end{array}\right\}\int \frac{d\phi.\sin.r\phi}{\phi} = \int \frac{d\phi \sin.\phi}{\phi}$$

E poichè nel precedente articolo vedemmo essere tra gli indicati limiti $\int \frac{d\phi \sin.\phi}{\phi} = \frac{\pi}{2}$ ne inferiremo per i casi di r positivo maggiore di zero, e tra i limiti stessi

$$\int \frac{d\phi \sin.r\phi}{\phi} = \frac{\pi}{2}.$$

4. A questo stesso modo potrem noi rintracciare le proprietà della formola $\int \frac{d\phi.\cos.r\phi}{\phi}$, estesa tra i limiti $\phi = \omega$, $\phi = \infty$ purchè sia $\omega < \frac{\pi}{2r}$.

Infatti è chiaro che questa formola si compone di una infinità di parti decrescenti, alternativamente positive e negative, e rappresentate dai termini della serie

$$
\text{(B)} \quad \ldots\ldots \left\{
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}\phi = \omega\\ \phi = \frac{\pi}{2r}\end{array}\right\} \displaystyle\int \frac{d\phi . \cos . r\phi}{\phi} \\[3em]
\left.\begin{array}{l}\phi = \frac{\pi}{2r}\\ \phi = \frac{3\pi}{2r}\end{array}\right\} \displaystyle\int \frac{d\phi \cos . r\varphi}{\varphi} \\
\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\left.\begin{array}{l}\phi = \frac{(2m+1)\pi}{2r}\\ \phi = \frac{(2m+3)\pi}{2r}\end{array}\right\} \displaystyle\int \frac{\cos . r\phi . \, d\phi}{\varphi} \\
\qquad\qquad\qquad \text{ec.}
\end{array}\right.
$$

Incominciando dalla seconda di queste è chiaro che tutte queste formole sono indipendenti da r: cosicchè la differenza delle due formole simili $\int \frac{d\phi \cos . r\varphi}{\varphi}$, $\int \frac{d\varphi \cos . r'\varphi}{\varphi}$ estese l'una e l'altra tra i limiti $\phi = \omega$, $\phi = \infty$ sarà rappresentata dalla differenza dei soli primi termini delle due serie che vi corrispondono; l' una delle quali è la serie (B), e l' altra è analoga e corrisponde alla formola $\int d\phi . \frac{\cos . r'\varphi}{\varphi}$.

Avremo dunque

$$
\left.\begin{array}{l}\phi = \omega\\ \phi = \infty\end{array}\right\} \int \frac{\cos . r\varphi - \cos . r'\varphi}{\varphi} \, d\phi = \left\{\begin{array}{l}\phi = \omega\\ \phi = \frac{\pi}{2r}\end{array}\right\} \int d\phi \, \frac{\cos . r\varphi}{\varphi}
$$

$$
- \left\{\begin{array}{l}\phi = \omega\\ \phi = \frac{\pi}{2r'}\end{array}\right\} \int \frac{d\varphi . \cos . r'\varphi}{\varphi}
$$

purchè sia ω minore di $\frac{\pi}{2r}$, e di $\frac{\pi}{2r'}$.

Ora abbiamo, integrando indefinitamente,

$$\int d\phi\,\frac{\cos.r\phi}{\phi} = \mathrm{C} + \log.\phi - \frac{r^2\phi^2}{2.2} + \frac{r^4\phi^4}{2.3.4.4} - \text{ec.}$$

essendo C la costante arbitraria. Sarà dunque tra i limiti $\phi = \omega$, $\phi = \frac{\pi}{2r}$

$$\left.\begin{matrix}\phi=\omega\\ \phi=\frac{\pi}{2r}\end{matrix}\right\}\int\frac{d\phi\cos.r\phi}{\phi} = \log.\frac{\pi}{2} - \log.r - \frac{\pi^2}{2^2.2.2} + \frac{\pi^4}{2^4.2.3.4.4} - \text{ec.}$$

$$-\log.\omega + \frac{\omega^2 r^2}{2.2} - \frac{\omega^4 r^4}{2.3.4.4} + \text{ec.}$$

Quindi sarà ancora

$$\left.\begin{matrix}\phi=\omega\\ \phi=\frac{\pi}{2r}\end{matrix}\right\}\int\frac{d\phi.\cos.r\phi}{\phi} - \left\{\begin{matrix}\phi=\omega\\ \phi=\frac{\pi}{2r'}\end{matrix}\right\}\int\frac{d\phi.\cos.r'\phi}{\phi}$$

$$= \log.\frac{r'}{r} + \omega^2\,\frac{(r^2-r'^2)}{2.2.} - \omega^4\,\frac{(r^4-r'^4)}{2.3.4.4} + \text{ec.}$$

Ma noi osservammo essere

$$\left.\begin{matrix}\phi=\omega\\ \phi=\frac{\pi}{2r}\end{matrix}\right\}\int d\phi\,\frac{\cos.r\phi}{\phi} - \left\{\begin{matrix}\phi=\omega\\ \phi=\frac{\pi}{2r'}\end{matrix}\right\}\int d\phi\,\frac{\cos.r'\phi}{\phi}$$

$$= \left\{\begin{matrix}\phi=\omega\\ \phi=\infty\end{matrix}\right\}\int\frac{(\cos r\phi - \cos.r'\phi)d\phi}{\phi}$$

e pertanto sarà

$$\left.\begin{matrix}\phi=\omega\\ \phi=\infty\end{matrix}\right\}\int\frac{d\phi(\cos.r\phi-\cos.r'\phi)}{\phi} = \log.\frac{r'}{r} + \frac{\omega^2(r^2-r'^2)}{2.2} - \frac{\omega^4(r^4-r'^4)}{2.3.4.4} + \text{ec.}$$

ove ω esser deve minore di $\frac{\pi}{2r}$, e di $\frac{\pi}{2r'}$.

Se supporremo $\omega = 0$ avremo

$$\left.\begin{matrix}\varphi = 0\\ \varphi = \infty\end{matrix}\right\} \int \frac{d\varphi(\cos.r\varphi - \cos.r'\varphi)}{\varphi} = \log.\frac{r'}{r}$$

come è noto.

5. Alla equazione

$$\left.\begin{matrix}\varphi = 0\\ \varphi = \infty\end{matrix}\right\} \int \frac{d\varphi \sin.r\varphi}{\varphi} = \int \frac{d\varphi \sin.\varphi}{\varphi}$$

suol pervenirsi anco nel modo seguente. Posto

$$\left.\begin{matrix}\varphi = 0\\ \varphi = \infty\end{matrix}\right\} \int \frac{d\varphi \sin.r\varphi}{\varphi} = y$$

si ha, differenziando per rapporto ad r

$$\left.\begin{matrix}\varphi = 0\\ \varphi = \infty\end{matrix}\right\} \int \cos.r\varphi.d\varphi = \frac{dy}{dr}$$

Or per un teorema dovuto al Sig. Poisson, la funzione periodica $\left.\begin{matrix}\varphi = 0\\ \varphi = \infty\end{matrix}\right\} \int \cos.r\varphi.d\varphi$ deve riguardarsi $= 0$; come la congenere $\left.\begin{matrix}\varphi = 0\\ \varphi = \infty\end{matrix}\right\} \int \sin.r\varphi.d\varphi$ deve eguagliarsi ad $\frac{1}{r}$ sintanto che sia r positivo e maggiore di zero.

Poichè dunque abbiamo $\frac{dy}{dr} = 0$, sarà $y =$ cost. e quindi

$$\left.\begin{matrix}\varphi = 0\\ \varphi = \infty\end{matrix}\right\} \int \frac{d\varphi \sin.r\varphi}{\varphi} = \text{cost.}$$

D'onde immediatamente si deduce

$$\left.\begin{matrix}\varphi = 0\\ \varphi = \infty\end{matrix}\right\} \int \frac{d\varphi \sin.r\varphi}{\varphi} = \int \frac{d\varphi \sin.\varphi}{\varphi}$$

6. Per dimostrare le formule

$$\left.\begin{matrix}\phi = 0 \\ \phi = \infty\end{matrix}\right\} \int d\phi.\cos.r\phi = 0\ ;\ \int d\phi.\sin.r\phi = \frac{1}{r}$$

sogliono considerarsi le più generali equazioni ambedue dovute ad Euler

$$(C).\ .\left\{\begin{matrix}\left.\begin{matrix}\phi=0 \\ \phi=\infty\end{matrix}\right\} \int e^{-b\phi}\cos.r\phi.\phi^{n-1}d\phi = \dfrac{\cos.nt}{(b^2+r^2)^{\frac{n}{2}}}\int e^{-\phi}\phi^{n-1}d\phi \\ \\ \left.\begin{matrix}\phi=0 \\ \phi=\infty\end{matrix}\right\} \int e^{-b\phi}\sin.r\phi.\phi^{n-1}d\phi = \dfrac{\sin.nt}{(b^2+r^2)^{\frac{n}{2}}}\int e^{-\phi}\phi^{n-1}d\phi\end{matrix}\right.$$

Ove t dinota l'arco della tangente $\frac{b}{r}$. In quelle facendo $b=0$, $n=1$ abbiamo appunto

$$\left.\begin{matrix}\phi = 0 \\ \phi = \infty\end{matrix}\right\} \int \cos.r\phi.\,d\phi = 0$$

$$\left.\begin{matrix}\phi = 0 \\ \phi = \infty\end{matrix}\right\} \int \sin.\,r\phi.\,d\phi = \frac{1}{r}\ .$$

Ma poichè la supposizione di $b=0$ e di $n=1$ possa corispondere ai dati fondamentali che hanno servito alla dimostrazione delle Equazioni (C), sarà necessario di appoggiare questi resultati a qualche nuova considerazione.

Onde giungervi prendiamo ad esaminare generalmente l'integrale $\int d\phi.\mathrm{F}r\phi$ esteso tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\infty$. Sia k una costante indeterminata; e supponghiamo che tra i limiti $\phi=k$, $\phi=\infty$ abbiasi $\int \mathrm{F}r\phi.d\phi=\beta_k$.

È facile il convincersi che l'integrale indefinito della formola differenziale $\int \mathrm{F}r\phi.d\phi$ sarà $\mathrm{C}-\beta_\phi$, C essendo una costante arbitraria, e β_{φ} cioè che β_k diviene se in luogo di k si sostituisca φ.

Per determinare β_k riprendiamo la Equazione

$$\left.\begin{matrix}\varphi=k\\ \varphi=\infty\end{matrix}\right\}\int d\varphi\mathrm{F}r\varphi=\beta_k$$

ed in essa ponendo $\varphi=x+k$ i nuovi limiti saranno $x=0$ $x=\infty$; onde avremo

$$\left.\begin{matrix}x=0\\ x=\infty\end{matrix}\right\}\int dx\,\mathrm{F}r(x+k)=\beta_k$$

sarà dunque ancora

$$\left.\begin{matrix}x=0\\ x=\infty\end{matrix}\right\}\int dx\mathrm{F}r\,(x+\varphi)=\beta_{\varphi}$$

onde per ciò che quì sopra abbiamo notato, l' integrale indefinito della formola differenziale $\mathrm{F}r\varphi.d\varphi$ sarà dato dalla equazione

$$\int\mathrm{F}r\varphi.d\varphi=\mathrm{C}-\left\{\begin{matrix}x=0\\ x=\infty\end{matrix}\right\}\int dx\,\mathrm{F}r(x+\varphi)$$

Or supponghiamo $\mathrm{F}r\varphi=\cos.r\varphi$, ed avremo

$$\int\cos.r\varphi.d\varphi=\mathrm{C}-\left\{\begin{matrix}x=0\\ x=\infty\end{matrix}\right\}\int dx\cos.r(x+\varphi)$$

ovvero

$$\int\cos.r\varphi.d\varphi=\mathrm{C}-\left\{\begin{matrix}x=0\\ x=\infty\end{matrix}\right\}\cos.\,r\varphi\int dx\cos.\,rx$$

$$+\left\{\begin{matrix}x=0\\ x=\infty\end{matrix}\right\}\sin.\,r\varphi\int dx\sin.\,rx$$

Ma si ha $\int\cos.r\varphi d\varphi=\frac{\sin.r\varphi}{r}+\mathrm{C}'$; onde sostituendo, sarà non meno ed identicamente

$$\frac{\sin.r\phi}{r} + C' = C - \left\{\begin{matrix} x = 0 \\ x = \infty \end{matrix}\right\} \cos.r\phi \int dx \cos.rx$$

$$+ \left(\begin{matrix} x = 0 \\ x = \infty \end{matrix}\right) \sin.r\phi \int dx \sin.rx$$

Dovrà essere per tanto $C' = C$, ed anco

$$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ x = \infty \end{matrix}\right\} \int dx \cos.rx = 0$$

$$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ x = \infty \end{matrix}\right\} \int dx \sin.rx = \frac{1}{r}$$

le quali formole trattavasi appunto di dimostrare.

Questo metodo, estendibile a molti analoghi casi nei quali si tratti di funzioni periodiche, può servire a mostrare il legame che unisce alcuni integrali indefiniti ai corrispondenti definiti; i quali senza di ciò comparirebbero indeterminati.

7. Vedemmo già nel precedente Articolo 4. come possa determinarsi il valore dell'integrale

$$\left.\begin{matrix} \phi = 0 \\ \phi = \infty \end{matrix}\right\} \int \frac{\cos.r\phi - \cos.r'\phi}{\phi}\, d\phi$$

e lo trovammo $= \log.\frac{r'}{r}$.

Questa formola non è che un caso speciale di una assai più generale, come apparirà dall'analisi seguente.

Sia data la formola

$$y = \int \frac{F r\phi . d\phi}{\phi}$$

da integrarsi tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \frac{h}{r}$. Differenziando rapporto ad r, noi avremo in riguardo della variabilità del secondo limite,

$$\frac{dy}{dr} = \int F' r\phi . d\phi - \frac{Fh}{r}$$

ove $F'r\phi$ dinota la funzione $\frac{dFr\phi}{dr\phi}$.

Sarà pertanto

$$\frac{dy}{dr} = \frac{Fr\phi}{r} - \frac{Fh}{r}$$

e passando ai limiti, e supponendo che al limite $\phi = 0$ la funzione $Fr\phi$ non divenga infinita, avremo

$$\frac{dy}{dr} = -\frac{F0}{r}$$

E quindi integrando

$$y = -F0 . \log . r + C$$

sarà pertanto

$$\left.\begin{array}{l}\phi = 0\\ \phi = \frac{h}{r}\end{array}\right\} \int \frac{Fr\phi \, d\phi}{\phi} = -F0 . \log . r + C$$

La costante C essendo indipendente da r, noi potremo determinarla per mezzo della stessa formola $\int \frac{Fr\phi . d\phi}{\phi}$ attribuendo ad r un valore particolare. Così se faremo $r = 1$, sarà

$$\left.\begin{array}{l}\phi = 0\\ \phi = h\end{array}\right\} \int \frac{F\phi . d\phi}{\phi} = C$$

onde sarà pure, sostituendo,

$$\left.\begin{matrix}\varphi=0\\ \varphi=\frac{h}{r}\end{matrix}\right\}\int\frac{\mathrm{F}r\varphi.d\varphi}{\varphi}=-\mathrm{Fo}.\log.r+\left\{\begin{matrix}\varphi=0\\ \varphi=h\end{matrix}\right\}\int\frac{\mathrm{F}\varphi.d\varphi}{\varphi}$$

Per un altro valore r' di r avremo parimente

$$\left.\begin{matrix}\varphi=0\\ \varphi=\frac{h}{r'}\end{matrix}\right\}\int\frac{\mathrm{F}r'\varphi.d\varphi}{\varphi}=-\mathrm{Fo}.\log.r'+\left\{\begin{matrix}\varphi=0\\ \varphi=h\end{matrix}\right\}\int\frac{\mathrm{F}\varphi.d\varphi}{\varphi}$$

ovvero, sottraendo,

$$\left.\begin{matrix}\varphi=0\\ \varphi=\frac{h}{r}\end{matrix}\right\}\int\frac{\mathrm{F}r'\varphi.d\varphi}{\varphi}-\left\{\begin{matrix}\varphi=0\\ \varphi=\frac{h}{r'}\end{matrix}\right\}\int\frac{\mathrm{F}r\varphi.d\varphi}{\varphi}=\mathrm{Fo}.\log.\frac{r}{r'}.$$

Se faremo $h=\infty$, sarà

$$\left.\begin{matrix}\varphi=0\\ \varphi=\infty\end{matrix}\right\}\int\frac{\mathrm{F}r'\varphi-\mathrm{F}r\varphi}{\varphi}\,d\varphi=\mathrm{Fo}.\log.\frac{r}{r'}$$

Io comunicai questo risultato al ch. Plana sino dal 1821. Successivamente, e nel giornale della Scuola Politecnica per l'anno 1823 ne ho veduta una dimostrazione dovuta al ch. Cauchy, e dedotta da principj differentissimi dai precedenti.

8. Col metodo quì sopra esposto noi possiam giungere ad altre più generali conseguenze.

Consideriamo la formola $\int\frac{\mathrm{F}r\varphi.d\varphi}{\varphi^2}$, di cui si voglia il valore esteso tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\frac{h}{r}$.

Ponghiamo

$$y=\int\frac{\mathrm{F}r\varphi}{\varphi^2}\,d\varphi$$

avremo differenziando rapporto ad r, ed avuto riguardo alla variabilità del secondo limite,

$$\frac{dy}{dr} = \int \frac{\mathrm{F}r'\phi.d\phi}{\phi} - \frac{\mathrm{F}h}{h}$$

ma per le cose precedenti noi abbiamo tra i limiti $\vec{\varphi}=0$, $\vec{\varphi}=\frac{h}{r}$,

$$\int \frac{\mathrm{F}'r\phi.d\phi}{\phi} = -\mathrm{F}'0.\log.r + \left\{\begin{matrix}\vec{\varphi}=0\\ \vec{\varphi}=h\end{matrix}\right\} \int \frac{\mathrm{F}'\phi.d\phi}{\phi}$$

onde avremo sostituendo

$$\frac{dy}{dr} = \left\{\begin{matrix}\vec{\varphi}=0\\ \vec{\varphi}=h\end{matrix}\right\} \int \frac{\mathrm{F}'\phi.d\phi}{\phi} - \mathrm{F}'0.\log.r - \frac{\mathrm{F}h}{h}$$

ovvero integrando, e poichè

$$y = \left\{\begin{matrix}\vec{\varphi}=0\\ \vec{\varphi}=\frac{h}{r}\end{matrix}\right\} \int \frac{\mathrm{F}r\phi.d\phi}{\phi^2},$$

sarà

$$\left.\begin{matrix}\vec{\varphi}=0\\ \vec{\varphi}=\frac{h}{r}\end{matrix}\right\} \int \frac{\mathrm{F}r\phi.d\phi}{\phi^2} = \left\{\begin{matrix}\vec{\varphi}=0\\ \vec{\varphi}=h\end{matrix}\right\} r\int \frac{\mathrm{F}'\phi.d\phi}{\phi}$$

$$-\mathrm{F}'0.r\,(\log.r - 1) - r\,\frac{\mathrm{F}h}{h} + \mathrm{C}$$

Essendo C una costante indipendente da r. Avremo quindi in egual modo

$$\left.\begin{matrix}\vec{\varphi}=0\\ \vec{\varphi}=\frac{h}{r'}\end{matrix}\right\} \int \frac{\mathrm{F}r'\phi d\phi}{\phi^2} = \left\{\begin{matrix}\vec{\varphi}=0\\ \vec{\varphi}=h\end{matrix}\right\} r'\int \frac{\mathrm{F}'\phi.d\phi}{\phi}$$

$$-\mathrm{F}'0.r'\,(\log.r' - 1) - r'\,\frac{\mathrm{F}h}{h} + \mathrm{C}$$

e sottraendo, otterremo il teorema

$$\left.\begin{matrix}\varphi = 0\\ \varphi = \frac{h}{r}\end{matrix}\right\}\int \frac{\mathrm{F}r\varphi\, d\varphi}{\varphi^2} - \left\{\begin{matrix}\varphi = 0\\ \varphi = \frac{h}{r'}\end{matrix}\right\}\int \frac{\mathrm{F}r'\varphi.d\varphi}{.\varphi^2}$$

$$= \mathrm{F}'0\,[r'(\log.r' - 1) - r(\log.r - 1)]$$

$$+ (r - r')\left[\left(\begin{matrix}\varphi = 0\\ \varphi = h\end{matrix}\right)\int \frac{\mathrm{F}'\varphi.\,d\varphi}{\varphi} - \frac{\mathrm{F}h}{h}\right]$$

Da questo generale risultato potremo inferirne alcun altro più particolare. Così se sia $h = \infty$, avremo immediatamente

$$\left.\begin{matrix}\varphi = 0\\ \varphi = \infty\end{matrix}\right\}\int \frac{\mathrm{F}r\varphi - \mathrm{F}r'\varphi}{\varphi^2}\, d\varphi = \mathrm{F}'0\,[r'(\log.r' - 1) - r(\log.r - 1)]$$

$$+ (r - r')\int \frac{\mathrm{F}'\varphi.\,d\varphi}{\varphi}$$

or sia per ulteriore esemplificazione $\mathrm{F}r\varphi = \cos.r\varphi - 1$. Sarà $\mathrm{F}\varphi = \cos.\varphi - 1$, $\mathrm{F}'0 = 0$, $\mathrm{F}'\varphi = -\sin.\varphi$.

Quindi sostituendo sarà

$$\left.\begin{matrix}\varphi = 0\\ \varphi = \infty\end{matrix}\right\}\int \frac{\cos.r\varphi - \cos.r'\varphi}{\varphi^2}\, d\varphi = -(r - r')\int \frac{\sin.\varphi.d\varphi}{\varphi}$$

Or noi abbiamo tra quei limiti

$$\int \frac{\sin\varphi}{\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

sarà pertanto

$$\left.\begin{matrix}\varphi = 0\\ \varphi = \infty\end{matrix}\right\}\int \frac{\cos.r\varphi - \cos r'\varphi}{\varphi^2}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}(r' - r)$$

risultato importante nella teoria degli integrali definiti, e che il ch. Bidone ottenne il primo per mezzo di considerazioni diverse da queste.

Facciamo per altro esempio

$\mathrm{F}r\varphi = \log.\cos.r\varphi$. Sarà

$$\mathrm{F}\varphi=\log.\cos.\varphi;\ \mathrm{F}'0=0;\ \mathrm{F}'\varphi=-\frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi}$$

quindi sostituendo,

$$\left.\begin{array}{l}\varphi=0\\ \varphi=\infty\end{array}\right\}\int\frac{\log.\cos.r\varphi-\log.\cos.r'\varphi}{\varphi^2}d\varphi=-(r-r')\int\frac{d\varphi\sin.\varphi}{\varphi\cos.\varphi}$$

Ora noi abbiamo, come è noto, tra quei limiti stessi,

$$\int\frac{d\varphi\sin.\varphi}{\varphi\cos.\varphi}=\frac{\pi}{2}$$

sarà dunque

$$\left.\begin{array}{l}\varphi=0\\ \varphi=\infty\end{array}\right\}\int\frac{1}{\varphi^2}\log.\frac{\cos.r\varphi}{\cos.r'\varphi}\,d\varphi=\frac{\pi}{2}(r'-r)$$

Se ne dedurrà tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\infty$

$$\int\frac{\cos.r\varphi-\cos.r'\varphi}{\varphi^2}d\varphi=\int\frac{\log.\cos.r\varphi-\log.\cos.r'\varphi}{\varphi^2}d\varphi$$

Non mi estenderò ad altri esempj, potendo ciascuno da per se stesso supplirvi, non che estendere il precedente metodo ad altri casi in cui la variabile fosse nel denominatore elevata a potenze maggiori.

9. L'analisi di cui ho fatto uso nell'articolo 6. trattando le formole $\int\cos.r\varphi.\,d\varphi$, $\int\sin.\,r\varphi.\,d\varphi$ può qualchè volta applicarsi alla trasformazione di altre formole integrali definite.

Per ridurre ad espressione concisa il principio adoperato nel citato articolo, consideriamo la formola integrale $\int\mathrm{F}x.dx$ che debba principiare con $x=0$.

Sarà generalmente

$$\int\mathrm{F}\,xdx=-\left\{\begin{array}{l}u=0\\ u=\infty\end{array}\right\}\int\Delta\,\mathrm{F}u.\,du$$

ove la differenza finita della funzione Fu, dinotata dal segno ΔFu si referisce ad u, che varia della differenza finita x.

Infatti è manifesto in primo luogo che l' integrale indefinito della formula $Fxdx$ potrà rappresentarsi dalla Equazione

$$\int F\,xdx = C - \left\{ \begin{matrix} u = x \\ u = \infty \end{matrix} \right\} \int Fu.\,du$$

essendo C una costante arbitraria. Onde se vorremo che l'integrale $\int Fx.dx$ cominci con $x = 0$, noi avremo la costante C determinata dalla Equazione

$$0 = C - \left\{ \begin{matrix} u = 0 \\ u = \infty \end{matrix} \right\} \int F\,u.\,du$$

sarà per tanto

$$\int Fxdx = \left\{ \begin{matrix} u = 0 \\ u = \infty \end{matrix} \right\} \int Fu.du - \left\{ \begin{matrix} u = x \\ u = \infty \end{matrix} \right\} \int Fu.du$$

ma si ha identicamente

$$\left. \begin{matrix} u = x \\ u = \infty \end{matrix} \right\} \int Fu.du = \left\{ \begin{matrix} u = 0 \\ u = \infty \end{matrix} \right\} \int F(u + x)\,dx$$

onde sostituendo

$$\int Fxdx = \left\{ \begin{matrix} u = 0 \\ u = \infty \end{matrix} \right\} \int Fu.du - \left\{ \begin{matrix} u = 0 \\ u = \infty \end{matrix} \right\} \int F(u + x)\,du$$

ovvero più concisamente

$$\int Fxdx = - \left\{ \begin{matrix} u = 0 \\ u = \infty \end{matrix} \right\} \int \Delta Fu.\,du$$

come sopra.

Facciasi per esempio

$$Fx = e^{-x} \frac{\sin.cx}{x}$$

e proponghiamo di trasformare con la formola precedente l'integrale $\int\frac{e^{-x}\sin.cx}{x}dx$, esteso da $x=0$ sino ad $x=b$ essendo b una costante qualunque. Noi avremo

$$\left.\begin{matrix}x=0\\x=b\end{matrix}\right\}\int\frac{e^{-x}\sin.cxdx}{x}=\int\frac{e^{-u}\sin.cudu}{u}-e^{-b}\cos.cb\int\frac{\sin.cu.du.e^{-u}}{u+b}$$

$$-e^{-b}\sin.cb\int\frac{\cos.cu.du.e^{-u}}{u+b}$$

ove nel secondo membro gli integrali devono estendersi da $u=0$, sino ad $u=\infty$.

10. L'equazione precedente si trasforma immediatamente nella seguente:

$$\left.\begin{matrix}x=0\\x=b\end{matrix}\right\}\int\frac{e^{-x}\sin.oxdx}{x}=\int\frac{e^{-\frac{u}{c}}\sin.u.du}{u}-e^{-b}\cos.cb\int\frac{e^{-\frac{u}{c}}\sin.udu}{u+bc}$$

$$-e^{-b}\sin.cb\int\frac{e^{-\frac{u}{c}}\cos.u.du}{u+bc}$$

ove nel secondo membro i limiti sono $u=0$, $u=\infty$.

Quindi si deduce che relativamente all' accrescimento indefinito di c il limite dell' integrale

$$\left.\begin{matrix}x=0\\x=b\end{matrix}\right\}\int\frac{e^{-x}\sin.cx.dx}{x}$$

sarà

$$\left.\begin{matrix}u=0\\u=\infty\end{matrix}\right\}\int\frac{\sin.udu}{u}=\frac{\pi}{2}$$

Noi troveremmo nelle circostanze stesse

$$\left.\begin{matrix}x=0\\x=b\end{matrix}\right\}\int\frac{e^{x}\sin.cxdx}{x}=\frac{\pi}{2}$$

Or noi abbiamo, incominciando gli integrali da $h=0$,

$$\int e^{h}\cos.hx.dh = e^{h}\,\frac{(x\sin.hx+\cos.hx)}{1+x^{2}} - \frac{1}{1+x^{2}}\;.$$

$$\int e^{-h}\cos.hx.dh = e^{-h}\,\frac{(x\sin.hx-\cos.hx)}{1+x^{2}} + \frac{1}{1+x^{2}}\;.$$

Se da ambe le parti noi moltiplicheremo per dx, sarà prendendo gli integrali in modo che svaniscano per $x=0$,

$$e^{h}\int\frac{(x\sin.hx+\cos.hx)}{1+x^{2}}\,dx = \text{Arc. tang}.x + \int\frac{e^{h}\sin.hxdh}{h}\,,$$

$$e^{-h}\int\frac{(x\sin.hx-\cos.hx)}{1+x^{2}}\,dx = -\,\text{Arc.tang}.x + \int\frac{e^{-h}\sin.hxdh}{h}$$

ove gli integrali rapporto ad x si estendono sino ad x qualunque, e gli integrali rapporto ad h sino ad h qualunque pur essi.

Se supporremo h infinita avremo dalla seconda equazione

$$\left.\begin{matrix}h=0\\ h=\infty\end{matrix}\right\}\int\frac{e^{-h}\sin.hxdh}{h} = \text{Arc. tang}.x$$

Se vorremo invece supporre x infinita, noi osserveremo primieramente che per quanto di sopra avvertimmo si ha quando sia x infinita,

$$\int\frac{e^{h}\sin.hxdh}{h} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int\frac{e^{-h}\sin.hxdh}{h} = \frac{\pi}{2}$$

cosicchè le equazioni precedenti diverranno:

$$\left.\begin{matrix}x=0\\ x=\infty\end{matrix}\right\}\; e^{h}\int\frac{(x\sin.hx+\cos.hx)dx}{1+x^{2}} = \pi$$

$$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ x = \infty \end{matrix}\right\} \; e^{-h} \int \frac{(x\sin.hx - \cos.hx)dx}{1+x^2} = 0$$

onde trarremo

$$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ x = \infty \end{matrix}\right\} \; \int \frac{\cos.hx \, dx}{1+x^2} = \int \frac{x\sin.hx \, dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \;\; e^{-h}$$

come è noto.

MEMORIA

SOPRA UN CORDOMETRO ED UN TONOMETRO

DEL SIGNOR

PAOLO ANANIA DE LUCA

RICEVUTA IN GIUGNO MDCCCXXVII.

PRESENTATA DAL SOCIO SIGNOR ARCIPRETE

D. GIUSEPPE MARIA GIOVENE

ED APPROVATA DAL SOCIO SIGNOR PROFESSORE

GIOVANNI BATTISTA AMICI.

Professare l'arte musicale senza conoscere la tonometria, è lo stesso che professare l'architettura privo delle cognizioni geometriche. Ciò non ostante, mentre l'arte di misurare le quantità di tuono sembra perfezionata, possono chiamarsi fortunati que' Professori di musica che l'ignorano affatto. Quelli fra costoro che hanno voluto avvicinarla, non ne hanno riportato se non confusione e false idee. Ecco perchè in questo ramo di scibile l'arte si trova tuttavia divisa dalla scienza: ecco perchè la musica giace ancora nell'anarchia dell'empirismo: ecco perchè si vede stazionaria sulla strada del suo perfezionamento.

Noi ci siamo occupati d'indagare e rimovere le cagioni di tanto male. La speranza di aver colpito lo scopo ci anima a sottomettere il nostro lavoro alla censura de' dotti. Se costoro il troveranno fornito delle qualità necessarie, non ci resta che a farne un regalo agli artisti ed agli amatori del ramo musicale. Se il crederanno meritevole di emendazione, protestiamo anticipatamente la nostra riconoscenza verso tutti coloro che ci faranno rimarcare i falli commessi. Se poi il trovassero affatto indegno di comparire fra le produzioni di questo secolo, si ricordino che, essendoci noi proposto il far del bene, non ci tocca la stessa penale di coloro che si propongono il far del buono.

Tutti i sistemi di musica possono ridursi a due soli: uno proveniente dalla scala naturale, l'altro dalla temperata. Per conoscere le quantità tonometriche del primo si ricorre al calcolo de' rotti; per conoscere quelle del secondo è necessario far uso de' logaritmi. I professori di musica ordinariamente ignorano questi due modi di calcolare; ma non è difficile vincere un tale ostacolo con poche lezioni; mentre tutti conoscono per lo meno il calcolo degl'interi. Supponiamo dunque che i nostri allievi si trovino alla portata di valersi de' rotti e de' logaritmi: potranno essi con questi soli mezzi acquistare un'idea chiara ed esatta delle quantità di tuono? No certamente.

Portiamoci sul tonometro, e cerchiamo di formarci un' idea chiara delle sole quantità che offre la scala cromatica naturale. Noi troveremo a prima vista che le quantità in questione vengono espresse dalle seguenti lunghezze di corda $1 : \frac{24}{25} : \frac{15}{16} : \frac{9}{10} : \frac{8}{9} : \frac{125}{144} : \frac{108}{125} : \frac{64}{75} : \frac{5}{6} : \frac{4}{5} : \frac{25}{32} : \frac{3}{4} : \frac{18}{25} : \frac{25}{36} : \frac{2}{3} : \frac{16}{25} : \frac{5}{8} : \frac{3}{5} : \frac{75}{128} : \frac{125}{216} : \frac{72}{125} : \frac{9}{16} : \frac{5}{9} : \frac{8}{15} : \frac{25}{48} : \frac{1}{2}$: Fino a che tutte queste frazioni non avranno uno stesso denominatore, non potranno somministrarci se non delle idee isolate, riferibili alla sola totalità della corda, ed insuscettibili di esser paragonate fra loro. Troviamo dunque questo comune denominatore. Eccolo 361^5, 102068^4, 154368^3, 000000^2, 000000^1, 000000! La semplice pronunzia di questo numero non basta da se sola a spaventare e confondere qualunque privilegiato intelletto? Qual'idea chiara ed esatta potrebbe acquistarsi delle quantità di tuono risultanti da cosiffatta quantità di corda?... Bisogna dunque convenire che il calcolo de' rotti può, e deve servirci per determinare esattamente le quantità di corda appartenenti alle scale naturali, ma non potrà darci giammai un'idea chiara ed esatta delle quantità di tuono che da quelle risultano

Passiamo alla scala cromatica temperata. Quì sparisce un inconveniente e ne sorge un altro. Quì non si tratta di formarsi un' idea chiara ed esatta delle quantità di tuono: questa sorge naturalmente dalla stessa ipotesi, la quale suppone l' intervallo di ottava diviso in dodici parti eguali. La difficoltà cade sulle quantità di corda, che debbono produrre queste dodici parti eguali di tuono, propriamente dette semituoni temperati. Non sono più i rotti che possono rappresentare tali quantità di corda, sono bensì de' numeri irrazionali: sono undici medie geometricamente proporzionali, che giacciono tra l' integrità e la metà della corda. Come faremo dunque per conoscere i rapporti esatti che passano tra le quantità naturali e le temperate? L'espediente è facile. L'insigne Sauveur l'aveva di già adottato nel suo sistema generale pubblicato nel 1701, tra le Memorie dell'Accademia Reale di Parigi. Egli aveva divisa l' ottava in 300 medie geometriche, le quali unite alla totalità ed alla metà della corda costituivano una scala composta di 301 ettameridi, applicabile a tutti i sistemi ed a tutti gli stromenti musicali.

Questa scala però conteneva due difetti essenzialissimi. Primieramente non essendo divisibile per dodici non poteva servire alla tonometria della scala temperata: secondariamente non vi si potevano riportare tutte le gradazioni della scala naturale, senza di uno slogamento sensibile, pel calcolo almeno se non per l' orecchio. Noi, dopo non brevi ricerche, abbiamo trovato che, per allontanare questi difetti, bisognava adottare come minimo comun divisore di tutti i sistemi possibili la 612.^{a} parte dell' ottava. Quindi abbiamo divisa la nostra scala tonometrica in 612 intervalli, che per la loro picciolezza abbiamo chiamati *Microcommi*.

Ma una sola scala può mai servirci per indicare tanto le quantità di tuono quanto quelle di corda? Ecco l'impossibile. Quando trattiamo del tuono, l'intervallo fra 2 ed 1 deve essere diviso in 612 parti eguali, e quando trattiamo della corda bisogna dividerlo in 612 parti geometricamente proporzionali. Quindi la massima imperfezione della tonometria consiste nel pretendere che le scale destinate a misurare le quantità di corda, ci dieno una idea chiara ed esatta delle quantità di tuono a quelle relative. Quindi quell' istrumento che finora è stato impropriamente chiamato *Tonometro* merita il suo vero nome qual' è quello di *Cordometro;* e merita tutte le rettificazioni non ottenute finora, perchè guardato sotto di un diverso aspetto. Quindi le scuole acustiche e musicali mancano tuttavia di un *Tonometro*. Quindi, restando così le cose, la tonometrìa non potrà giammai fornire tutti que' dati, che sono necessarii ad un uomo di genio per formarsi un sistema d' idee generali, e stabilire una teoria acustica per codice della pratica musicale.

Penetrati da queste verità ci siamo occupati ad escogitare e costruire due istrumenti: uno col nome di *Cordometro* l'altro con quello di *Tonometro*. Entrambi hanno la loro scala di 612. microcommi analogamente divisa; ed entrambi si corrispondono in modo da potersi risolvere sull' uno qualunque problema dato sull'altro, senza bisogno di calcolo e senza pericolo di errore alcuno. Noi ne faremo rilevare i vantaggi quando parleremo della loro applicazione agli usi necessarii. Intanto ci si permetta che, nel farne la descrizione, aggiungiamo a questa il metodo tenuto nel costruirli; acciò tanto gli Scienziati, quanto gli Artisti e gli Artefici possano giudicare del merito degli ostacoli da noi incontrati, e de' ripieghi di cui ci siamo valuti per sormontarli.

CORDOMETRO

La cassa di questo instrumento è di forma prismatica rettangolare, larga quattro pollici e mezzo, alta cinque, e lunga tre piedi e nove pollici. I laterali sono tutti di massiccio e secchissimo noce. Il di sopra è ricoperto da una sottilissima tavoletta di acero, e vi si osservano quattro scanalature longitudinali a giorno, le quali, partendo dal capo-tasto, corrono fino alla metà dell'istrumento. Il di sotto corrispondente a queste scanalature è sfondato; il resto è chiuso da una tavola anche di noce. Tutto l'interno non forma che una sola anima.

Nella parte superiore delle due testate vi sono due piastrine di ottone fatte a squadra, e bene assettate sul legno. Una è trapassata ed inchiodata da quattro pernetti di ottone, che servono a ritenere uno de' capi delle corde; l'altra serve di armatura a quattro viti di richiamo, che sono destinate a ritenere e tendere le corde medesime dall'altro capo.

Queste quattro corde eguali nella materia, nel peso e nella lunghezza, riposano orizzontalmente, e nello stesso piano sopra un capotasto ed un ponticello fisso, entrambi di ebano, eguali d'altezza, paralleli tra loro, e distanti un metro l'uno dall'altro.

A poca distanza dal ponticello fisso, vi è un castelletto, che porta quattro martellini di bosso, destinati ad eccitare le rispettive corde al moto vibratorio, mediante quattro pometti che tengono luogo di tastiera.

Le corde occupano la parte media dello strumento, in guisa che vengono a cadere perfettamente sul mezzo delle quattro scanalature, per le quali scorrono quattro ponticelli mobili, destinati a limitare la lunghezza delle corde, senza alterare menomamente la loro direzione.

Questi ponticelli mobili sono formati da un cilindretto traforato di cocco, alto quanto il capo-tasto, e leggermente concavo dalla parte superiore: una pallina egualmente di cocco, trapassata da due fili di minugia (i quali, dopo aver abbracciato la corda e trapassato il cilindretto, sostengono il peso di un mattoncello di piombo) serve a completarne il meccanismo.

Sull'orlo laterale alle scanalature si trovano due scale incise in ottone. Una è la scala cordometrica generale divisa ne' corrispondenti 612 microcommi, colle indicazioni analoghe a tutti gl' intervalli possibili, tanto delle scale naturali quanto delle temperate. L' altra contiene quella sola parte della prima che riguarda l' accordo temperato degli strumenti a tasto fisso, come gravicembali, organi ec.

Verso la metà dell' istrumento si trova un altro meccanismo destinato ad assicurarsi che la totalità delle corde conserva l'unissono, nell' atto che si trovano divise in parti diseguali da ponticelli mobili, onde non rimanga dubbio alcuno sull' esattezza delle esperienze, e delle applicazioni cui l' istrumento è destinato.

Ma perchè dare una preferenza esclusiva a tutte queste particolarità di costruzione? Risponderemo subito.

Essendo indispensabile il saggiare contemporaneamente l' effetto di più tuoni, onde potersi formare un' idea esatta e materiale degli accordi, era indispensabile benanche che il cordometro fosse tetracordo, e non già monocordo come l'antico tonometro; quindi la necessità di ottenere quattro corde le quali, messe una volta all'unissono, fossero rimaste permanentemente in tale stato. Non potevamo servirci de' pesi tendenti per mezzo di carrucole, perchè le anomalie provenienti dalla rigidezza della corda incarrucolata e dallo sfregamento degli assi, rendevano variabile l'effetto della forza de' pesi; facendo l' istrumento verticale, non avremmo potuto servirci delle pinzette, essendo impossibile di stabilirne quattro sullo stesso piano, senza incorrere in una complicazione incomoda e soggetta ad altri non piccoli inconvenienti. Ricorremmo quindi al ripiego delle viti di richiamo; questo espediente però richiedeva la soluzione di un altro difficile problema; quello cioè di rendere inalterabile le distanze tra i pernetti che ritenevano i due estremi delle corde. Incominciammo perciò dal congegnare la cassa in modo che tutte le fibre delle sue parti, senza escluderne le testate, si trovassero nella direzione delle corde, ed ottenemmo così una base inalterabile nella sua lunghezza alle variazioni del caldo e dell' umido; costruimmo i pernetti di richiamo in modo da non poter soffrire veruno slogamento dalla trazione delle corde o da qualunque altra diversa cagione; conficcammo i pernetti stabili profondamente e forzatamente nel massiccio del legno, dopo averli fatti passare, anche forzatamente, per la piastrina di ottone messa a squadra, acciò non cedessero dalla parte della trazione, facendo piaga nel legno.

Dietro queste precauzioni abbiamo ottenuto tanta inalterabilità, che da sei anni a questa parte, le quattro corde conservano ancora il loro perfetto unissono, non ostante che l'istrumento siasi trovato spesso in balia de' facchini, per esser trasportato da un' abitazione in un' altra.

I ponticelli mobili erano opposti direttamente all' esattezza somma che noi volevamo nel cordometro. O questi si facevano dell' altezza medesima del capo-tasto e del ponticello fisso, e non sarebbero stati sufficienti per dare al suono la chiarezza e la precisione necessaria; o si portavano ad un'altezza maggiore, e le corde sarebbero state forzate a descrivere un angolo che avrebbe aumentata la loro tensione. Escogitammo i ponticelli mobili da noi descritti, ma questi ci presentarono un altro terribile scoglio. I mattoncelli di piombo facendo gravitare fortemente i cilindretti sopra i tre listelli che separano le quattro scanalature, richiedevano che questi listelli fossero molto più profondi che larghi. Il legno non era indicato per questo lavoro, perchè inabilitato a curvarsi nella profondità, si sarebbe curvato lateralmente, con sommo danno del parallelismo indispensabile tra le corde e le scanalature. Le verghe metalliche si opponevano alla inalterabilità della lunghezza; bisognava dunque trovare un altro espediente, e fu questo. Prendemmo delle sottili e secche assicelle di faggio, e dopo averle ben piallate ed esiccate al forno, le passammo alla trafila fino alla grossezza di circa un terzo di linea; allora riscaldate di nuovo fortemente le abbiamo incollate l' una sull' altra fino alla spessezza necessaria, e così abbiamo ottenuto delle verghe composte di legno talmente rigide ed inalterabili, che avendo con esse formati i tre listelli, non vi abbiamo ancora osservata veruna minima alterazione.

Ma i ponticelli mobili, trovandosi ad una certa distanza dalle scale, abbisognavano di una norma per esser messi con precisione alle determinate distanze dal capo-tasto. Quì la stessa disposizione delle parti ci somministrò prontamente un facile e comodo ripiego: essendo i fianchi dello strumento paralleli fra loro ed alle corde, non bisognò che costruire una picciola squadra di ottone, fatta a martello, e con un battente dalla parte della testa. Applicando questo battente contro uno de' fianchi del cordometro, e facendo correre un lembo della squadra fino al grado cordometrico che si richiede, i ponticelli portati fino al contatto di questo lembo determinano eguali lunghezze di corda.

Restava ancora un certo voto nel nostro spirito circa gli accidenti imprevedibili che avessero potuto alterare lo stato unissono delle corde, nell'atto che i ponticelli mobili si trovavano distribuiti in diverse distanze. Riportare i ponticelli al capo-tasto, sarebbe stato lo stesso che assicurarsi dell'esattezza de' dati dopo fatta l'esperienza; oltrecchè sarebbe stato di sommo impaccio il fare andare e venire i ponticelli in ogni esperienza, mentre la maggior parte di queste richiede la mossa di un solo ponticello. Ecco perchè ci piacque aggiungervi un meccanismo mediante il quale, mentre i ponticelli si trovano nella loro posizione qualunque, noi possiamo assicurarci che la totalità delle corde si trova costantemente all' unissono. Questo meccanismo è stabilito sugli stessi principii de' ponticelli mobili, e differisce solamente per essere un sol ponte che limita ad un tratto quattro eguali porzioni di corda. Se queste quattro porzioni si trovano all'unissono è chiaro che le corde intere debbono esserlo egualmente.

Non ci resta che a parlare della scala generale, giacchè dicemmo esser l'altra un semplice estratto della prima. Prendemmo il numero 100,000 come rappresentante la totalità della corda, e ci servimmo della edizione stereotipa delle tavole di Callet per determinare la progressione geometrica corrispondente ai 612 microcommi di questa scala. Fin quì la cosa era facilissima: non si trattava che di farsi una legge per serbare le dovute proporzioni, e questa legge esisteva bella e fatta nel più perfetto codice del mondo. Ma l'esatta applicazione di questa legge! Ecco il veprajo.

Dividere un metro in centomila parti, vale dividere un millimetro in cento porzioni. Qual occhio, qual mano, qual compasso, qual bulino può cimentarsi a tale operazione? Intanto non potevamo arbitrarci a sostituire un numero meno forte perchè sarebbe sparita quella esattezza matematica, che i dotti avean diritto di richiedere in un lavoro di questa natura. Ci risolvemmo quindi ad immaginare ed eseguire una macchina mediante la quale avremmo potuto tener conto benanche de' quarti di centomillesima se mai ci fosse stato necessario. Con questa macchina che divide ed incide da se sola, in tutte le proporzioni che si richieggono, dividemmo la nostra scala cordometrica ne' corrispondenti microcommi. Ne' margini di essa scala, oltre la numerazione de' microcommi per decine e mezze decine, vi si trovano marcati benanche tutti i gradi delle scale naturali e temperate, colle corrispondenti frazioni, indicazioni ec.

TONOMETRO.

Per avere una scala tonometrica corrispondente all'indicata, bastava dividere una linea qualunque in 612 parti eguali, e contrassegnarla colle stesse indicazioni. Ciò non ostante trovammo vantaggioso che la lunghezza di questa fosse eguale a quella della cordometrica; tanto per favorire il passaggio materiale delle idee dall'una all'altra, quanto perchè con questa lunghezza i microcommi venivano ad occupare il minimo spazio compatibile colla maggior chiarezza delle divisioni.

Osservammo però che questa scala non poteva limitarsi come la prima ad una sola ottava; mentre in questo caso non sarebbe stata applicabile alle dimostrazioni de' cicli delle consonanze, della necessità degli accidenti e del modo onde distribuirli, del sistema massimo de' Greci, delle successioni degli accordi, e di tanti altri problemi e teoremi che riguardano un intervallo maggiore dell'ottava. Allungarla di vantaggio sarebbe stato lo stesso, che farle perdere quell'unico colpo d' occhio che è tanto giovevole negli strumenti di tal fatta: diminuire i microcommi era un impossibile; bisognò quindi ripiegare. Invece di far la scala retta la facemmo circolare.

Ecco perchè il tonometro consiste in un quadrante di ottone di nove pollici di diametro, in mezzo al quale gira concentricamente un disco di ferro largo sette pollici; ma il piano di questo è inferiore a quello del quadrante di circa un quarto di linea, corrispondente alla spessezza di un altro disco di cartoncino, che deve esservi sovraimposto.

La scala è tracciata sul lembo interno del quadrante, sull' esterno sono contrassegnate le corrispondenti indicazioni. Il grado zero coincide col 612.°

Nel centro del disco vi è un buco, per lo quale passano i perni destinati a tener fermo il *Rappresentante*.

I rappresentanti, così detti perchè rappresentano le quantità di tuono che vogliono misurarsi, consistono in tanti dischi di cartoncino eguali in larghezza a quello di ferro, ed in grossezza alla differenza che passa fra il livello del quadrante e quello del disco.

I perni sono due: uno con testa piana ed analogamente centrato e segnato, onde poter descrivere facilmente su i rappresentanti de' cerchi concentrici, o delle spirali secondo occorre: l'altro termina con un bottone, ed è destinato per tutte le altre operazioni, tranne le due indicate. La punta di entrambi termina a vite, onde poterli stringere e fissare con una chiocciola sul disco.

In fine vi sono due alidade staccate dall' istrumento, e destinate a tirare sui rappresentanti de' raggi corrispondenti alle gradazioni del quadrante.

Premessa questa descrizione è facile il concepire.

1.° Che ogni cerchio segnato su di un rappresentante figura come un intervallo di ottava, diviso in quelle parti che si vuole dall' intersezione de' raggi, che vanno a finire sulla scala del quadrante, e che noi chiameremo *dati*.

2.° Che molti cerchi concentrici coi rispettivi dati mettono sotto un colpo d' occhio i diversi rapporti, che possano avere fra loro diverse ottave diversamente divise.

3.° Che nello stesso modo due o più giri di spirale possono rappresentare due o più ottave di seguito.

4.° Che quando trattasi di una o due ottave solamente, possono segnarsi su i rappresentanti le intere portate musicali colle corrispondenti note, e così mettersi in un contatto immediato l'idea dell'essenza delle note con quella delle quantità di tuono che rappresentano.

5.° Che facendo girare il rappresentante, gli stessi dati possono esser sottoposti a tutte le analisi e le sintesi possibili, dalle sole indicazioni del quadrante.

A questo modo il nostro tonometro può servire senza limite alcuno a tutti i quesiti non solo della tonometria astratta, ma benanche dell' applicazione di questa all' armonia ed alla melodia.

Vogliamo formarci un' idea chiara ed esatta de' sistemi musicali de' Greci, degli Egizii, degli Arabi, de' Cinesi, de' Turchi, de' Persiani, di Guido, di Sauveur, di Lemme Rossi e tanti altri? Vogliamo conoscere a colpo d' occhio, e con ogni precisione cosa sia il sistema moderno diatonico, cromatico, enarmonico, o misto? naturale o temperato? Vogliamo guardar da vicino e nella loro essenza i tanti tetracordi di Pittagora, Aristosseno, Didimo, Archita, Tolommeo, Eratostene ec? Vogliamo considerar nettamente il merito de' pentacordi, degli esacordi, degli ettacordi, e de' tetracordi congiunti o disgiunti? Non dobbiamo che tracciare i nostri dati su di un rappresentante, e lasciare all' occhio ed alla mano il compiere il resto.

Trattasi di sommare, dividere, sottrarre o moltiplicare un intervallo qualunque, immaginario o indicato dal cordometro? Basta metterne i dati sul rappresentante perchè l'operazione sia fatta con una semplice mossa di mano.

Si vuol conoscere la necessità degli accidenti, il perchè dell' ordine loro, l' uso da farsene senza abusarne? Basta segnare una scala diatonica sopra di un rappresentante, e considerare successivamente ciascun grado come tonico.

Sarà questione sull'origine della scala naturale, sull'inversione delle consonanze e dissonanze, sul prodotto de' cicli che da queste risultano? Basta un rappresentante destinato all' oggetto.

Vorrà sapersi del merito de' diversi accordi, della loro originalità o derivazione, della loro posizione retta, rovesciata o confusa? Non bisogna che un analogo rappresentante.

In somma coll' ajuto del nostro tonometro un allievo qualunque può apprendere a colpo d'occhio e nettamente tutto quello che un Professore peritissimo nelle matematiche non può concepire se non astrattamente, isolatamente, con molta pena, ed in moltissimo tempo: circostanze che riunite insieme portano immancabilmente secoloro la confusione e la noja.

Il tonometro dunque è l'unico mezzo per acquistare tutte le cognizioni relative alle quantità di tuono considerate nel loro vero essere. Ma come si fa per passare alla testimonianza dell' udito? Basta volgersi dal tonometro al cordometro. Quella stessa quantità di commi, che ha servito per vedere e considerare l'effettiva quantità di tuono nel primo, servirà per sentirla e considerarla nell'altro. In questo invece di segnare i dati sul rappresentante, condurremo i ponticelli mobili alle corrispondenti distanze, e toccheremo le corrisponti corde.

Ci si potrebbe obbiettare che per avere un' esatta reciprocanza tra il tonometro ed il cordometro, bisognerebbe che anche quest' ultimo fosse indeterminato nella lunghezza della scala e nel numero delle corde. Questa obbiezione non sarebbe nè giusta nè a proposito; non tutte le cose abbisognano dello stesso grado di perfezione; ciò che forma la perfezione del tonometro formerebbe una imbarazzante superfluità nel cordometro. Tra gli usi cui quest' ultimo è destinato, vi è quello di poter accordare con esso tutti gli strumenti a tastiera, come organi, gravicembali ec. secondo qualunque sistema, e colla semplice pratica di saper mettere due corde all' unissono. Quindi tutte le volte che si tratta di sentire l'effetto melodico di più d'una ottava, o l'armonico di più di quattro corde, se non troviamo nel cordometro un' estensione corrispondente, vi troviamo in sua vece il mezzo facilissimo da sentire l'effetto richiesto da un gravicembalo qualunque: nell' atto che se del cordometro volesse farsene benanche un gravicembalo, non si potrebbe se non a costo di tutte le altre qualità che gli sono indispensabili, e che sono compatibili solamente colla sua semplicità.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA PRIMA.

Fig.ª 1.ª N.° 1.° Cordometro veduto dalla parte superiore, e ridotto alla sedicesima parte della sua effettiva grandezza. I ponticelli mobili sono disposti per dare l'accordo perfetto. Il meccanismo per assicurarsi che le corde sono all'unissono non è in azione. Le due scale mancano delle corrispondenti divisioni ed indicazioni, attesa la loro picciolezza.

Fig.ª 1.ª N.° 2.° Taglio verticale del Cordometro. Vi si vede allo scoperto un ponticello mobile. Il meccanismo per assicurarsi che le corde sono all'unissono è nella sua posizione attiva.

Fig.ª 2.ª N.° 1.° e 2.° Squadra per determinare le distanze de' ponticelli mobili, veduta di faccia e di lato.

Fig.ª 3. N.° 1.° Taglio verticale di tutto il meccanismo di un

Tav III

Fig 3 Num 2

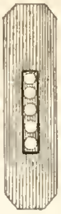
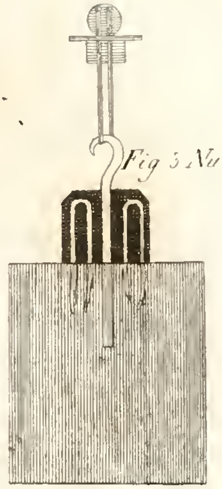
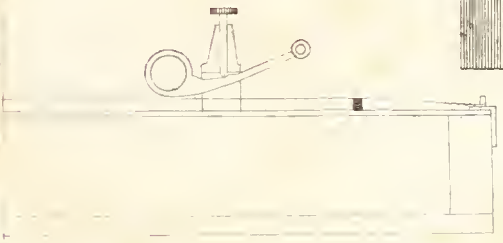
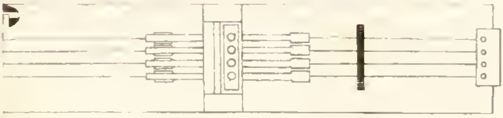


Fig 3 Nu 1







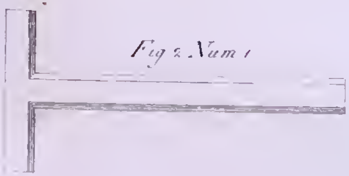


Fig 2 Num 1

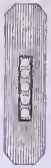


Fig 3 Num 2

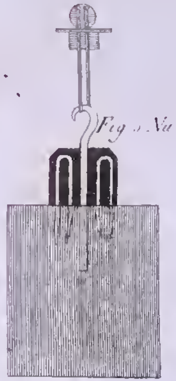


Fig 3 Nu 1

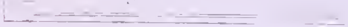


Fig 2 Num 2

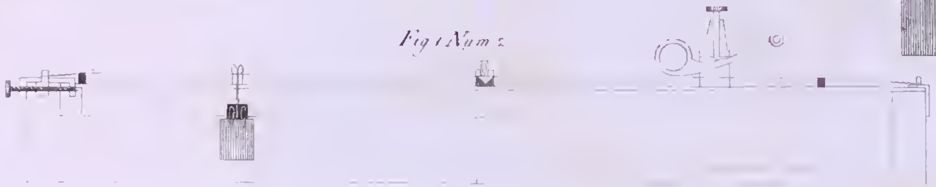


Fig 1 Num 2

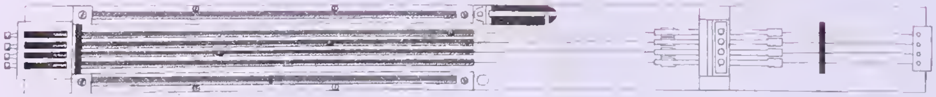


Fig 1 Num 1

Tav IV

Fig 4.

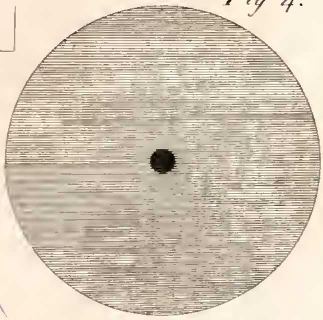


Fig 7. Num. 1

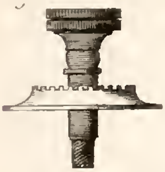
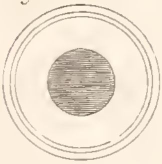


Fig. 7 Num. 2.



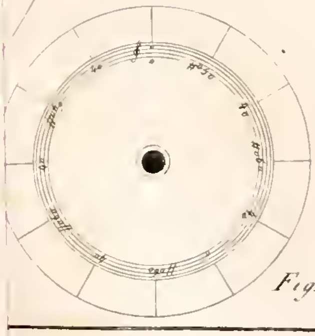


Fig. 10.

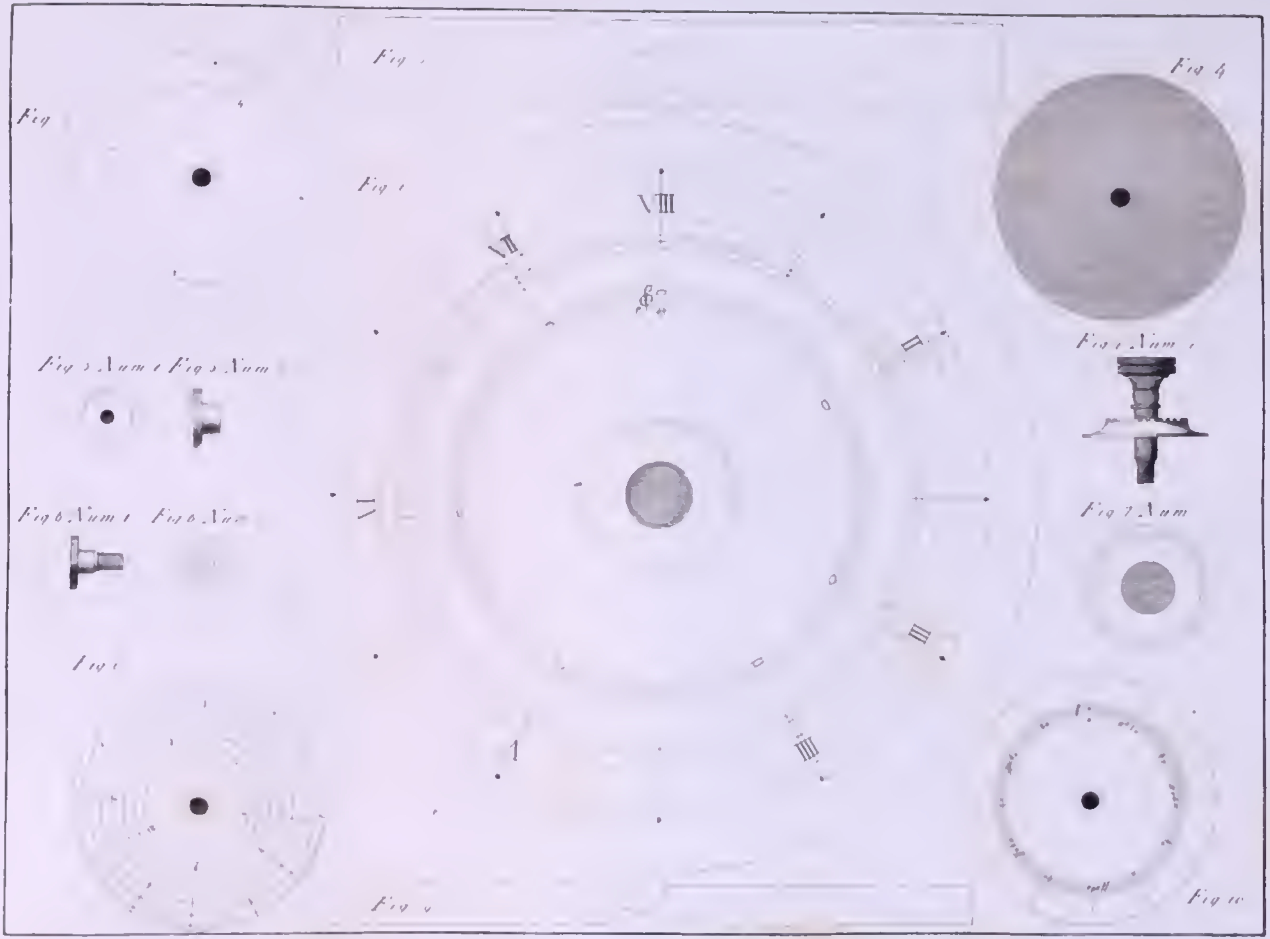


Fig 3
Fig 2
Fig 1
Fig 4
VIII
VII
II
III
IIII
I
VI
Fig 5 Num 1
Fig 5 Num 2
Fig 6 Num 1
Fig 6 Num 2
Fig 7 Num 1
Fig 7 Num 2
Fig 8
Fig 9
Fig 10

ponticello mobile. Vi si vede l'uncinetto del mattoncello di piombo in mezzo a due altri pezzetti di ottone ricoperti di velluto, i quali servono per impedire al mattoncello il moto di rotazione, senza nuocere alla nettezza del suono.

Fig.ª 3.ª N.° 2.° Taglio orizzontale del mattoncello suddetto.

Spiegazione della Tavola Seconda.

Fig.ª 1.ª Tonometro ridotto a un quarto della sua grandezza. Vi si vede applicato un rappresentante destinato alle dimostrazioni relative alla scala diatonica naturale.

Fig.ª 2.ª 8.ª 10.ª Tre altri rappresentanti, ridotti alla quarta parte del loro diametro, e destinati a dimostrare rispettivamente quanto concerne il ciclo delle terze minori, il ciclo delle quinte, e la scala cromatica temperata.

Fig.ª 4.ª Disco di ferro, sul quale si adattano i rappresentanti, ridotto anch' esso alla quarta parte del suo diametro.

Fig.ª 6.ª N.° 1.° e 2.° Perno destinato a tracciare i cerchi e le spirali sopra i rappresentanti, veduto di lato e di fronte.

Fig.ª 7.ª N.° 1.° e 2.° Prospetto e profilo del perno che termina a bottone, e che serve a far girare i rappresentanti in mezzo al quadrante del tonometro.

Fig.ª 5.ª N.° 1.° e 2.° Prospetto e profilo della chiocciola destinata a fermare i rappresentanti sul disco di ferro, mediante uno de' due indicati perni.

Fig.ª 2.ª e 9.ª Alidade destinate a tracciare i dati sopra i rappresentanti. La prima è fatta per girare intorno al perno a bottone, la seconda per girare intorno all' altro perno.

SULLE SUPERFICIE GENERABILI DAL MOVIMENTO DI UNA LINEA PIANA QUALUNQUE

MEMORIA

DEL DOTT. GASPARE MAINARDI

SUPPLENTE ALLA CATTEDRA DI MATEMATICA PURA ELEMENTARE

NELL' I. R. UNIVERSITÀ DI PAVIA

PRESENTATA DAL SOCIO

SIGNOR PROFESSORE CONFIGLIACHI

IL XX SETTEMBRE MDCCCXXIX.

ED APPROVATA DAL SOCIO

SIGNOR PROFESSOR MAGISTRINI

Se una linea piana si move nello spazio, e nello stesso tempo varia di grandezza con qualsivoglia legge, genera una superfice tale, che la sua estensione e quella dei solidi terminati da essa comprendono, pressochè tutte le grandezze geometriche delle quali finora si è stabilita la misura. Infatti variando la natura di quella curva, e moderando diversamente le leggi del suo movimento, potranno venir generate le superficie coniche, cilindriche, anulari, le superficie gobbe, quelle del secondo ordine, le superficie sviluppabili, e simili.

Quando poi la linea generatrice è retta, un punto il quale scorra lungo della medesima con legge determinata, descriverà nello spazio una curva la quale, per rispetto ad un altra che dirigga il movimento di quella retta, potrà rappresentare molte di quelle linee la cui importanza attrasse maggiormente l'attenzione dei geometri. Per tal modo infatti potranno venir generate le evolventi ed evolute di Huyghens e di Monge, le curve parallele di Leibnitz, le linee dei centri osculatori, quelle di curvatura sferica ecc.

Nella presente memoria per me si svolge questo importante argomento; cioè si offrono le formole per descrivere e misurare le estensioni nominate, qualunque siasi la legge della loro generazione, quindi percorrendo i casi particolari della maggiore importanza, si ottengono i risultamenti noti ed altri ancora che forse mi si devono interamente. Tali sono, a cagion d'esempio, le espressioni della estensione e curvatura delle evolventi ed evolute, della linea dei centri osculatori, e dell' evoluta per il piano di una linea data qualunque: alcune relazioni semplici che regnano fra lo spigolo di regresso di una superficie sviluppabile ed una linea qualunque tracciata in essa, d'onde si desume l'equazione delle linee brevissime di quella superficie, la quale equazione si riduce alle quadrature; poi si ricavano la famosa teoria delle sviluppate di Monge, e gli eleganti teoremi di Lancret. Finalmente si dà una nuova estensione al famoso teorema di Guldino, cioè si generalizza la regola insegnata da Archimede per misurare la solidità del cono ordinario.

Avrei potuto applicare le formole trovate in questa memoria a molte ricerche particolari, ma la quantità delle medesime e la prolissità di alcuni calcoli mi hanno determinato a fare di queste l'argomento di un altro lavoro, che mi farò sollecito di pubblicare.

PARTE PRIMA.

DELLE SUPERFICIE GENERATE DAL MOVIMENTO DI UNA LINEA RETTA

PROPOSIZIONE PRIMA.

Una retta si mova nello spazio in maniera che un punto individuato di essa percorra una linea data, o roti intorno a questo punto con legge determinata qualunque, e nello stesso tempo un punto scorra lungo la retta generatrice pure con data legge: mi propongo di trovare le equazioni della superficie e della linea che vengono generate dal movimento di quella retta e di quel punto.

I punti e le estensioni che mi occorrerà di considerare in appresso, le supporrò riferite a tre assi ortogonali Gx, Gy, Gz; colla traccia Gg rappresento una curva qualunque cui sia tangente l' asse Gx; con MG la retta generatrice considerata nella posizione primitiva, e con MP, PQ, GQ le coordinate del punto M. Si conduca la retta MQ, e si suppongano Ang.°$MGQ = b$, Ang.°$MQP=\omega$. Fingiamo poi che movendosi la retta GM, il punto G della medesima scorra lungo la curva Gg, e tragga seco gli assi coordinati, per modo che l' asse Gx sia sempre tangente alla curva diretrice Gg, ed il piano yGz non roti intorno a quell'asse. Giunto l'estremo G in g ed M in m, supponghiamo che gli angoli, b, ω divengano rispettivamente $b+a$, $\omega+\theta$; ove considereremo a, θ quali funzioni determinate della lunghezza dell' arco Gg.

Ponghiamo quest' arco $Gg=s$, $gm=m$, e chiamiamo x, y, z le coordinate del punto m; p, q, r quelle del punto g; e finalmente rappresentate con gx'' la retta tangente in g la curva Gg, con gx' la sua projezione sul piano delle rette gx, gz rispettivamente parallele agli assi Gx, Gz; supponiamo Ang.°$xgx' = h$, Ang.°$x'gx''= k$. Ciò posto immagino condotta pel punto G una retta $GM'=m$ per la quale le coordinate del punto M' siano $M'P'=z''$, $P'Q'=y''$, $GQ'=x''$, Ang.°$M'Gx=b+a$, Ang.°$M'Q'P'=\omega+\theta$; e scrivendo per brevità ω ed a in luogo di $\omega+\theta$, $a+b$ avremo

$$x''= m\cos.a,\ y''= m\,\text{sen}.a\cos.\omega,\ z''= m\,\text{sen}.a\,\text{sen}.\omega$$

Fingiamo ora che il sistema delle rette Gx, Gy, Gz, GM' si disponga in maniera che il punto G cada in g, l' asse Gx si adatti a gx'', nè accada rotazione intorno al punto G. È chiaro che la retta GM' si confonderà colla generatrice gm, e le coordinate del punto m per rispetto a questi assi saranno x'', y'', z''. Ciò posto l'asse Gx considerato in questa posizione si mova ora nel piano $x''gx'$ traendo seco gli altri due finchè si adatti alla retta gx', senza però che accada rotazione intorno ad esso, e supposte x', y', z', le coordinate del punto m rispetto agli assi primitivi Gx ec. considerati in questa terza posizione, avremo facilmente

$$x' = x''\cos.k - y''\text{sen}.k,\ y' = x''\text{sen}.k + y''\cos.k,\ z' = z''.$$

Supponghiamo per ultimo che gli assi Gx ec. vengano rimossi ancora dalla terza posizione, l'asse gx' si avvicini a gx nel piano xgx', finchè si confonda con esso, e tragga con se gli altri due assi senza altro moto di questi. Siccome $x-p$, $y-q$, $z-r$ sono le coordinate del punto m rispetto a quest' ultimo sistema di assi, quindi avremo

$$x-p = x'\cos.h - z'\text{sen}.h,\ y-q = y',\ z-r = x'\text{sen}.h + z'\cos.h.$$

Eliminando ora dalle equazioni trovate le quantità x', y' ec. x'' ec. si avranno

$$\begin{aligned} x &= p + m\cos.\alpha\cos.h\cos.k - m\,\text{sen}.\alpha(\text{sen}.h\,\text{sen}.\omega + \cos.h\,\text{sen}.k\cos.\omega)\\ (1)\quad y &= q + m\cos.\alpha\,\text{sen}.k + m\,\text{sen}.\alpha\cos.k\cos.\omega\\ z &= r + m\cos.\alpha\,\text{sen}.h\cos.k - m\,\text{sen}.\alpha(\text{sen}.h\,\text{sen}.k\cos.\omega - \cos.h\,\text{sen}.\omega)\end{aligned}$$

ove gli angoli h, e k si determinano mediante le equazioni

$$(2)\qquad \cos.h\cos.k = \left(\frac{dp}{ds}\right),\ \text{sen}.h\cos.k = \left(\frac{dr}{ds}\right),\ \text{sen}.k = \left(\frac{dq}{ds}\right).$$

Ora tutte le volte che le quantità p, q, r, α ed ω saranno date in funzione di s, eliminando m, ed s da quelle equazioni, la risultante rappresenterà la superficie generata dalla retta GM. Se poi il punto M scorre lungo la retta generatrice, espressa la lunghezza variabile m in funzione di s, eliminando dalle equazioni (1) questa quantità s, si avranno due risultanti dalle quali verrà rappresentata la linea descritta da quel punto.

Per indicare con un esempio facile e comune l' uso di quelle formole, fingiamo che si voglia trovare l'equazione della superficie generata da una retta, la quale si appoggia costantemente sopra altre tre rette date. L'asse Gx sia una di queste direttrici, l' asse Gy sia il prolungamento della minima distanza di quella retta e di un altra direttrice, le cui equazioni siano $x=\mathrm{A}z$, $y=\mathrm{D}$; e supponghiamo la terza direttrice rappresentata dalle equazioni $x'=\mathrm{M}z'+\mathrm{N}$, $y'=\mathrm{P}z'+\mathrm{Q}$. Supposto nel caso presente, che la linea Gg sia lo stesso asse Gx, avremo $q=0$, $r=0$, $h=0$, $k=0$ e le equazioni (1) forniranno

$$x=p+m\cos.\alpha,\ y=m\,\mathrm{sen}.\alpha\cos.\omega,\ z=m\,\mathrm{sen}.\alpha\,\mathrm{sen}.\omega$$

quindi indicando con m, m' le parti della retta generatrice intercette fra l' asse Gx ed ognuna delle altre due direttrici avremo

$$p+m\cos.\alpha=\mathrm{A}m\,\mathrm{sen}.\alpha\,\mathrm{sen}.\omega,\quad m\,\mathrm{sen}.\alpha\cos.\omega=\mathrm{D}$$

$$p+m'\cos.\alpha=\mathrm{M}m'\mathrm{sen}.\alpha\,\mathrm{sen}.\omega+\mathrm{N},$$

$$m'\mathrm{sen}.\alpha\cos.\omega=\mathrm{P}m'\mathrm{sen}.\alpha\,\mathrm{sen}.\omega+\mathrm{Q}.$$

Eliminando ora m ed m' si ottengono

$$p\cos.\omega\,\mathrm{sen}.\alpha=\mathrm{D}(\mathrm{A}\,\mathrm{sen}.\omega\,\mathrm{sen}.\alpha-\cos\alpha),$$

$$(p-\mathrm{N})(\cos.\omega-\mathrm{P}\,\mathrm{sen}.\omega)\mathrm{sen}.\alpha=\mathrm{Q}(\mathrm{M}\,\mathrm{sen}.\omega\,\mathrm{sen}.a-\cos.\alpha),$$

e siccome $\mathrm{tang}.\omega=\frac{z}{y}$, $\cos.\alpha=\frac{x-p}{m}$, $m=\sqrt{}((x-p)^2+y^2+z^2)$ quelle equazioni si trasformano nelle seguenti,

$$p(y-\mathrm{D})=\mathrm{D}(\mathrm{A}z-x),\ (p-\mathrm{N})(y-\mathrm{P}z)=\mathrm{Q}(\mathrm{M}z-x+p)$$

da cui eliminata p si ottiene per la superficie di cui si tratta, la seguente equazione

$$[\mathrm{D}(\mathrm{A}z-x)-\mathrm{N}(y-\mathrm{D})](y-\mathrm{P}z)=\mathrm{Q}[(\mathrm{M}z-x)(y-\mathrm{D})+\mathrm{D}(\mathrm{A}z-x)].$$

Mediante le nostre equazioni si risolvono molte questioni relative alla superficie considerata, sulle quali però non ci dobbiamo trattenere.

PROPOSIZIONE SECONDA

SI DOMANDA LA LUNGHEZZA DELLA LINEA CONSIDERATA NELLA PROPOSIZIONE ANTECEDENTE.

Formando le derivate, per rispetto ad s delle equazioni (1), nell' ipotesi che m sia funzione di questa variabile, ed indicando cogli apici quelle derivate che non si possono effettuare, secondo il metodo delle funzioni analitiche di Lagrange, si ottengono

$$x' = \left\{ \begin{array}{l} \cos.h\cos.k + mh'(\text{sen}.\alpha\,\text{sen}.h\,\text{sen}.k\cos.\omega - \text{sen}.\alpha\cos.h\,\text{sen}.\omega \\ -\cos.\alpha\,\text{sen}.h\cos.k) - mk'(\text{sen}.\alpha\cos.h\cos.k\cos.\omega + \cos.\alpha\cos.h\,\text{sen}.k) \\ + m\theta'\text{sen}.\alpha(\cos.h\,\text{sen}.k\,\text{sen}\,\omega - \text{sen}.h\cos.\omega) + \frac{m'}{m}(x - p) \\ - m\alpha'[\text{sen}.\alpha\cos.h\cos.k + \cos.\alpha(\text{sen}.h\,\text{sen}.\omega + \cos.h\,\text{sen}.k\cos.\omega)] \end{array} \right\}$$

$$(3) \quad \begin{array}{l} y' = \text{sen}.k + mk'(\cos.\alpha\cos.k - \text{sen}.\alpha\,\text{sen}.k\cos.\omega) - m\theta'\text{sen}.\alpha\cos.k\,\text{sen}.\omega \\ + \frac{m'}{m}(y - q) - m\alpha'(\text{sen}.\alpha\,\text{sen}.k - \cos.\alpha\cos.k\cos.\omega) \end{array}$$

$$z' = \left\{ \begin{array}{l} \text{sen}.h\cos.k + mh'(\cos.\alpha\cos.h\cos.k - \text{sen}.\alpha\cos.h\,\text{sen}.k\cos.\omega \\ - \text{sen}.\alpha\,\text{sen}.h\,\text{sen}.\omega) - mk'(\cos.\alpha\,\text{sen}.h\,\text{sen}.k + \text{sen}.\alpha\,\text{sen}.h\cos.k\cos.\omega) \\ + m\theta'\text{sen}.\alpha(\text{sen}.h\,\text{sen}.k\,\text{sen}.\omega + \cos.h\cos.\omega) + \frac{m'}{m}(z - r) \\ - m\alpha'[\text{sen}.\alpha\,\text{sen}.h\cos.k + \cos.\alpha(\text{sen}.h\,\text{sen}.k\cos.\omega - \cos.h\,\text{sen}.\omega)] \end{array} \right\}$$

Rappresentando ora con v la parte della linea cercata compresa fra i punti M ed m, quadrando le equazioni (3), poi sommandole avremo

$$v'^2=\left\{\begin{array}{l} 1+m^2h'^2[(\cos.\alpha\cos.k-\mathrm{sen}.\alpha\,\mathrm{sen}.k\cos.\omega)^2+\mathrm{sen}.^2\alpha\,\mathrm{sen}.^2\omega] \\ +m^2k'^2(1-\mathrm{sen}.^2\alpha\,\mathrm{sen}.^2\omega)+m^2\theta'^2\mathrm{sen}.^2\alpha-2mh'\mathrm{sen}.\alpha\cos.k\,\mathrm{sen}.\omega \\ -2mk'\mathrm{sen}.\alpha\cos.\omega+2m^2h'k'\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\omega(\mathrm{sen}.\alpha\cos.k\cos.\omega+\cos.\alpha\,\mathrm{sen}.k) \\ -2m^2\theta'h'\mathrm{sen}.\alpha(\mathrm{sen}.\alpha\,\mathrm{sen}.k-\cos.\alpha\cos.k\cos.\omega) \\ -2m^2\theta'k'\mathrm{sen}.\alpha\cos.\alpha\,\mathrm{sen}.\omega+m'^2+m^2\alpha'^2+2(m\cos.\alpha') \\ +\,2m^2\alpha'(h'\cos.k\,\mathrm{sen}.\omega+k'\cos.\omega) \end{array}\right\}$$

da cui, dopo alcune facili riduzioni, si deduce

$$\begin{array}{ll} & v'^2=[\mathrm{sen}.\alpha-m(\alpha'+h'\cos.k\,\mathrm{sen}.\omega+k'\cos.\omega)]^2 \\ (4) & +m^2[\theta'\mathrm{sen}.\alpha-k'\cos.\alpha\,\mathrm{sen}\omega.-k'(\mathrm{sen}.\alpha\,\mathrm{sen}.k-\cos.\alpha\cos.k\cos.\omega)]^2 \\ & +(\,m'\cos.\alpha\,)^2 \end{array}$$

PROPOSIZIONE TERZA.

Proponiamoci di determinare la tangente ed il raggio osculatore la linea considerata nella proposizione seconda, corrispondenti ad un punto individuato qualunque della medesima linea.

Formando le derivate per rispetto ad s delle equazioni (2) si ottengono

$$p''=-h'\mathrm{sen}.h\cos.k-k'\cos.h\,\mathrm{sen}.k,\quad q''=k'\cos.k,$$
$$r''=h'\cos.h\cos.k-k'\mathrm{sen}.h\,\mathrm{sen}.k$$

$$\begin{array}{l} p'''=-h''\mathrm{sen}.h\cos.k-k''\cos.h\,\mathrm{sen}.k-(h'^2+k'^2)\cos.h\cos.k \\ \quad+\,2h'k'\mathrm{sen}.h\,\mathrm{sen}.k \end{array}$$

$$q'''=k''\cos.k-k'^2\mathrm{sen}.k$$

$$\begin{array}{l} r'''=h''\cos.h\cos.k-k''\mathrm{sen}.h\,\mathrm{sen}.k-(h'^2+k'^2)\mathrm{sen}.h\cos.k \\ \quad-\,2h'k'\cos.h\,\mathrm{sen}.k \end{array}$$

da cui si desumono

$$p'q''-p''q'=h'\text{sen.}h\,\text{sen.}k\cos.k+k'\cos.h,\quad r'p''-r''p'=-h'\cos.^2k,$$

$$q'r''-q''r'=h'\cos.h\,\text{sen.}k\cos.k-k'\text{sen.}h.$$

Indicato poi con R il raggio osculatore; con e', i' le derivate degli angoli di prima e seconda flessione della curva Gg, avremo

$$\frac{1}{R^2}=p''^2+q''^2+r''^2=k'^2+h'^2\cos.^2k$$

$$e'^2i'=(p'q''-p''q')r'''+(r'p''-r''p')q'''+(q'r''-q''r')\,p'''$$

$$=(h''k'-h'k'')\cos.k-(2k'^2+h'^2\cos.^2k)h'\text{sen.}k.$$

Ciò posto, essendo $\frac{x-p}{m}$, $\frac{y-q}{m}$, $\frac{z-r}{m}$ i coseni degli angoli compresi dalla retta m e dagli assi coordinati, ed Rp'', Rq'', Rr'' le quantità analoghe per la retta R; rappresentando col simbolo R.m l' angolo compreso da quelle linee, con ms.Rs l'inclinazione dei piani che passano l'uno lungo le rette m ed s; l'altro lungo le rette R ed s; della quale indicazione userò sempre in appresso; si avrà

$$(5)\qquad \cos.R.m=\frac{R}{m}\,[p''(x-p)+q''(y-q)+r''(z-r)]$$

$$=R\,\text{sen.}\alpha\,(h'\cos.k\,\text{sen.}\omega+k'\cos.\omega),$$

e dalla trigonometria sferica avremo

$$\cos.R.m=\text{sen.}\alpha\cos.ms.Rs.$$

Siccome poi, indicato con m.Rs l' angolo formato dalle rette m col piano Rs si ha

$$\cos.^2m.Rs=\cos.^2\alpha+\cos.^2R.m,\ \text{onde}\ \text{sen.}^2m.Rs=\text{sen.}^2\alpha\cos.^2R.m,$$

quindi avremo

$$(6)\qquad \text{sen.}m.Rs=R\,\text{sen.}\alpha(k'\text{sen.}\omega-h'\cos.k\cos.\omega)$$

Ciò premesso, osserviamo che le equazioni dei piani i quali si segano lungo la retta m, e passano rispettivamente per le tangenti le curve s e v sono

$$[r'(y-q)-q'(z-r)](\mathrm{P}-p)+[p'(z-r)-r'(x-p)]$$
$$\times(\mathrm{Q}-q)+[q'(x-p)-p'(y-q)](\mathrm{R}-r)=0$$

$$[z'(y-q)-y'(z-r)](\mathrm{X}-x)+[x'(z-r)-z'(x-p)]$$
$$\times(\mathrm{Y}-y)+[y'(x-p)-x'(y-q)](\mathrm{Z}-z)=0$$

purchè P, Q ecc. X, ecc. rappresentino le coordinate di un punto qualunque dell'uno e dell'altro piano, avremo quindi il coseno dell'angolo compreso dai piani medesimi, cioè

$$\cos.\,mv.\,ms=$$

$$\frac{[r'(y-q)-q'(z-r)][z'(y-q)-y'(z-r)]+[p'(z-r)-r'(x-p)][x'(z-r)-z'(x-p)]+\text{ec.}}{\sqrt{[[r'(y-q)-q')(z-r)]^2+[p'(z-r)-r'(x-p)]^2+\text{ec.}]}\sqrt{[(z'(y-q)-y'(z-r))^2+(x'(z-r)-z'(x-p))^2+\text{ec.}]}}$$

Ora il numeratore si riduce facilmente alla quantità che segue

$$(p'x'+q'y'+r'z')[(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2]-[x'(x-p)+y'(y-q)$$
$$+z'(z-r)][p'(x-p)+q'(y-q)+r'(z-r)]$$

ed essendo

$$(x-p)p'+(y-q)q'+(z-r)r'=m\cos.\alpha,$$

$$p'x'+q'y'+r'z'=1+(m\cos.a)'-m\,\text{sen}.\alpha(h'\cos.k\,\text{sen}.\;+k'\cos.\omega),$$

e dall'equazione $(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=m^2$, cavandosi

$$(x-p)x'+(y-q)y'+(z-r)z'=m(m'+\cos.\alpha)$$

il detto numeratore si ridurrà ad

$$m^2\,\text{sen}.\alpha[\text{sen}.\alpha-m(a'+h'\cos.k\,\text{sen}.\omega+k'\cos.\omega)];$$

siccome pei

$$[r'(y-q)-q'(z-r)]^2+[p'(z-r)-r'(x-p)]^2+\text{ ec.}$$
$$=m^2(p'^2+q'^2+r'^2)-[p'(x-p)+q'(y-q)+r'(z-r)]^2=m^2\text{sen.}^2\alpha;$$
$$[z'(y-q)-y'(z-r)]^2+[x'(z-r)-z'(x-p)]^2+\text{ ec.}$$
$$=m^2(x'^2+y'^2+z'^2)-[x'(x-p)+y'(y-q)+z'(z-r)]^2$$
$$=m^2[v'^2-(m'+\cos.\alpha)^2]$$

avremo, per ultimo sostituendo

$$\cos.mv.ms=\frac{\text{sen }\alpha-m(\alpha'+h'\cos.k\text{sen}.\omega+k'\cos.\omega}{\sqrt{[v'^2-(m'\cos.\alpha)^2]}}\,.$$

Essendo poi

$$\cos.m.v=\frac{1}{mv'}[x'(x-p)+y'(y-q)+z'(z-r)]$$

avremo la seguente equazione

$$(7)\qquad v'.\cos.m.v=m'+\cos.\alpha$$

e quindi sarà

$$(8)\qquad v'\text{sen}.m.v.\cos.mv.ms=\text{sen}.\alpha-m(\alpha'+h'\cos.k\text{sen}.\omega+k'\cos.\omega)$$

Così siccome

$$v'.\cos.v.s=p'x'+q'y'+r'z'=1+(m\cos.\alpha)'$$
$$-m\text{sen}.\alpha(h\cos.k\text{sen}.\omega+k'\cos.\omega),\text{ sarà}$$

$$(9)\qquad v'.\cos.v.s=1+(m\cos.\alpha)'-\frac{m}{R}\cos.R.m.$$

L' equazione del piano osculatore la curva Mm nel punto m è la seguente

$$(y'z''-y''z')(X-x)+(z'x''-z''x')(Y-y)+(x'y''-x''y')(Z-z)=0$$

ove X, Y, Z rappresentano le coordinate di qualsivoglia punto di quel piano. Dunque indicando con ρ il raggio osculatore di quella curva, avremo

$$\cos.mv.\,\rho v =$$

$$\frac{[z'(y-q)-y'(z-r)](y'z''-y''z')+[x'(z-r)-z'(x-p)](z'x''-z''x')+[y'(x-p)-x'(y-q)](x'y''-x''y')}{[\sqrt{(z'(y-q)-y'(z-r))^2+(x'(z-r)-z'(x-p))^2+ec.}\,.\sqrt{[(y'z''-y''z')^2+(z'x''-z''x')^2+ec.}]},$$

ma il numeratore del secondo membro non è altro che

$$[\,x'(x-p)+y'(y-q)+z'(z-r)\,](x'x''+y'y''+z'z'')$$
$$-\;x''(x-p)+y''(y-q)+z''(z-r)](x'^2+y'^2+z'^2),$$

e siccome formando la derivata per rispetto ad s dell' equazione

$$x'(x-p)+y'(y-q)+z'(z-r)=m(m'+\cos.\alpha) \quad \text{si ha}$$

$$x''(x-p)+y''(y-q)+z''(z-r)=\tfrac{1}{2}(m^2)''+2(m\cos.\alpha)'$$
$$+1-v'^2-m\,\text{sen}.\alpha(h'\cos.k\,\text{sen}.\omega+k'\cos\omega),$$

e sono inoltre

$$\sqrt{[(y'z''-y''z')^2+(z'x''-z''x')^2+\text{ec.}]}=\frac{v'^3}{\rho},$$

$$\sqrt{[(z'(y-q)-y'(z-r))^2+(x'(z-r)-z'(x-p))^2+\text{ec.}}=mv'\text{sen}.m.v,$$

per conseguenza sostituendo avremo

$$(10)\qquad \frac{m\,v'^3}{\rho}\,\text{sen}.m.v.\cos.mv.\rho v=m(m'+\cos.\alpha)v''-v'[\tfrac{1}{2}(m^2)''$$
$$+2(m\cos.\alpha)'+1-v'^2-m\,\text{sen}.\alpha(h'\cos.k\,\text{sen}.\omega+k'\cos.\omega)]$$

ove $\text{sen}.m.v.\cos.mv.\rho v=\cos.m.\rho$, come risulta dalla trigonometria sferica.

La ricerca diretta del raggio osculatore ρ conduce mediante calcoli prolissi ad un risultamento complicato. Possiamo per altro ottenerne il valore col seguente processo di calcolo, che indicherò soltanto, mentre sebbene sia più spedito del primo, pure la formola risultante è del pari complicata.

L' equazione di un piano che passa per l' origine delle coordinate ed è parallelo alle rette tangenti le curve v ed s nei loro estremi variabili e corrispondenti, è della forma seguente

$$Z(q'x'-p'y')+Y(p'z'-r'x')+X(r'y'-q'z')=0$$

ove X, Y, Z rappresentano le coordinate di un suo punto qualunque.

Sarà per conseguenza

$$\cos.pv.\,vs=\frac{(q'x'-p'y')(x'y''-x''y')+(p'z'-r'x')(z'x''-z''x')+(r'y'-q'z')(y'z''-y''z')}{\frac{v'^3}{\rho}\sqrt{[(q'x'-p'y')^2+(p'z'-r'x')^2+(r'y'-q'z')^2]}}\,.$$

Ora il numeratore del secondo membro non è altro se non se

$$(p'x''+q'y''+r'z'')(x'^2+y'^2+z'^2)-(x'x''+y'y''+z'z'')(p'x'+q'y'+r'z'),$$

e siccome mediante le formole riferite disopra si trova

$$p''x'+q''y'+r''z'=m(k'^2+h'^2\cos.^2k)\cos.\alpha+(h'\cos.k\,\text{sen}.\omega+k'\cos.\omega)\times$$
$$[(m\,\text{sen}.\alpha)'+m(\theta'-h'\text{sen}.k)\text{sen}.\alpha],$$

perciò formando la derivata per rispetto ad s dell'equazione

$$p'x'+q'y'+r'z'=1+(m\cos.\alpha)'-m\,\text{sen}.\alpha(h'\cos.k\,\text{sen}.\omega+k'\cos.\omega)$$

si otterrà il valore del trinomio $p'x''+q'y''+r'z''$, e quindi quello della frazione che si considera. Avremo poi anche quello del denominatore osservando che

$$(p'y'-q'x')^2+(r'x'-p'z')^2+(q'z'-r'y')^2=(p'^2+q'^2+r'^2)(x'^2+y'^2+z'^2)$$
$$-(p'x'+q'y'+r'z')^2.$$

Cerchiamo ora cos.$mv.vs$, e siccome sono date le equazioni dei piani mv, e vs si avrà

$$\cos.mv.vs = \frac{(q'x'-p'y')[y'(x-p)-x'(y-q)]+(p'z'-r'x')[x'(z-r)-z'(x-p)]+(r'y'-q'z')[z'(y-q)-y'(z-r)]}{mv.\text{sen}.m.v\sqrt{[(q'x'-p'y')^2+(p'z'-r'x')^2+(r'y'-q'z')^2]}},$$

Ora il numeratore del secondo membro non è altro che

$$(p'x'+q'y'+r'z')[x'(x-p)+y'(y-q)+z'(z-r)]-(x'^2+y'^2+z'^2)$$
$$[p'(x-p)+q'(y-q)+r'(z-r)]$$

la quale espressione è formata di quantità totalmente conosciute.

Posto tutto ciò supponghiamo $\cos.\rho v.vs=\rho.A$, $\cos\,\rho v.vm=\rho.B$, $\cos.mv.vs=C$, e siccome $\text{Ang.}^\circ mv.vs=\text{Ang.}^\circ\rho v.vm-\text{Ang.}^\circ\rho v.vs$ avremo $\rho^2=\frac{1-C^2}{A^2+B^2-2ABC}$.

Determinato così il valore di ρ si avrà immediatamente la posizione del piano osculatore; e quindi si conoscerà tutto quanto ci siamo proposti di trovare.

Corollarj. Se la retta m movendosi si conserva tangente alla curva direttrice Gg, siccome $a=0$, $b=0$ avremo dall'equazione (7) $v'.\cos.v.s=1+m'$, e dall'equazione (4) $v'^2=(1+m')^2+\frac{m^2}{R^2}$ per cui sarà $v'.\text{sen}.v.s=\frac{m}{R}$

Se inoltre fingiamo $\text{Ang.}^\circ v.s=90.^\circ$ saranno $1+m'=0$ e $v'=\frac{m}{R}$.

Se poi nella ipotesi di $a=0$, $b=0$ vuolsi che la lunghezza della retta m sia costante, avremo $v'.\cos.v.s=1$, $v'^2=\frac{m^2+R^2}{R^2}$, d'onde si ricava $m=R\,\text{tang}.v.s$

Se la generatrice sarà ovunque normale alla curva Gg che ne dirigge il movimento, supposti $a=0$, $b=90^\circ$, avremo dalla formola (7) $v'\cos.m.v=m'$, e dalla (9) $v'\cos.v.s=\frac{R-m\cos.R.m}{R}$. La prima ne insegna che essendo m costante sarà $\text{Ang.}^\circ m.v=90^\circ$ e viceversa: e supponendo nella seconda $\text{Ang.}^\circ v.s=0$, nel qual caso le curve v ed s sono parallele, si avrà la nota relazione che regna fra gli archi corrispondenti di due curve di questa specie.

PROPOSIZIONE QUARTA.

Nella superficie generata dal movimento di una linea retta, che quì si considera, immaginiamo un poligono mistilineo qualunque, e proponiamoci di trovarne la quadratura. Chiamerò S la parte di quella superficie compresa fra un arco qualunque s della curva direttrice, dalle rette generatrici che passano per gli estremi di quell'arco, e da una linea qualunque Mm tracciata in quella superficie. Rappresenterò con x, y, z le coordinate di un punto m di questa linea arbitraria, con v la sua lunghezza, e chiamata n la parte della retta generatrice compresa fra il punto m e la curva Gg, avremo

$$\left(\frac{d^2S}{dv.dn}\right)=\sqrt{\left[\left\{\left(\frac{dx}{dv}\right)\left(\frac{dy}{dn}\right)-\left(\frac{dy}{dv}\right)\left(\frac{dx}{dn}\right)\right\}^2+\left\{\left(\frac{dy}{dv}\right)\left(\frac{dz}{dn}\right)-\left(\frac{dz}{dv}\right)\left(\frac{dy}{dn}\right)\right\}^2\right.}$$

$$\left.+\left\{\left(\frac{dz}{dv}\right)\left(\frac{dx}{dn}\right)-\left(\frac{dx}{dv}\right)\left(\frac{dz}{dn}\right)\right\}^2\right],$$

Siccome poi le derivate $\left(\frac{dx}{dv}\right)$, $\left(\frac{dy}{dv}\right)$, $\left(\frac{dz}{dv}\right)$ rappresentano i coseni degli angoli che la retta tangente la curva v nel punto m, forma cogli assi coordinati, e $\left(\frac{dx}{dn}\right)$, ec. i coseni analoghi relativi alla generatrice, e il secondo membro di quella equazione rappresenta la funzione sen.$v.n$ e sarà

$$\left(\frac{d^2S}{ds.dn}\right)=\left(\frac{dv}{ds}\right)\,\text{sen}v.n\,,$$

ponendo ora nella formola (7) $m'=0$, cambiando m in n, per cui si ha $v'\cos.v'.n=\cos.a$ ossia $v'.\text{sen}.v.n=\sqrt{v'^2-\cos.^2a}$, sostituito quivi il valore di v' quale fornisce la formola (4) dopo di avervi supposto $m=n$ e costante, si avrà

$$(11)\quad \left(\frac{d^2S}{ds.dn}\right)=\sqrt{[(\text{sen}.\alpha-n(\alpha'+h'\cos.k\,\text{sen}.\omega+k'\cos.\omega))^2}$$

$$+n^2(\theta'\text{sen}\,\alpha-k'\cos.\alpha\,\text{sen}.\omega-h'(\text{sen}.\alpha\,\text{sen}\,k-\cos.\alpha\cos.k\cos.\omega))^2].$$

Ciò posto si effettui la integrazione per rispetto ad n il che è sempre possibile. Infatti chiamato B^2 il coefficiente di n^2, A il coefficiente di $-2n\,\text{sen}.\alpha$, e supposto

$$\sqrt{(\text{sen}.^2\alpha-2An\,\text{sen}.\alpha+B^2n^2)}-Bn=u\,\text{sen}.\alpha,\ \text{si avrà}$$

$$\left(\frac{d^2S}{ds.du}\right)=-\frac{\text{sen}.^2\alpha}{4}\,\frac{(B+2Au+Bu^2)^2}{(A+Bu)^3}.$$

Fatto poi $A+Bu=z$ si ha $\left(\frac{d^2S}{ds.dz}\right)=-\frac{\text{sen}.a}{4B^3}\cdot\frac{(B^2-A^2+z^2)^2}{z^3}$; quindi integrando ed eliminando z si avrà

$$\left(\frac{dS}{ds}\right)=\text{Cost}.-\frac{\text{sen}.^2a}{8B^3}\left[(A+Bu)^2-\frac{(B^2-A^2)^2}{(A+Bu)^2}+4(B^2-A^2)\log(A+Bu)\right].$$

Si estenda ora questo integrale da $n=0$ fino ad n eguale a quella funzione di s che rappresenta la parte della retta generatrice compresa fra la direttrice Gg, ed uno dei lati del poligono di cui si cerca la quadratura, onde si avrà

$$\text{Cost}.=\frac{\text{sen}\,^2a}{2B^3}\left[AB+(B^2-A^2)\log.(A+B)\right].$$

eseguita ora di nuovo la integrazione per rispetto ad s, si estenderà il risultato dall'uno all'altro termine di quel lato del poligono che si considera. Ripetuta poi una simile operazione per ciascun lato di quella figura, nella somma algebraica delle quantità successivamente ottenute si avrà l'espressione dell'area richiesta.

Ma in tanta generalità di supposizioni non è possibile spingere più oltre la integrazione. Possiamo per altro ridurre quella ricerca alla misura dell' estensione di una linea, come già usarono in simili indagini il grande Eulero ed altri. Infatti immaginiamo una curva piana qualunque, per esempio la stessa linea Gg, distesa su di un piano. Fingiamo che una retta scorra con un estremo lungo quella curva e sia tangente ad un'altra linea da determinarsi. Prendo nella curva arbitraria un arco di lunghezza s, chiamo v l'arco corrispondente della linea cercata, m la parte della retta generatrice compresa fra quelle linee, e λ l'angolo formato da questa retta colla curva arbitraria e data. Posti nell'equazione (7) $\text{Ang.}^{\circ} m.v = 0$, $\alpha = \lambda$ avremo $v' = m' + \cos.\lambda$, ossia $v = m + \int \cos.\lambda.ds$. Si supponga ora

$$C\cos.\lambda = \frac{A\,\text{sen.}^2\alpha}{2B^2} - \frac{\text{sen.}^2\alpha}{8B^3}\left[(A+Bu)^2 - \frac{(A^2-B^2)^2}{(A+Bu)^2} + 4(B^2-A^2)\log.\frac{A+Bu}{A+B}\right],$$

essendo C una costante richiesta dalla omogeneità, ed avremo $S = \text{Cost} + \frac{v-m}{C}$.

Dunque descritta la curva v poi misurate le linee v ed m si conoscerà l'estensione cercata. Riguardo poi alla lunghezza della retta m si desumerà dall'equazione (8) ponendo in essa

$h = 0$, $\omega = \theta = 0$, $\text{Ang.}^{\circ} m.v = 0$, $\alpha = \lambda$, e si avrà $m(k' + \lambda') = \text{sen.}\lambda$.

Corol.° 1.° Se la superficie sarà sviluppabile avremo $A = B$, come fra poco verrà dimostrato, per cui sparirà la quantità trascendente dalla formola che abbiamo superiormente trovata.

Se la retta m si conserva tangente alla curva direttrice Gg, essendo $a = b = 0$ avremo

$$\left(\frac{d^2S}{ds.dn}\right) = n\sqrt{(h'^2\cos.^2k + k'^2)} = \frac{n}{R}\text{, e quindi } \left(\frac{dS}{ds}\right) = \frac{n^2}{2R} + \text{Cost.}$$

Il geometra Tinseau in una memoria presentata all'Accademia di Parigi si propone di quadrare la parte di una superficie sviluppabile, quale attualmente si considera, compresa fra lo spigolo di regresso, due lati rettilinei, ed una curva piana qualunque; e giunge ad una formola particolare, più complicata ed essenzialmente diversa dalla nostra. Per comprendere la ragione di tale differenza si osservi che il Tinseau considera due lati infinitamente vicini di quella superficie compresi fra lo spigolo di regresso e la linea piana, quindi descritto nel piano di essi un arco circolare avente il centro nell'estremo del lato maggiore in cui tocca la curva direttrice, e per raggio questo lato medesimo, suppone che la parte del lato minore intercetta fra quella circonferenza e la linea piana nominata superiormente eguagli il differenziale del lato, mentre con facilità si prova essere eguale alla somma algebrica dei differenziali del lato e dello spigolo di regresso.

Corol.° 2.° Se la retta m tangente alla direttrice è anche di lunghezza costante sarà $S=\frac{n^2}{2}\int\frac{ds}{R}$: e siccome $\int\frac{ds}{R}$ eguaglia l'angolo di contingenza della direttrice medesima, perciò indicato quest'angolo con Δ avremo $S=\frac{n^2}{2}\Delta$, da cui discende la regola insegnata da Archimede per quadrare la superficie del cono retto.

Corol.° 3.° Fingiamo che la direttrice sia una retta, per es.° lo stesso asse Gx, per cui saranno $h=k=0$, e supposto costante l'angolo α, siccome $A=0$, $B=\theta'\text{sen}.\alpha$ avremo

$$\left(\frac{dS}{ds}\right)=\text{Cost.}-\frac{\text{sen}.\alpha}{8\theta'}\left[u^2-\frac{1}{u^2}+4\log.u\theta'\text{sen}.\alpha\right] \text{ ove } u=\sqrt{(1+n^2\theta'^2)}-n\theta'.$$

Limitando maggiormente le condizioni del problema, desumeremo poi da questa formola le espressioni già trovate da Fergola nell'Accademia di Napoli e da Saladini nell'I. R. Istituto Italiano, per la quadratura della Volta spirale scalena.

Corol.° 4.° Supponendo che la linea direttrice e la curva limite siano parallele, posti nella formola

(9) $\alpha=0,\ b=90°,\ \text{Ang.}°v.s=0$

avremo $v'=1-\frac{n}{R}\cos.R.n$, e siccome in questo caso

$\left(\frac{d^2S}{dn.ds}\right) = v' = 1 - \frac{n}{R}$ cos.R.n, avremo $\left(\frac{dS}{ds}\right) = n - \frac{n^2}{2R}$ cos.R.n, ed integrando di nuovo $S = \text{Cost.} + n.s - \frac{n^2}{2} \int \frac{\text{cos.R.}n}{R}\, ds$. Ora nel piano normale alla curva Gg, pel centro del circolo osculatore si conduca la perpendicolare al raggio R, e si estenda fino ad incontrare la retta n. La parte di questa retta compresa fra la curva s e la perpendicolare ad R, rappresenta un raggio di curvatura della linea s, onde indicata quella parte con R', essendo $R = R'\text{cos.R.}n$, sarà $\int \frac{\text{cos.R.}n}{R}\, ds = \int \frac{ds}{R'}$, e questo integrale rappresenta l'angolo di contingenza dello spigolo di regresso di quella superficie sviluppabile in cui sono collocate quelle curve parallele. Avremo per conseguenza $S = \text{Cost.} + n.s - \frac{n^2}{2} \int \frac{ds}{R'}$, che è la formola trovata.

Corol.° 5.° Supposta la superficie sviluppabile cioè A=B, si finga inoltre che il punto in cui la retta m incontra la direttrice sia il proprio centro di grandezza, e siano $\omega = \theta = 0$, m ed α costanti. L'equazione A=B ridurrassi per tanto ad $h'\text{cos.}(\alpha + k) = 0$, onde supposto $h' = 0$ si avrà $\left(\frac{d^2S}{ds.dn}\right) = \text{sen.}\alpha - nk'$, ossia $\left(\frac{dS}{ds}\right) = n\text{sen.}\alpha - \frac{n^2}{2} k' + \text{Cost.}$ Estendendo ora da $n = -m$ ad $n = m$ l'integrale, avremo $\left(\frac{dS}{ds}\right) = 2m\,\text{sen.}\alpha$, e finalmente $S = 2m.s.\text{sen.}\alpha$. Teorema di cui forse non si conobbe finora che il solo caso considerato da Euclide nel quale la direttrice è una linea retta.

PROPOSIZIONE QUINTA.

Immaginiamo il poligono mistilineo considerato nella proposizione antecedente, poi le superficie cilindriche che passano lungo i lati di quella figura e le cui caratteristiche sono perpendicolari per es.° al piano xGy, e proponiamoci di trovare la cubatura del solido compreso fra quelle superficie e questo piano.

Si chiami M il volume del solido terminato dalla superficie che nella proposizione antecedente si è indicata con S, nella parte inferiore dal piano xGy, e lateralmente dalle superficie cilindriche perpendicolari a quel piano e che passano lungo i lati del quadrilatero S. Indicata poi con t la lunghezza di una curva qualunque che passa per il punto m e da cui dipende il valore di M, avremo

$$\left(\frac{d^3M}{dv.dt.dn}\right)=\left(\frac{dx}{dv}\right)\left[\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dz}{dn}\right)-\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{dy}{dn}\right)\right]+\left(\frac{dx}{dt}\right)\left[\left(\frac{dy}{dn}\right)\left(\frac{dz}{dv}\right)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{dz}{dn}\right)\left(\frac{dy}{dv}\right)\right]+\left(\frac{dx}{dn}\right)\left[\left(\frac{dy}{dv}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right)-\left(\frac{dz}{dv}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)\right].$$

Ora, siccome le derivate $\left(\frac{dx}{dv}\right)$, $\left(\frac{dy}{dv}\right)$ ec. rappresentano i coseni degli angoli compresi dalla curva v e dagli assi coordinati; $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ ec. sono le quantità analoghe per la curva t; ec.; così per quanto ha provato il cel. Lagrange nella meccanica analitica, il secondo membro di quella equazione eguaglierà il prodotto sen.$n.t$sen.$v.nt$, ove $v.nt$ indica l' inclinazione della curva v al piano delle altre due linee n e t. Avremo quindi

$$\left(\frac{d^3M}{dv.dt.dn}\right)=\text{sen}.n.t.\text{sen}.v.nt$$

La curva arbitraria t sia presentemente la stessa ordinata z, per cui ritenute le denominazioni assunte disopra avremo

$$n\text{sen}.n.z=\sqrt{[(x-p)^2+(y-q)^2]}.$$ Essendo

$$(Y-y)(p-x)-(X-x)(q-y)=0$$

l' equazione del piano $n.z$, purchè siano X, Y le coordinate di un suo punto qualunque, sarà sen.$v.nz=\frac{(p-x)y'-(q-y)x'}{v'\sqrt{[(x-p)^2+(y-q)^2]}}$, e perciò avremo

$$\left(\frac{d^3\mathrm{M}}{dv.dt.dn}\right)=\frac{1}{n.v'}\,[(p-x)y'-(q-y)x'].$$

Sostituendo finalmente il valore dell' espressione $(p-x)y'-(q-y)x'$, introducendo la variabile s in luogo di v, integrando per rispetto a z e supponendo per brevità

$$\mathrm{U}=(\mathrm{sen}.h\,\mathrm{sen}.k\,\mathrm{sen}.\omega+\cos.h\cos.\omega)\mathrm{sen}.\alpha,$$

$$\mathrm{T}=\left\{\begin{array}{l}
h'(\cos.\alpha\,\mathrm{sen}.k+\mathrm{sen}.\alpha\cos.k\cos.\omega)[(\mathrm{sen}.h\,\mathrm{sen}.k\cos.\omega-\cos.h\,\mathrm{sen}.\omega)\mathrm{sen}.\alpha\\
-\,\mathrm{sen}.h\cos.k\cos.\alpha]-k'[\cos.h(\cos.^2\alpha+\mathrm{sen}.^2\alpha\cos.^2\omega)\\
-\,\mathrm{sen}.\alpha\,\mathrm{sen}.h\,\mathrm{sen}.\omega(\cos.\alpha\cos.k-\mathrm{sen}.\alpha\,\mathrm{sen}.k\cos.\omega)]\\
+\theta'\mathrm{sen}.\alpha[\cos.\alpha(\cos\,h\,\mathrm{sen}.\omega-\mathrm{sen}\,h\,\mathrm{sen}.k\cos.\omega)-\mathrm{sen}.\alpha\,\mathrm{sen}.h\cos.k]\\
-\,\alpha'(\mathrm{sen}.h\,\mathrm{sen}.k\,\mathrm{sen}.\omega+\cos.h\cos.\omega)
\end{array}\right\}$$

avremo
$$\left(\frac{d^2\mathrm{M}}{ds.dn}\right)=(n\mathrm{T}+\mathrm{U})\,z.$$

Sostituendo ora il valore di z ed integrando per rispetto ad n si avrà

$$(12)\left(\frac{d\mathrm{M}}{ds}\right)=\left\{\begin{array}{l}
\mathrm{T}n^2[\frac{1}{2}r+\frac{1}{3}n\cos.\alpha\,\mathrm{sen}.h\cos.k-\frac{1}{3}n\,\mathrm{sen}.\alpha(\mathrm{sen}.h\,\mathrm{sen}.k\cos.\omega\\
-\cos.h\,\mathrm{sen}.\omega)]+\mathrm{U}n[r+\frac{1}{2}n\cos.\alpha\,\mathrm{sen}.h\cos\,k\\
-\frac{1}{3}n\,\mathrm{sen}.\alpha(\mathrm{sen}.h\,\mathrm{sen}.k\cos.\omega-\cos.h\,\mathrm{sen}.\omega)]+\mathrm{Cost}.
\end{array}\right\}$$

Esteso ora quest' ultimo integrale da $n=0$ fino a quel valore di n che rappresenta la lunghezza della parte di questa retta che è compresa fra la curva direttrice e la linea v, quindi integrando per rispetto ad s ed estendendo dall'uno all'altro termine di questa linea si avrà l' espressione del solido rappresentato con M. Il volume del solido domandato nella proposizione sarà poi la somma algebraica di tanti solidi conformati analogamente a quello di cui abbiamo superiormente esibita la cubatura.

Corol.° 1.° La superficie generata dalla retta m sia sviluppabile e la linea Gg il suo spigolo di regresso. Supposti nella formola trovata $\alpha = b = 0$ avremo

$$\left(\frac{d\text{M}}{ds}\right) = \text{Cost.} - \frac{n^2}{2.3}(3r + 2n\,\text{sen.}h\cos.k)(h'\text{sen.}h\,\text{sen.}k\cos.k + k'\cos.h).$$

Introduciamo le coordinate della curva Gg, e siccome

$$k'\cos.h + h'\text{sen.}h\,\text{sen.}k\cos.k = q''p' - q'p'' = p'^3\left(\frac{d^2q}{dp^2}\right),$$

$$\text{sen.}h\cos.k = r' = \left(\frac{dr}{dp}\right) : \left(\frac{ds}{dp}\right) \text{ si avrà}$$

$$\left(\frac{d\text{M}}{dp}\right) = \text{Cost.} - \frac{n^2\left(\frac{d^2q}{dp^2}\right)}{6\left(\frac{ds}{dp}\right)^3}\left[2n\left(\frac{dr}{dp}\right) + 3r\left(\frac{ds}{dp}\right)\right].$$

Sostituendo poi alle variabili s ed n le projezioni di queste linee sul piano Gxy, le quali indicherò rispettivamente con u ed l, siccome $\cos.n.z = \left(\frac{dr}{dp}\right) : \left(\frac{ds}{dp}\right)$, $l = n.\text{sen}.n.z$, $\left(\frac{ds}{dp}\right)^2 - \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 = \left(\frac{du}{dp}\right)^2$, per cui $l : \left(\frac{du}{dp}\right) = \pm n : \left(\frac{ds}{dp}\right)$, avremo quindi per ultimo

$$\left(\frac{d\text{M}}{dp}\right) = \text{Cost.} - \frac{l^2\left(\frac{d^2q}{dp^2}\right)}{6\left(\frac{du}{dp}\right)^2}\left[3r \pm 2l\,\frac{\left(\frac{dr}{dp}\right)}{\left(\frac{du}{dp}\right)}\right].$$

Paragonando questa formola con quella proposta dal Tinseau nella memoria citata ove suppone che la linea v sia la traccia della superficie sviluppabile sul piano Gxy, si scorge che la nostra è differente e assai più semplice di quella, e ciò per l' errore superiormente avvertito.

Corol.° 2.° Se la linea direttrice è lo stesso asse Gx, supposti nella formola (12) $h=k=0$, ed $r=0$ si ottiene

$$\left(\frac{dM}{ds}\right)=\frac{1}{3}n^3\text{sen.}\alpha\text{sen.}\omega(\theta'\text{sen.}\alpha\cos.\alpha\text{sen.}\omega-\alpha'\cos.\omega)$$

$$+\frac{1}{2}n^2\text{sen.}^2\alpha\text{seu.}\omega\cos.\omega+\text{Cost.}$$

Se fingiamo inoltre $\alpha=90^\circ$ si avrà

$$\left(\frac{dM}{ds}\right)=\text{Cost.}+\frac{1}{4}n^2\text{sen }2\omega.$$

PROPOSIZIONE SESTA.

Si domandano le formole per determinare la posizione dei centri di gravità della superficie e del solido considerati nelle proposizioni antecedenti.

Incominciando dalla superficie quadrilatera indicata superiormente con S, consideriamo la curva descritta dal centro di gravità di quella parte della retta variabile n che è compresa fra la direttrice e la linea arbitraria v che termina quella figura. Fingasi che la densità d'ogni punto di essa curva sia proporzionale alla lunghezza della retta generatrice che passa per il punto medesimo, ed il centro di gravità di questa curva sarà manifestamente il punto cercato.

Ritenendo ora le denominazioni assunte disopra ed indicando con X, Y, Z le coordinate del centro richiesto, mediante le formole notissime che offre la meccanica, si avranno le seguenti equazioni

$$X\int nv'ds=\int nxv'ds,\quad Y\int nv'ds=\int nyv'ds,\quad Z\int nv'ds=\int nzv'ds.$$

Ciò posto dovremo sostituire in queste formole i valori di x, y, z e v' desunti dalle formole (1) e (4), dopo di avervi cambiata m in $\frac{1}{2}n$, e di aver sostituito ad n il valore che si ottiene combinando le equazioni (1) con quella che rappresenta la curva arbitraria tracciata nella superficie che si considera.

Se il quadrilatero S fosse attraversato da una di quelle linee chiamate da Monge *lignes de strictions*, dovremo allora considerare separatamente le due parti in cui il quadrilatero medesimo vien diviso da quella curva, ad una di esse si potranno applicare le formole trovate, e quelle per l'altra si otterranno cambiando la n esplicita in $\frac{n'-n}{2}$, e la implicita in x, y, z e v in $\frac{n'+n}{2}$, essendo n' il valore di n che corrisponde alla curva più lontana dalla direttrice.

In quanto poi al centro di gravità del solido M, espresse con X, Y, Z le sue coordinate, e ritenuto quanto sopra, avremo

$$\mathrm{MX}=\int\int\int x\left(\frac{d^3\mathrm{M}}{ds.dn.dz}\right)dsdndz,\ \mathrm{MY}=\int\int\int y\left(\frac{d^3\mathrm{M}}{ds.dn.dz}\right)ds.dn.dz,$$

$$\mathrm{MZ}=\int\int\int z\left(\frac{d^3\mathrm{M}}{ds.dn.dz}\right)ds.dn.dz\,.$$

Supponiamo ora nelle equazioni (1)

$$\cos.\alpha\cos.h\cos.k-\mathrm{sen}.\alpha(\cos.h\,\mathrm{sen}.k\cos.\omega+\mathrm{sen}.h\,\mathrm{sen}.\omega)=\mathrm{P},$$

$$\cos.\alpha\,\mathrm{sen}.k+\mathrm{sen}.\alpha\cos.k\cos.\omega=\mathrm{Q},$$

$$\cos.\alpha\,\mathrm{sen}.h\cos.k-\mathrm{sen}.\alpha(\mathrm{sen}.h\,\mathrm{sen}.k\cos.\omega-\cos.h\,\mathrm{sen}.\omega)=\mathrm{R},$$

per cui saranno $x=p+n\mathrm{P}$, $y=q+n\mathrm{Q}$, $z=r+a\mathrm{R}$: sostituendo in quelle formole questi valori non che quello di $\left(\frac{d^3\mathrm{M}}{ds.dn.dz}\right)$ ed integrando rispetto a z avremo

$$MX = \int\int (p + nP)(r + nR)(U + nT)\, dn.ds,$$

$$MY = \int\int (q + nQ)(r + nR)(U + nT) dn.ds,$$

$$MZ = \int\int (r + nR)^2 (U + nT) dn.ds.$$

Sviluppando, poi integrando per rispetto ad n, avremo per ultimo

$$MX = \int [prU.n + \frac{1}{2}(RUp + PUr + Tpr)n^2 + \frac{1}{3}(RUP + RTp + PTr)n^3 + \frac{1}{4} PRTn^4]ds$$

$$MY = \int [qrU.n + \frac{1}{2}(RUq + UQr + Tqr)n^2 + \frac{1}{3}(RUQ + RTq + QTr)n^3 + \frac{1}{4} QRT.n^4]ds$$

$$MZ = \int [r^2 Un + \frac{1}{2}(2Ru + Tr^2)n^2 + \frac{1}{3}(R^2 U + 2RT)n^3 + \frac{1}{4} R^2 T.n^4]ds.$$

Ove ho omesse le costanti, mentre il solido M si annulla tanto per $n=0$ come per $z=0$. Determinata finalmente n in funzione di s, come si è detto disopra, eseguita l'integrazione rispetto ad s ed estesa fra i limiti dati, si conoscerà la posizione del centro richiesto.

È poi manifesto come mediante le formole trovate si giunga a determinare il centro di gravità di qualsivoglia porzione della superficie ovvero del solido, di cui abbiamo in questo luogo parlato.

PROPOSIZIONE SETTIMA.

Si cerca qual relazione deve aver luogo fra le leggi che regolano il moto della retta generatrice, perchè la superficie descritta possa distendersi su di un piano.

Si osservi che la generatrice dovrà in tal caso serbarsi tangente ad una curva tracciata in quella superficie, perchè essendo Mm questa curva fatto, nelle equazioni (7) (8) Ang.°$m.v=0$ si avranno

$$v'=m'+\cos.\alpha,\quad m(\alpha'+h'\cos.k\,\text{sen}.\omega+k'\cos.\omega)=\text{sen}.\alpha.$$

Combinando ora queste due equazioni colla formola (4) si ottiene

$$(15)\qquad k'\text{sen}.\omega-h'\cos.k\,\text{sen}.\omega+\text{tang}.\alpha(h'\text{sen}.k-\theta')=0$$

che è la relazione cercata. Mediante questa equazione essendo dato α ovvero θ in funzione di s si troverà l' altro angolo. Avremo poi $m=\text{sen}.\alpha:(\alpha'+h'\cos.k\,\text{sen}.\omega+k'\cos.\omega)$, $v=\text{cost}.+m+\int\cos.\alpha.ds$, e dall'equazione (6) si avra

$$\text{sen}.m.\text{R}s=\text{R}\,\frac{\text{sen}.^2\alpha}{\cos.\alpha}\,(\theta'-h'\text{sen}.k).$$

PROPOSIZIONE OTTAVA.

Supponendo che la superficie considerata finora sia sviluppabile, e che la linea Gg ne sia lo spigolo di regresso, prendiamo a considerare alcune relazioni che regnano fra questo spigolo ed un' altra linea qualunque tracciata in quella superficie.

Supponendo $\alpha=0$ le equazioni (4) (7) forniscono

$$v'.\cos.m.v=1+m',\quad v'^2=\frac{m^2}{\text{R}^2}+(1+m')^2,\quad v'\text{sen}.m.v=\frac{m}{\text{R}},$$

combinandole poi coll'equazione (10) ne dedurremo facilmente

$$\frac{mv'}{\rho}\cos.m.\rho=v'.\text{sen}.^2m.v+m.(m.v)'\text{sen}.m.v$$

la quale, per essere $e'=\frac{1}{\text{R}}$, e $v'\text{sen}.m.v=m.e'$, supposto $\frac{v'}{\rho}=\text{E}'$ conduce alla seguente

$$\text{E}'\cos.m.\rho=[e'+(m.v)']\text{sen}.m.v$$

Siccome poi

$$\frac{m.v'^3}{\rho}\,\mathrm{sen}.m.\rho v=(x-p)(y'z''-y''z')+(y-q)(z'x''-z''x')+(z-r)(x'y''-x''y')$$

$$=z''[y'(x-p)-x'(y-q)]+y''[x'(z-r)-z'(x-p)]+x''[z'(y-q)-y'(z-r)],$$

e nella presente ipotesi di $\alpha=0$ si hanno

$$x''=-(h'+2m'h'+mh'')\,\mathrm{sen}.h\cos.k-(k'+2m'k'+mk'')\cos.h\,\mathrm{sen}.k$$

$$+2mh'k'\,\mathrm{sen}.h\,\mathrm{sen}.k-m(h'^2+k'^2)\cos.h\cos.k,$$

$$y''=(k'+2m'k'+mk'')\cos.k+m''\,\mathrm{sen}k-mk'\,\mathrm{sen}.k,$$

$$z''=(h'+2m'h'+mh'')\cos.h\cos.k-(k'+2m'k'+mk'')\,\mathrm{sen}.h\,\mathrm{sen}.k$$

$$-2mh'k'\cos.h\,\mathrm{sen}.k-m(h'^2+k'^2)\,\mathrm{sen}.h\cos.k,$$

$$y'(x-p)-x'(y-q)=m^2(k'\cos.h+h'\,\mathrm{sen}.h\,\mathrm{sen}.k\cos.k),$$

$$x'(z-r)-z'(x-p)=-m^2h'\cos^2.k$$

$$z'(y-q)-y'(z-r)=m^2(h'\cos.h\,\mathrm{sen}.k\cos.k-k'\,\mathrm{sen}.h),$$

onde sostituendo nel valore di sen.$m.\rho v$ e riducendo si avrà

$$\mathrm{sen}.m.\rho v=\frac{m^2\rho}{v'^3}[(h''k'-h'k'')\cos.k-h'(2k'^2+h'^2\cos.^2k)\,\mathrm{sen}.k].$$

Ora ponendo mente al valore del prodotto e'^2i' trovato nella terza proposizione si avrà

$$(16)\qquad \mathrm{E}'.\mathrm{sen}.m.\rho v=\frac{m^2}{\mathrm{R}^2v'^2}\,i' \text{ ovvero } \mathrm{E}'\mathrm{sen}.m.\rho v=i'\,\mathrm{sen}.^2m.v.$$

Da queste eleganti relazioni (15) (16) si desume poi ancora

$$(17)\qquad \mathrm{E}'^2\,\frac{\cos.^2m.\rho\,\mathrm{sen}.^2m.v+\mathrm{sen}.^2m.\rho v}{\mathrm{sen}.^4m.v}=[e'+(m.v)']^2+i'^2\,.$$

Per ottenere l'espressione del raggio osculatore della curva di cui si tratta formiamo le quantità seguenti

$$x'y''-x''y'=\left\{\begin{array}{l}(1+3m'+2m'^2-mm'')(h'\,\mathrm{sen.}h\,\mathrm{sen.}k\,\mathrm{cos.}k+k'\,\mathrm{cos.}h)\\ +m(1+m')(k''\,\mathrm{cos.}h+h''\,\mathrm{sen.}h\,\mathrm{sen.}k\,\mathrm{cos.}k+h'^2\,\mathrm{cos.}h\,\mathrm{sen.}k\,\mathrm{cos.}k\\ -2h'k'\,\mathrm{sen.}h\,\mathrm{sen.}^2k)+m^2[(h''k'-h'k'')\,\mathrm{sen.}h\,\mathrm{cos.}^2k\\ +h'^2k'\,\mathrm{cos.}h\,\mathrm{cos.}^2k-k'^2h'\,\mathrm{sen.}h\,\mathrm{sen.}k\,\mathrm{cos.}k+k'^3\,\mathrm{cos.}h]\end{array}\right\}$$

$$y'z''-y''z'=\left\{\begin{array}{l}(1+3m'+2m'^2-mm'')(h'\,\mathrm{cos.}h\,\mathrm{sen.}k\,\mathrm{cos.}k-k'\,\mathrm{sen.}h)\\ +m(1+m')(h''\,\mathrm{cos.}h\,\mathrm{sen.}k\,\mathrm{cos}\,k-k''\,\mathrm{sen.}h-h'^2\,\mathrm{sen.}h\,\mathrm{sen.}k\,\mathrm{cos.}k\\ -2h'k'\,\mathrm{cos.}h\,\mathrm{sen}^2k)+m^2[(h''k'-h'k'')\,\mathrm{cos}h\,\mathrm{cos.}^2k-h'^2k'\,\mathrm{sen}h\,\mathrm{cos.}^2k\\ -k'^2h'\,\mathrm{cos.}h\,\mathrm{sen.}k\,\mathrm{cos.}k-k'^3\,\mathrm{sen.}h]\end{array}\right\}$$

$$z'x''-z''x'=\left\{\begin{array}{l}-(1+3m'+2m'^2-mm'')h'\,\mathrm{cos.}^2k-m(1+m')(h''\,\mathrm{cos.}^2k\\ -2h'k'\,\mathrm{sen.}k\,\mathrm{cos.}k)+m^2[(h''k'-h'k'')\,\mathrm{sen.}k\,\mathrm{cos.}k\\ -(h'^2+k'^2)h'\,\mathrm{cos.}^2k-2h'k'^2\,\mathrm{sen.}^2k].\end{array}\right\}$$

Avendosi $\frac{v'^3}{\mathrm{R}\rho}\mathrm{sen.R.}\rho v=(y'z''-y''z')p''+(z'x''-z''x')q''+(x'y''-x''y')r''$

sostituendosi si ottiene

$$(18)\qquad \frac{v'^3}{\mathrm{R}\rho}\,\mathrm{sen.R.}\rho v=-m(1+m')[h''k'-h'k'')\,\mathrm{cos.}k$$
$$-h'(2k'^2-h'k'\,\mathrm{sen.}k\,\mathrm{cos.}k+h'^2\,\mathrm{cos.}^2k)\,\mathrm{sen.}k].$$

Quadrando poi quelle equazioni e sommandole avremo facilmente l' espressione del raggio osculatore che quì non riferisco, essendo alquanto complicata.

Corol.° 1.° Supponendo che l' angolo $m.v$ debba essere di grandezza costante, dalle equazioni trovate desumeremo le seguenti

$$\mathrm{E}'\,\mathrm{cos.}m.\rho=e'.\mathrm{sen.}m.v,\quad \mathrm{E}'\,\mathrm{sen.}m.\rho v=i'\,\mathrm{sen.}^2m.v,$$

$$\frac{\mathrm{sen.}^2m.\rho v+\mathrm{sen.}^2m.v\,\mathrm{cos.}^2m\rho}{\mathrm{sen.}^4m.v}\,\mathrm{E}'^2=e'^2+i'^2,$$

inoltre $m.\mathrm{cos.}m\,\rho=\rho.\mathrm{sen.}^2m.v.$

È noto che il Ch. Lancret pubblicò una memoria sulle sviluppate imperfette, la quale trovasi registrata nel secondo volume delle memorie presentate dai dotti stranieri all' Istituto di Francia. È assai probabile che quell' illustre autore rimarcasse prima di me le formolette eleganti riferite in questo corollario: io però non posso asserirlo non essendomi stato possibile il consultare che il primo volume di quella collezione, che unico possiede la I. R. Biblioteca di Pavia.

Corol.° 2.° Fingasi ora Ang.°$m.v = 90°$: ed avremo

$$\text{Ang.}^\circ m.\rho = \text{Aug.}^\circ m.\rho v,$$

$$e' = E'\cos.m.\rho,\ i' = E'.\text{sen}.m.\rho,\ E'^2 = e'^2 + i'^2,$$

$$\text{tang}.m.\rho = \frac{i'}{e'},\ 1 + m' = 0,\ v' = \frac{m}{R},\ \text{e}\ \rho = m\cos.m.\rho.$$

Le prime tre formole sono quelle trovate da Lancret in una bellissima memoria registrata nel primo volume della collezione superiormente citata, e le ultime conducono alla famosa teoria delle sviluppanti e sviluppate di cui siamo debitori all' immortale Monge. Infatti Essendo $\rho = m.\cos.m.\rho$, Ang.°$m.v = 90°$ ne segue che tutte le sviluppate di una curva sono disposte in una superficie che può venir generata dal movimento di una retta, la quale scorra lungo la curva dei centri osculatori di quella linea, e si conservi perpendicolare alla superficie osculatrice la linea medesima. Dall'equazione $m' + 1 = 0$ ossia $m = \text{cost.} - s$, si raccoglie che fissato ad un punto della curva Gg il capo di un filo e disteso in maniera che l'altro estremo incontri la linea Mm, se questo estremo si obbliga a percorrere la stessa curva Mm, il filo distendendosi sulla superficie che è il luogo delle sviluppate, si adatta alla linea Gg, per cui questa linea come pure un' altra evoluta qualunque saranno curve brevissime di quella superficie.

Supposto nell' equazione (18) $1 + m' = 0$ si ha $\text{sen}.R.\rho v = 0$, cioè il raggio R è parallelo alla curva v, ossia il piano $m.\rho$ è perpendicolare al raggio R della linea brevissima Gg, e quindi tangente alla superficie in cui questa linea è tracciata.

Concludiamo adunque che la superficie luogo delle evolute di una curva qualunque è l'inviluppo dei piani normali a questa linea, ossia è una superficie sviluppabile di cui uno spigolo è la retta che unisce i punti non comuni alle linee ρ ed m.

Corol.° 3.° Se l'inclinazione dello spigolo di regresso ad un piano qualunque zOx è costante, cioè se $k=$ cost.; avremo $y''=m''\text{sen}.k$ ec.; ma per una sviluppata qualunque di quello spigolo si ha $m''=0$ per cui $y''=0$, ossia $y=\text{A}s+\text{B}$ ove A, B rappresentano due costanti: dunque ciascuna di quelle sviluppanti ha una costante inclinazione al piano nominato, il che non concorda con quanto asserisce il sagacissimo Bobilier nel volume 17.° degli annali di Gergonne.

PROPOSIZIONE NONA.

Date le equazioni dello spigolo di regresso di una superficie sviluppabile, si domanda quella della linea brevissima che congiunge due punti qualisivogliano della medesima superficie.

Sia Mm la linea brevissima di cui si cercano le equazioni. Siccome il piano osculatore della medesima deve essere ovunque perpendicolare alla superficie sviluppabile in cui quella linea è tracciata, dall' equazione (15) supposto

$$\text{Ang.}^\circ \rho.m = 90^\circ. \text{ si avrà}$$

$$e' + (m.v)' = 0, \text{ ossia } e + (m.v) = a \text{ costante.}$$

Essendo poi $\cos.m.\rho v = \cos.m.v$ l'equazione (16) fornirà la seguente

$$\text{E}' = i'\text{sen}.m.v.$$

Ciò posto, siccome $m = \text{R}(1 + m')\,\text{tang}.m.v.$ ossia $m' - \frac{\cot.(a-e)}{\text{R}}\,m = -1$, integrando col metodo noto questa equazione alle derivate del primo ordine, si avrà

$$m=\varepsilon^{\int\frac{\cot.(a-e)}{R}ds}\left[b-\int\varepsilon^{-\int\frac{\cot.(a-e)}{R}ds}ds\right]$$

ove ε rappresenta la base dei logaritmi iperbolici e b la costante portata dall' integrazione. Avremo poi ancora

$$1+m'=\frac{\cot.(a-e)}{R}\left[b-\int\varepsilon^{-\int\frac{\cot.(a-e)}{R}ds}ds\right].\,\varepsilon^{\int\frac{\cot.(a-e)}{R}ds},$$

$$v'=\frac{\varepsilon^{\int\frac{\cot.(a-e)}{R}ds}}{R\,\text{sen}(a-e)}\left[b-\int\varepsilon^{-\int\frac{\cot.(a-e)}{R}ds}ds\right]$$

e siccome $E'=i'\text{sen.}(a-e)$, $\rho=\frac{v'}{E'}$, ed $\frac{1}{R}=e'$,

quindi avremo

$$m=\frac{b-\int ds.\text{sen.}(a-e)}{\text{sen.}(a-e)},\quad v'=\frac{b-\int ds\,\text{sen.}(a-e)}{R\,\text{sen.}^2(a-e)},\quad \rho=\frac{b-\int ds\,\text{sen.}(a-e)}{R.i'\text{sen.}^2(a-e)},$$

mediante le quali equazioni la linea sarà totalmente determinata.

Per determinare poi le due costanti che entrano in quelle equazioni, dagli estremi fra i quali si deve estendere la linea brevissima si condurranno le rette tangenti lo spigolo di regresso; si misureranno le lunghezze di queste tangenti, che indico con m', m'', ed anche le parti del detto spigolo comprese fra il primo termine arbitrario dell' arco s ed i punti in cui lo stesso arco è toccato dalle rette m', m'', le quali parti chiamerò rispettivamente s' ed s''. Ciò posto rappresentata con $m=f(s, a, b)$ l'equazione della linea brevissima, avremo $m'=f(s', a, b)$, $m''=f(s'', a, b)$ e mediante queste equazioni caveremo i valori delle quantità a e b cercate.

Osservazione. Se vorremmo trovare l' equazione delle linee brevissime che ponno tracciarsi nella superficie generabile dal movimento di una linea retta, qualunque essa siasi, basterà supporre nell' equazione (10) della Prop. 3. l' angolo $m.\rho = 90.^\circ$ e si avrà quanto si cerca.

Se poi vorremo conoscere le linee di massima e minima curvatura, trovato il valore di ρ, ne formeremo la derivata per rispetto ad m' considerata qual variabile unica ed indipendente dalle altre, e questa derivata posta eguale a zero fornirà l' equazione delle linee richieste.

PROPOSIZIONE DECIMA.

Supponiamo che la retta m movendosi descriva quella superficie sviluppabile, la quale distesa su di un piano trasforma la linea Gg data in una linea retta, sia cioè la superficie di Lancret, e proponiamoci di trovare l' equazione dello spigolo di regresso di quella superficie.

Rappresentato colla linea Mm lo spigolo cercato, dovranno essere Ang.$^\circ m.v = 0$, Ang.$^\circ ms.\mathrm{R}s = 90^\circ$: per il che le equazioni (5) forniscono

$$\text{Ang.}^\circ\mathrm{R}.m = 90^\circ:\quad h'\cos.k\,\text{sen}\,\omega. + k'\cos.\omega = 0.$$

Essendo poi $\mathrm{R}^2 = 1:(k'^2 + h'^2\cos.^2k) = \text{sen}.^2\omega : k^2(\text{sen}.^2\omega + \cos.^2\omega)$, avremo $\text{sen}.\omega = \mathrm{R}k'$, $\cos.\omega = -\mathrm{R}h'\cos.k$. Ponendo ora nelle equazioni (7), (9) Ang.$^\circ m.v = 0$, $\cos.\mathrm{R}.m = 0$, Ang.$^\circ v.s =$ Ang.$^\circ m.s = \alpha$, si avranno $v' = m' + \cos.\alpha$, $v'\cos.\alpha = 1 + (m\cos.\alpha)'$, e quindi $m\alpha' = \text{sen}.\alpha$. Per determinare l' angolo α si ponga nell' equazione (4) $v' = m' + \cos.\alpha$, ed essendo $\text{sen}.\alpha - m\alpha' = 0$, $h'\cos.k\,\text{sen}.\omega + k'\cos.\omega = 0$ si avrà

$$\theta'\text{sen}.\alpha - k'\cos.\alpha\,\text{sen}.\omega - h'(\text{sen}.\alpha\,\text{sen}.k - \cos.\alpha\cos.k\cos.\omega) = 0.$$

Sostituendo i valori di $\text{sen}.\omega$, $\cos.\omega$ trovati disopra, dividendo per $\cos.\alpha$, ed osservando che

$$k'^2 + h'^2\cos.^2 k = \frac{1}{R^2}\text{, avremo } \mathrm{tang}.\alpha = \frac{1}{R(\theta' - h'\mathrm{sen}.k)}.$$

Dall' equazione $\mathrm{sen}.\omega = Rk'$ poi si ricava

$$\theta' = -\frac{(Rk')'}{Rh'\cos.k} = -R^2[(h''k' - h'k'')\cos.k + h'k'^2\mathrm{sen}.k] \text{ e}$$

$$\mathrm{tang}.\alpha = -1 : [(h''k' \quad h'k'')\cos k + h'(2k'^2 + h'^2\cos.^2 k)\mathrm{sen}.k]R^3 = 1 : R^3 e'^2 i' :$$

ma $e' = \frac{1}{R}$ onde avremo per ultimo $\mathrm{tang}.\alpha = \frac{e'}{i'}$: come altrimenti ha dimostrato il sagacissimo Lancret.

Dall' equazione $m = \frac{\mathrm{sen}.\alpha}{\alpha'}$ si desume poi $m = e'\sqrt{e'^2 + i'^2} : (e''i' - e'i'')$, onde conoscendo m, α ed ω potremo descrivere per punti lo spigolo di regresso della superficie cercata.

Per conseguire le espressioni dell'arco, del raggio osculatore ec. della medesima curva si osservi, che siccome la retta m tocca la linea Mm, dalle formole della proposizione ottava, fatto

$$\text{Ang.}^\circ m.s = 180^\circ - \alpha \text{ caveremo } m' + v' = -\cos.\alpha,\ \rho\,\mathrm{sen}.\alpha = mv',$$

e per quanto abbiamo osservato nella proposizione nona si avranno

$$e' = I'\mathrm{sen}.\alpha,\ E - \alpha = \text{cost. Essendo poi } e' = i'\mathrm{tang}.\alpha$$

si deducono $\qquad i' = I'\cos.\alpha,\ I' = \sqrt{e'^2 + i'^2}$

altre formole dovute a Lancret, dalle quali si ricavano poi

$$E = \text{cost.} + \text{Arc.tang.}\frac{e'}{i'},\ v = \frac{e'\sqrt{e'^2 + i'^2}}{e'i'' - e''i'} - \int \frac{i'ds}{\sqrt{e'^2 + i'^2}}$$

e finalmente $\rho = \frac{v'}{E'}$.

PROPOSIZIONE DECIMA PRIMA.

Si cercano le equazioni della linea di curvatura sferica o sviluppata per il piano di una linea data.

Questa curva considerata la prima volta io credo dal Cel. Monge, è lo spigolo di regresso della superficie sviluppabile, luogo geometrico delle evolute della curva proposta.

La linea data sia Gg, Mm la richiesta. Siccome i piani tangenti la superficie sviluppabile nominata, cioè i piani osculatori della curva Mm sono perpendicolari alla linea Gg, ed i lati di quella superficie, ossia le rette tangenti la stessa linea Mm sono perpendicolari alla superficie osculatrice della curva Gg, perciò gli angoli di prima e seconda flessione di questa linea saranno rispettivamente eguali agli angoli di seconda e prima flessione dell'altra; ossia $E=i$, ed $I=e$, siccome è noto. Ciò posto indicando con M, r, w le quantità rappresentate disopra con m, ρ e v, siccome $\alpha=90°$ ed $\text{Ang.}^{\circ}Mw.Ms=90°$, l' equazione (8) fornisce

$$M\,(\,h'\cos.k\,\text{sen}.\omega+k'\cos.\omega\,)=1$$

e quindi dall' equazione (5) si caverà $R=M.\cos.R.M$, come d' altronde sappiamo. Avendosi poi $\text{sen}.M.w=\cos.M.R$, $\text{Ang.}^{\circ}Mw.rw=0$, dalle equazioni (7) (10) otterremo

$$w'.\text{sen}.R.M=M',\ \frac{Mw'^2}{r}\cos.R.M=MM'w''-w'(M'^2+MM''-w'^2).$$

La prima di queste ci dà $w'=\frac{MM'}{\sqrt{M^2-R^2}}$ e siccome $\frac{w'}{r}=i'$, eliminata w dalla seconda si avrà $M^2=R^2+\left(\frac{R'}{i'}\right)^2$, e quindi

$$w'=Ri'+\left(\frac{R'}{i'}\right)'\ \text{ossia}\ w=\frac{R'}{i'}+\int Ri'.ds.$$

Chiamato poi l il cateto del triangolo rettangolo di cui l' ipotenusa è la retta M, e l' altro cateto il raggio osculatore, R si avrà

$$l^2=M^2-R^2\ \text{ossia}\ R'=li'.$$

Così avremo $\cos.\mathrm{R.M} = \frac{\mathrm{R}i'}{\sqrt{\mathrm{R}'^2 + \mathrm{R}^2 i'^2}}$, quindi $\mathrm{tang.R.M} = \frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}i'}$, e finalmente

$$r = \frac{w'}{i'} = \mathrm{R} + \frac{1}{i'}\left(\frac{\mathrm{R}'}{i'}\right)' \text{ ossia } r = \mathrm{R} + \frac{l'}{i'},$$

ed ecco costruite tutte le formole necessarie per determinare compiutamente la curva dei centri di curvatura sferica di qualsivoglia linea data.

Corol.° 1.° Siccome le evolute della curva Gg, che giacciono nella superficie sviluppabile di cui $\mathrm{M}w$ è lo spigolo di regresso, sono linee brevissime di quella superficie, così combinando quanto si è detto nella proposizione presente e nella proposizione nona, giungeremo a trovare l'estensione e la curvatura di una qualunque di quelle sviluppate.

Chiamata L la parte del lato di quella superficie sviluppabile che è intercetta fra l'evoluta richiesta e la curva dei centri osculatori, cambiando nelle equazioni trovate nel Corol.° citato m in $l - L$, e angolo di contingenza della detta curva dei centri in i, e viceversa; ds in $dw = [\mathrm{R}i' + \left(\frac{\mathrm{R}'}{i'}\right)']ds$; $\frac{ds}{\mathrm{R}}$ in $\frac{w'}{r}ds = i'ds = di$, e finalmente R in $r = \mathrm{R} + \frac{1}{i'}\left(\frac{\mathrm{R}'}{i'}\right)'$: siccome $\int \frac{\cot.(a-e)}{\mathrm{R}} ds = \int di \cot.(a-i) = -\log.\mathrm{sen}.(a-i)$, e

$$\varepsilon^{\int \frac{\cot.(a-e)}{\mathrm{R}} ds} = \frac{1}{\mathrm{sen}.(a-i)},$$

così avremo le seguenti equazioni

$$L = \frac{\mathrm{R}'}{i'} - \frac{1}{\mathrm{sen}.(a-i)}\left[b - \int [\mathrm{R}i' + \left(\frac{\mathrm{R}'}{i'}\right)']\,\mathrm{sen}.(a-i).ds\right],$$

$$v' = \frac{1}{[\mathrm{R} + \frac{1}{i'}\left(\frac{\mathrm{R}'}{i'}\right)']\,\mathrm{sen}.^2(a-i)}\left[b - \int [\mathrm{R}i' + \left(\frac{\mathrm{R}'}{i'}\right)']\,\mathrm{sen}.(a-i).ds\right]$$

$$\rho = \frac{b - \int [\mathrm{R}i' + \left(\frac{\mathrm{R}'}{i'}\right)'] \text{sen.}\,(a-i).ds}{e'[\mathrm{R} + \frac{1}{i'}\left(\frac{\mathrm{R}'}{i'}\right)'] \text{sen.}^3(a-i)},$$

mediante le quali si troverà facilmente un' evoluta qualunque di una linea data.

Corol.° 2.° Affinchè una linea data possa adattarsi interamente alla superficie di una sfera, la sua sviluppata per il piano, cioè la linea di curvatura sferica, dovrà ridursi ad un unico punto, per cui supposto $w=0$ nella formola che esprime l' estensione di questa linea si avrà

$$\mathrm{R}i' + \left(\frac{\mathrm{R}'}{i'}\right) = 0$$

che è la condizione cercata. Mediante le espressioni di M e dell' angolo R.M si troverà poi la grandezza del raggio e la posizione del centro di quella sfera.

PROPOSIZIONE DECIMA SECONDA.

La curva descritta dall' estremo libero della retta generatrice sia il luogo dei centri osculatori di una linea data, e cerchiamo quanto è necessario per determinare compiutamente questa curva.

Supposto che sia G*g* la linea data, ed M*m* la curva dei centri osculatori, saranno

$$\text{Ang.}^\circ \mathrm{R}.m = 0,\ \text{Ang.}^\circ a = 90^\circ,\ \text{sen.}m.\mathrm{R}s = 0 \text{ ed } m = \mathrm{R},$$

onde dalle equazioni (4) (5) (6) si desumeranno le seguenti

$$m(h'\cos.k\,\text{sen.}\varpi + k'\cos.\varpi) = 1,\ \text{tang.}\varpi = \frac{h'\cos\,k}{k'},$$
$$v'^2 = m^2(h'\text{sen.}k - \theta')^2 + m'^2.$$

Formando ora la derivata per rispetto ad *s* del valore di tang.ϖ si ottiene $\theta' = \frac{(h''k' - h'k'')\cos\,k - h'k'^2 \text{sen}\,k}{k'^2 + h'^2 \cos.^2 k}$, per cui sarà

$$h'\mathrm{sen}.k-\theta'=\mathrm{R}\,[(k''h'-k'h'')\cos.k+h'\mathrm{sen}.k(2k'^2+h'^2\cos.^2k)]$$

$=-\mathrm{R}^2e'^2i'=-i'$. Siccome poi $\mathrm{R}=m=\frac{1}{e'}$, ed

$m'=-\frac{e''}{e'^2}$, sarà $v'^2=m^2i^2+m'^2$, ossia

$$v'^2=\mathrm{R}^4(e'^2i'^2+e''^2). \tag{19}$$

Si ponga ora nell' equazione (9) $\cos.\mathrm{R}.m=1$, $m=\mathrm{R}$, $\alpha=90.°$ e ne verrà $\mathrm{Ang}.°v.s=90°$, da cui si apprende che il piano $m.v$ deve essere perpendicolare alla curva Gg. Dall' equazione (7) poi si ricava $v'\cos.m.v=m'$ e quindi

$$\mathrm{tang}.\mathrm{R}.v=\frac{\sqrt{v'^2-m'^2}}{m'}=-\frac{e'i'}{e''}, \tag{20}$$

le quali equazioni semplicissime bastano a rettificare la curva non che a descriverla esattamente per punti.

Osserviamo ora che essendo la linea v tracciata nella superficie sviluppabile di cui lo spigolo di regresso è il luogo dei centri di curvatura sferica della linea Gg, cambiate nelle equazioni (15) (16) della Proposizione ottava m in l, e angolo di contingenza della sviluppata per il piano in i e viceversa: avremo

$$\mathrm{E}'.\cos l.\rho=[i'+(lv)']\mathrm{sen}.l.v;\quad \mathrm{E}'.\mathrm{sen}.l.\rho v=e'\mathrm{sen}.^2l.v;$$

siccome poi $l.v=90°-\mathrm{R}.v$ e dalla trigonometria sferica si hanno

$$\mathrm{sen}.l.v.\cos.lv.\rho v=\cos.l.\rho,\ \cos.^2l.\rho+\cos^2l.v=\cos.^2l.\rho v,$$

ossia

$$\mathrm{sen}.^2l.\rho v=\cos.^2\mathrm{R}.v-\cos.^2l\rho,\quad \text{sarà}$$

$$\mathrm{E}'^2=[i'+(\mathrm{R}.v')]^2+e'^2.\cos.^2\mathrm{R}.v.$$

Ma $\quad \mathrm{tang}.\mathrm{R}.v=-\frac{e'i'}{e''}$ onde $\cos.\mathrm{R}v=\frac{e''}{\sqrt{e''^2+e'^2i'^2}}$,

$$\text{ed } (\mathrm{R}.v)' = -\left(\frac{e'i'}{e''}\right)' \frac{e''^2}{e''^2+e'^2i'^2}$$

avremo per conseguenza

$$\mathrm{E}'^2 = \left[\, i' + \left(\frac{e'i'}{e''}\right)' \frac{e''^2}{e''+e'^2i'^2} \right]^2 + \frac{e'^2e''^2}{e''^2+e'^2i'^2}$$

e quindi si avrà tosto $\rho = \frac{v'}{\mathrm{E}'}$.

Essendo poi $\cos.lv.\rho v = \frac{i'-(\mathrm{R}.v)'}{\mathrm{E}'}$ avremo

$$\mathrm{tang}.lv.\rho v = \frac{e'e''}{\sqrt{e''^2+e'^2i'^2}} : \left[\, i' + \left(\frac{e'i'}{e''}\right)' \frac{e''^2}{e''^2+e'^2i'^2} \right]$$

onde nulla resta a desiderare intorno alla curva considerata.

Corol.° 1.° Abbiamo trovato $\mathrm{tang.R}.v = -\frac{e'i'}{e''} = \frac{\mathrm{R}i'}{\mathrm{R}'}$, e dalla proposizione antecedente si ha $\mathrm{tang.\,M.R}' = \frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}i'}$, onde ne segue $\mathrm{tang.R}.v.\mathrm{tang.R.M} = 1$. la quale ne apprende che la curva dei centri d' osculo è perpendicolare alla retta M.

Corol.° 2.° Se la curva M*m*, di cui sopra, fosse un evoluta della linea G*g*, avremmo $v' = \mathrm{R}'$ ossia $v'^2 = \frac{e''^2}{e'^4} = \mathrm{R}^4e''^2$, e quindi $i' = 0$ ossia $i = 0$; cioè l' evolvente sarebbe una linea piana, come ha osservato credo la prima volta il Monge.

Corol.° 3.° Se la curvatura della linea G*g* è costante, per cui $e'' = 0$, saranno $\mathrm{tang.R}.v = \frac{1}{0}$ ossia la curva dei centri osculatori perpendicolare al raggio R, $v' = \mathrm{R}i'$ ossia $v = \mathrm{R}i + \text{cost.}$, quindi $\mathrm{E}' = i'$ per cui $\rho = \frac{v'}{\mathrm{E}'} = \frac{\mathrm{R}i'}{i'} = \mathrm{R}$. Avremo poi dalla proposizione antecedente $l = 0$, $\mathrm{M} = \mathrm{R}$; cioè la linea dei centri di curvatura sferica coinciderà con quella dei centri osculatori, per cui $\mathrm{I}' = e' = \frac{1}{\mathrm{R}}$, ossia $\mathrm{I} = e = \frac{s}{\mathrm{R}} + \text{Cost}$. Ciascuna delle linee Gg, M*m* sarà la curva dei centri d'osculo dell' altra, come ha osservato il Monge in una elegantissima memoria che verte sull' integrazione delle equazioni che non soddisfanno ai criterj d' integrabilità.

Corol.° 4.° Colle formole trovate si possono risolvere molte questioni. Eccone una per esempio.

Si cerca l' equazione generale di quelle curve l'estensione delle quali, e l' estensione corrispondente della curva dei centri osculatori differiscono di una quantità costante.

L' equazion di condizione sarà $v' = \pm 1$ ossia, attesa la formola (19) sarà

$$e'^4 = e'^2 i'^2 + e''^2.$$

Per introdurre le coordinate si osservi che $e'^2 = p''^2 + q''^2 + r''^2$,

$$e'^4 i'^2 = e'^2 (p'''^2 + q'''^2 + r'''^2) - (p''p''' + q''q''' + r''r''')^2 - e'^6,$$

onde quell' equazione si ridurrà alla seguente

$$p'''^2 + q'''^2 + r'''^2 = 2(p''^2 + q''^2 + r''^2)^2,$$

Se la curva richiesta sarà piana, facilmente si troverà la sua equazione finita.

PARTE SECONDA

DELLE SUPERFICIE GENERABILI DAL MOVIMENTO DI UNA LINEA PIANA QUALUNQUE.

PROPOSIZIONE PRIMA.

Una linea piana si muova nello spazio in maniera che un punto individuato del piano di essa scorra lungo una linea data, roti comunque intorno a quel punto, e la linea medesima varii di grandezza con legge determinata e tale, che il punto in cui il piano della linea generatrice incontra successivamente la curva che ne dirigge il movimento, sia sempre disposto similmente per rispetto alla linea medesima.

Supponendo che si conoscano la linea direttrice, la generatrice e le leggi colle quali questa linea si muove e varia di grandezza, cerchiamo le equazioni della superficie che viene descritta.

Tutte le estensioni che dovremo considerare in appresso le supporrò riferite a tre assi ortogonali Gx, Gy, Gz; e riterremo poi le denominazioni già assunte nella prima parte di questa memoria.

Sia Gg la linea che deve percorrere un punto G individuato nel piano della generatrice considerata nella posizione primitiva, ed M qualunque punto della medesima. Nel mentre che il punto G percorre l'arco G$g=s$, il punto M descriva la curva Mm, e supposto GM$=m$, sia $gam=m.n$, essendo n una funzione data dell'arco G$g=s$, dipendente dalla legge con cui varia la dimensione della curva generatrice. Questa curva considerata allorchè il suo piano passa pel punto g sia *mhf*. Supponiamo che gli assi gx, gy, gz ortogonali accompagnino la generatrice nel suo movimento, di modo che la retta *gex* tocchi costantemente la direttrice Gg, ed il piano *ygz* non roti intorno a quella retta. Sia poi *gcf* la sezione comune al piano della generatrice *gmhf* e al piano *xgy*, e *gbh* una retta arbitraria tracciata nel primo piano. Ciò posto, dal centro g all' intervallo eguale all' unità si descriva la superficie sferica *abcde*, su cui si conduca l' arco di circolo massimo *ad* perpendicolare all'arco *cde*: finalmente si suppongano

$$\text{Arc.}ec=\Delta,\ \text{Arc.}bc=\lambda,\ \text{Ang.}^{\circ}eca=w,$$
$$\text{Arc.}ab=\mu,\ \text{Arc.}ea=\alpha,\ \text{Ang.}^{\circ}aec=\varpi+\theta,$$

e finalmente $\mu+\lambda=\tau$.

Conoscendo gli angoli Δ, λ, w, α, ϖ, e θ che sono funzioni di s, e l'angolo μ funzione di quell'arco della generatrice considerata nella posizione primitiva che corrisponde ad *hm*, il quale indicherò con t, conoscendo dico quegli angoli, si conoscerà la superficie di cui si tratta. Infatti dalla trigonometria sferica abbiamo

$$\text{(I)}\ \cos.a=\cos.\Delta\cos.\tau+\text{sen}.\Delta\,\text{sen}.\tau\cos.w,\ \cot.\omega=\frac{\cot.\tau\,\text{sen}.\Delta-\cos.\varpi\cos.\Delta}{\text{sen}.\varpi}$$

per cui se nelle equazioni (1) della prima parte cambieremo m nel prodotto $m.n$, vi porremo i valori di a, ω forniti dalle precedenti equazioni (I) ed il valore di m espresso per t, quale fornisce l'equazione della generatrice considerata nella prima posizione, eliminando dalle risultanti le variabili t ed s si avrà l'equazione richiesta.

Se poi vi elimineremo soltanto t, si avranno due equazioni che rappresentano la generatrice considerata allorquando il suo piano incontra la direttrice nel punto g, ed eliminando s avremo le equazioni della curva generata dall'estremo variabile M del raggio vettore GM.

PROPOSIZIONE SECONDA

Si cerca l'espressione della superficie di cui abbiamo superiormente parlato.

Si chiami S la parte della superficie richiesta che è compresa fra le curve $mh=\text{I}$, $\text{M}m=v$ ed altre due qualisivogliano: per quanto si è detto nella proposizione quarta della prima parte sarà

$$\left(\frac{d^2\text{S}}{dv.d\text{I}}\right)=\text{sen}.v.\text{I},$$ e quindi siccome $\text{I}=n.t$ avremo

$$\left(\frac{d^2\text{S}}{ds.dt}\right)=n\left(\frac{dv}{ds}\right)\text{sen}.v.\text{I}.$$

Indicato poi con a l'angolo cae e con ξ l'angolo $mv.ms$ formato dai piani che passano per la retta gm e per le tangenti alle curve v ed s, dalla risoluzione dei triangoli sferici avremo $\cot.a=\dfrac{\cot.\Delta\,\text{sen}.\tau-\cos.w\cos.\tau}{\text{sen}.w}$,

$$\cos.v.\mathrm{I} = \cos.l.v.\cos.l.\mathrm{I} + \mathrm{sen}.l.v\,\mathrm{sen}.l.\mathrm{I}.\cos.(\alpha - \xi)$$

ove colla lettera l rappresento la retta $gm = m.n$.

Essendo poi $\mathrm{tang}.l.\mathrm{I} = \frac{m\mu_{,}}{m_{,}}$, ove gli apici posti al piede delle lettere μ ed m indicano le derivate prese per rispetto a t, siccome $m^2\mu_{,}^2 + m_{,}^2 = 1$, avremo $\mathrm{sen}.\,l.\mathrm{I} = m\mu_{,}$, $\cos.l.\mathrm{I} = m_{,}$ e quindi $\cos.v.\mathrm{I} = m_{,}\cos.l.v + m\mu_{,}.\mathrm{sen}.l.v\cos.(\alpha - \xi)$. Ora dalle equazioni (7) (8) cambiatovi m in $m.n$ si hanno

$$v'.\cos.l.v = mn' + \cos.\alpha,\quad v'\mathrm{sen}.l.v.\cos.\xi = \mathrm{sen}.\alpha$$
$$- mn(\alpha' + h'\cos.k\,\mathrm{sen}.\omega + k'\cos.\omega)\,,$$

e quindi per l' equazione (4) avrassi

$$v'\mathrm{sen}.l.v.\mathrm{sen}.\xi = mn[\theta'\mathrm{sen}.\alpha - k'\cos.\alpha\,\mathrm{sen}.\omega$$
$$- h'(\mathrm{sen}.\alpha\,\mathrm{sen}.k - \cos.\alpha\cos.k\cos.\omega)],$$

e finalmente

$$(\mathrm{II})\quad \left(\frac{d^2\mathrm{S}}{ds.dt}\right) = n\sqrt{\left\{\begin{array}{l} [\mathrm{sen}.\alpha - mn(\alpha' + h'\cos.k\,\mathrm{sen}.\omega + k'\cos.\omega)]^2 \\ + m^2n^2[\theta'\mathrm{sen}.\alpha - k'\cos.\alpha\,\mathrm{sen}.\omega - h'(\mathrm{sen}.\alpha\,\mathrm{sen}.k \\ - \cos.\alpha\cos.k\cos.\omega)]^2 + (mn' + \cos.\alpha)^2 \\ - [m_{,}(mn' + \cos.\alpha) + m\mu_{,}\cos.\alpha[\mathrm{sen}.\alpha \\ - mn(\alpha' + h'\cos.k\,\mathrm{sen}.\omega + k'\cos.\omega)] \\ + m^2n\mu_{,}\mathrm{sen}.\alpha[\theta'\mathrm{sen}.\alpha - k'\cos.\alpha\,\mathrm{sen}.\omega \\ - h'(\mathrm{sen}.\alpha\,\mathrm{sen}.k - \cos.\alpha\cos.k\cos.\omega)]]^2 \end{array}\right\}}$$

che è quanto ci siamo proposto di trovare.

È cosa facile l' applicare la nostra formola ai casi particolari, per cui mi limiterò a pochi esempj e ai più comuni.

Uno dei teoremi più importanti sulla quadratura delle superficie si è quello di Guldino. Per darne una dimostrazione assai semplice, divierò per un momento dalla formola (II).

La curva generatrice sia sempre normale alla linea Gg, non roti intorno al punto G, nè varj di grandezza, per il che saranno $n=1$, Ang.$^\circ v.I=90^\circ$, $\alpha=90^\circ$. e quindi mediante la formola (9) della prima parte, avremo

$$\left(\frac{d^2S}{ds.dt}\right)=\left(\frac{dv}{ds}\right)=1-\frac{m.\cos.R\,m}{R}.$$

Nel piano mgf in cui giace il raggio osculatore R della curva Gg si conduca una retta qualunque gbh e si rappresentino rispettivamente con φ ψ gli angoli mgh, $R.gh$, per cui sarà Ang.$^\circ R.m=\varphi-\psi$, ove φ è funzione di t e non di s, e ψ funzione di s soltanto. Avremo quindi

$$\left(\frac{d^2S}{ds.dt}\right)=1-\frac{m}{R}\cos.(\varphi-\psi),\text{ ossia } S=s.t-\int\frac{\cos.\psi}{R}ds\int m.\cos.\varphi.dt$$
$$-\int\frac{\text{sen}.\psi}{R}ds\int m.\text{sen}.\,\varphi.\,dt.$$

Ora se il punto g è il centro di gravità della curva generatrice, estesi gli integrali rispetto a t a tutta la curva medesima, si hanno $\int m.\cos.\varphi dt=0$, $\int m.\text{sen}.\varphi dt=0$, dunque chiamata I la totale estensione di quella linea avremo $S=s.I$ che è quanto ec.

Nei corpi dei quali in pratica occorre spesso di misurare la superficie, il piano della generatrice non rota, e la direttrice è una retta che supporremo essere l'asse Gx. Saranno adunque $\alpha'=\theta'=0$, $h=k=0$ e la formola (II) si trasformerà nella seguente

$$\text{(III)}\quad\left(\frac{d^2S}{ds.dt}\right)=n\sqrt{\Big(\text{sen}.^2\alpha+(mn'+\cos.\alpha)^2-[m_{,}(mn'+\cos.\alpha)}$$
$$\overline{-m\mu_{,}\text{sen}.\,\alpha\cos.\alpha]^2\Big)}.$$

Supponiamo dippiù che il piano xGy arbitrario sia perpendicolare al piano generatore per cui $w=90°$, e fatto $\lambda=0$ avremo

$$\cos.\alpha=\cos.\Delta.\cos.\mu,\quad \cot\alpha=\cot.\Delta\mathrm{sen}.\mu \text{ e quindi,}$$

$\cos.\alpha\,\mathrm{sen}.\alpha=\cos.\Delta\,\mathrm{sen}.\mu$. Introducendo questi valori e sostituendo μ alla variabile t, se ciò riesce più comodo si avrà,

$$\left(\frac{d^2S}{ds.d\mu}\right)=\sqrt{\left([\mathrm{sen}.\alpha^2+(mn'+\cos.\alpha)^2]\left(\frac{dI}{d\mu}\right)^2\right.}$$

$$\left.-\,n^2[(mn'+\cos.\alpha)\left(\frac{dm}{d\mu}\right)+m\cos.\Delta\,\mathrm{sen}.\mu]^2\right)$$

e siccome

$$\left(\frac{dI}{d\mu}\right)^2=n^2\left[m^2+\left(\frac{dm}{d\mu}\right)^2\right],\ \text{posto}\ \left(\frac{dm}{d\mu}\right)=m_{,}\,,$$

si avrà per ultimo

$$\left(\frac{d^2S}{ds.d\mu}\right)=n\sqrt{\left((m^2+m_{,}^2)\mathrm{sen}.^2\Delta+[m^2n+(m\cos.\mu-m_{,}\mathrm{sen}.\mu)\cos.\Delta]^2\right)}.$$

Se la superficie fosse cilindrica avremmo $n'=0$ e quindi dalla formola (III) si caverà

$$\left(\frac{dS}{dI}\right)=s\sqrt{\left(1-\cos.^2\Delta.\cos.^2(lI-\mu)\right)}$$

Se ora si finge $\mathrm{sen}.\lambda=\cos.\Delta\cos.(lI-\mu)$, si potrà descrivere una curva dalla rettificazione della quale dipenda l'integrale che rimane a trovarsi; come già si è fatto sul fine della quarta Proposizione.

Se la superficie è conica sarà, n proporzionale ad s, onde supposto $n=a.s$ si avrà

$$\left(\frac{dS}{d\mu}\right)=\frac{1}{2}as^2\sqrt{\left((m^2+m_{,}^2)\mathrm{sen}.^2\Delta+[am^2+(m\cos.\mu-m_{,}\mathrm{sen}.\mu)\cos\Delta]^2\right)}.$$

Se il cono è retto, essendo $\Delta=90°$, avremo

$$\left(\frac{dS}{d\mu}\right)=\frac{1}{2}as^2\sqrt{(m^2+m_{,}^2+a^2m^4)};$$

se poi il cono è obbliquo, ma la base circolare, supposto $m = 1$ si avrà

$$\left(\frac{dS}{d\mu}\right) = \frac{1}{2}\, as^2 \sqrt{\left(\text{sen.}^2\Delta + (a + \text{cos.}\Delta\,\text{cos.}\mu)^2\right)}$$

che è la formola trovata da Eulero, Leibnitz, ed altri.

PROPOSIZIONE TERZA.

Si cerca il volume del solido terminato dalla superficie considerata superiormente, e da altre qualisivogliano, delle quali si conosca la natura.

Si chiami M il volume del corpo i di cui estremi sono, la superficie S della proposizione antecedente, il piano della generatrice considerato in una posizione qualunque, la superficie generata dalla retta $gm = l$, ed altre superficie di natura conosciuta.

Ritenendo le denominazioni adottate finora, per quanto si è osservato nella Prop. 5. della prima parte si avrà

$$\left(\frac{d^3\text{M}}{dv.d\text{I}.dl}\right) = \text{sen}.v.l\text{I}.\text{sen}.\,l\text{I}\,,$$

siccome poi $\text{sen}.v.l\text{I} = \text{sen}.l.v.\text{sen}.(a - \xi)$, sarà per conseguenza

$$\left(\frac{d^3\text{M}}{ds.d\text{I}.dl}\right) = \left(\frac{dv}{ds}\right) \text{sen}.l.v.\text{sen}.l\text{I}..\text{sen}.(a - \xi).$$

Sostituendo ora i valori delle quantità che formano il secondo membro di questa equazione, quali abbiamo trovati sul principio della proposizione antecedente, ponendovi

$mn = l$, $\text{sen}.l.\text{I} = l\left(\frac{d\mu}{d\text{I}}\right)$, avremo

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^3\text{M}}{ds.d\text{I}.dl}\right) = {} & l\mu_{,}\text{sen}.a[\text{sen}.\alpha - \text{L}'(\alpha' + h'\text{cos}.k\,\text{sen}.\omega + k'\text{cos}.\omega)] \\ & - l^2\mu_{,}\text{cos}.a[\theta'\text{sen}.\alpha - k'\text{cos}.\alpha\,\text{sen}.\omega - h'(\text{sen}.\alpha\,\text{sen}.k \\ & - \text{cos}.\alpha\,\text{cos}.k\,\text{cos}.\omega)\,]\end{aligned}$$

ove $\mu_{,}=\left(\frac{d\mu}{d\mathrm{I}}\right)$: integrando ora per rispetto ad l ed estendendo fra i limiti di $l=o$ e di $l=mn$ si avrà

$$(\mathrm{IV})\quad \left(\frac{d^2\mathrm{M}}{ds.d\mathrm{I}}\right)=m^2n^2\mu_{,}\mathrm{sen}.a\Big(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}.\alpha-\tfrac{1}{3}\,mn(\alpha'+h'\cos.k\,\mathrm{sen}.\omega$$

$$+k'\cos.\omega)]-\tfrac{1}{3}\,m^3n^3\cos.a[\theta'\mathrm{sen}.\alpha-k'\cos.\alpha\,\mathrm{sen}.\omega$$

$$-h'(\mathrm{sen}.\alpha\,\mathrm{sen}.k-\cos.\alpha\cos.k\cos.\omega)\Big)$$

che è la formola cercata.

Mediante questa formola si potrà poi trovare il volume del solido di cui si è parlato nella proposizione.

Veniamo ora alle applicazioni.

Riferirò quì pure una dimostrazione del teorema di Guldino, senza farla dipendere dalla formola (IV), perchè riesca più semplice.

Fingiamo che la grandezza della generatrice resti invariabile, il punto G rappresenti il centro di gravità dell'area terminata da quella linea, ed il suo piano sia sempre perpendicolare alla curva Gg che ne dirigge il movimento. Avremo per conseguenza

$$\mathrm{sen}.v.l\mathrm{I}=\cos.v.s \text{ e quindi } \left(\frac{d^3\mathrm{M}}{ds.d\mathrm{I}.dl}\right)=v'.\mathrm{sen}.l.\mathrm{I}.\cos.v.s;$$

si sostituisca il valore di $v'.\cos.v.s$ che fornisce la formola (9) della prima parte nell' ipotesi di $\alpha=90°$ e si avrà

$$\left(\frac{d^3\mathrm{M}}{ds.d\mathrm{I}.dl}\right)=\left(1-\frac{m\cos.\mathrm{R}.m}{\mathrm{R}}\right)\mathrm{sen}.m.t\,.$$

Supponendo Ang.°R.$m=\phi-\psi$ come nella proposizione, sostituendo ed integrando si ha

$$\mathrm{M}=s\int\!\!\int\mathrm{sen}.m.t\,dm.dt-\int\frac{\cos.\psi}{\mathrm{R}}\,ds\int\!\!\int m.\cos.\phi\,\mathrm{sen}.m.t.dm.dt$$

$$-\int\frac{\text{sen}.\psi}{R}\,ds\int\!\!\int m\,\text{sen}.\varphi\,\text{sen}.m.t.dt.dm\,.$$

Estesi ora gli integrali rispetto a t ed m, a tutta la superficie generatrice, siccome il punto G è il centro di gravità di quella superficie, saranno

$$\int\!\!\int m\cos.\varphi\,\text{sen}.m.t.dt.dm=0,\quad \int\!\!\int m\,\text{sen}.\varphi\,\text{sen}.m.t.dt.dm=0,$$

e siccome $\int\!\!\int \text{sen}.m.t.dt.dm$ rappresenta l'area generatrice, indicata quest'area con A, avremo

$$\text{M}=\text{A}s\quad \text{che è quanto ec.}$$

Supponiamo che l'area generatrice debba essere sempre perpendicolare alla curva che ne dirigge il movimento, per cui saranno $\Delta=\omega=90^\circ$, $\alpha=a=90^\circ$, e $\varpi+\theta=\tau=\lambda+\mu$ e la formola (IV) si ridurrà alla seguente

$$\left(\frac{d^2\text{M}}{d\mu.ds}\right)=m^2n^2\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}mn(h'\cos.k\,\text{sen}.\varpi+k'\cos.\varpi)\right];$$

siccome poi le quantità n, h, k e λ sono funzioni della sola variabile s, ed m funzione soltanto dell'angolo μ, avremo integrando

$$\left(\frac{d\text{M}}{ds}\right)=n^2\int\frac{1}{2}m^2.d\mu-\frac{n^3}{3}(h'\cos.k\cos.\lambda-k'\text{sen}\lambda.)\int m^3\text{sen}.\mu.d\mu$$

$$-\frac{n^3}{3}(h'\cos.k\,\text{sen}.\lambda+k'\cos.\lambda)\int m^3\cos.\mu.d\mu.$$

Fingiamo che il punto in cui l'area generatrice incontra la linea Gg, sia il proprio centro di gravità e saranno visibilmente

$$\int m^3\text{sen}.\mu.d\mu=0,\quad \int m^3.\cos.\mu.d\mu=0;$$

siccome poi chiamata A la totale estensione della generatrice considerata nella posizione primitiva, si ha $\int\frac{1}{2}m^2d\mu=\text{A}$, perciò indipendentemente dalla natura della linea direttrice e dalla legge colla quale la generatrice rota intorno a questa linea avremo

$$M = A\int n^2 ds$$

teorema che parmi degno di qualche osservazione.

Si finga $n = \frac{a-s}{a}$, essendo a costante, come nel caso comune in cui l'asse del cono è rettilineo, si avrà $M = \frac{A}{a^2}\int(a-s)^2 ds$. Integrando quindi ed estendendo fra i limiti di $s = 0$ e di $s = a$ avremo

$$M = \frac{1}{3} A.a.$$

Dunque la regola insegnata da Archimede per trovare la solidità di un cono a base circolare ed estesa dai moderni alla misura dei coni di qualunque base, vale quand'anche l'asse sia una curva e l'area generatrice roti intorno a quell'asse con una legge qualunque, purchè si conservi perpendicolare ad esso.

Particolarizzando ancora più questo teorema ne segue quello di Guldino superiormente dimostrato. Infatti se $n=1$, cioè l'area generatrice non varia durante il suo movimento si avrà

$$M = As.$$

Ognuno vede quali e quante applicazioni potremo fare della nostra formola; mi limiterò per altro alla seguente perchè presenta qualche cosa di nuovo.

La generatrice sia sempre perpendicolare al piano xGy e non roti intorno alla direttrice, inoltre questa linea sia lo stesso asse Gx, onde saranno $h = k = 0$, $\alpha' = \theta' = 0$, $\omega = 90^\circ$. $\lambda = 0$, $\text{sen}.a\,\text{sen}.\alpha = \text{sen}.\Delta$ e $\left(\frac{d^2M}{ds.dI}\right) = \frac{1}{2} m^2 n^2 \mu_{\prime}\,\text{sen}.\Delta$. Fingiamo $n^2 = 2as + bs^2$, ove a, b siano quantità costanti, e finalmente $m=1$. Egli è manifesto che il solido per tal modo generato sarà del secondo ordine ed avremo per esso

$$M = \frac{\mu \text{sen.}\Delta}{2.3} \left(3as + bs^2 \right)s,$$

di quì si ricavano i seguenti teoremi, i quali parmi che si credano tuttora esclusivi ai solidi di rivoluzione.

Se per la retta luogo dei centri dei circoli generatori una superficie di secondo ordine si conducono due piani qualisivogliano, l' unghia solida compresa fra essi ed il piano di uno di quei cerchj è proporzionale all'angolo che formano le rette lungo le quali i primi due piani segano quello del cerchio nominato.

Se la curva che regola le variazioni del circolo generatore è una parabola avremo $b = 0$, onde

$$M = \frac{\mu \text{sen.}\Delta}{4} s.2as = \frac{1}{4} \mu n.^2 s \text{sen.}\Delta, \text{ e se } \mu = 2\pi \text{ sarà}$$

$$M = \frac{1}{2} \pi n.^2 s.\text{sen.}\Delta,$$

cioè il solido terminato dalla superficie generata e dàl piano di un cerchio qualunque vale la metà del cilindro circoscritto.

Supposto che l' equazione della curva regolatrice sia

$$n^2 = \pm \frac{B^2}{A^2} \left(2As - s^2 \right), \text{ cioè supposti } a = \pm \frac{B^2}{A^2},\ b = \mp \frac{B^2}{A^2}$$

fatto $\mu = 2\pi$ avremo

$$M : \pm \pi \left(As^2 - \frac{1}{3} s^3 \right) \text{sen.}\Delta = B^2 : A^2;$$

cioè se la regolatrice è un elissi od un iperbole, il rapporto geometrico che ha il solido terminato dalla superficie di secondo ordine e da un cerchio qualunque, alla differenza dei volumi di un cilindro obbliquo dell' angolo Δ, di cui l'altezza ed il raggio della base sono rispettivamente il semidiametro della curva regolatrice, luogo dei centri de' circoli generatori, e la parte di questo o del suo prolungamento, intercetta dal solido che si considera, e del cono rettangolo obbliquo pure dell'angolo Δ, che ha per asse la stessa parte dell' asse nominata; il rapporto geometrico di questi solidi eguaglia quello che hanno fra loro il quadrato del diametro della direttrice conjugato al suddetto e di questo diametro medesimo.

Pongo fine al presente lavoro con un' altra osservazione relativa al teorema di Guldino. È noto ai Geometri quanto siasi scritto intorno a questo argomento, e come venisse ampliato da Eulero, Bernoulli, Vincenzo Riccati, e da Monge; parmi però che esso riceva, se l'amor del vero non m'inganna, una nuova rimarcabile estensione dal teorema dimostrato nella terza proposizione di questa seconda parte. Nessun Geometra poi prima del Chiar. Professor Bordoni sembrami aver osservato che regge il teorema di Guldino, anche quando l'area generatrice ruoti intorno al proprio centro di gravità, e tutti ammisero, ma nessuno ha dimostrato che le altre condizioni siano essenziali, prima di quell'illustre Geometra nel XX. Volume degli Atti di questa celebre Società delle Scienze. Siccome però la parte del teorema reciproco del Sig. Bordoni, cioè quella che riguarda la genesi delle superficie lascia forse tutt'ora qualche cosa a desiderare, così ho divisato di tentare la dimostrazione di quella parte, cioè di provare che se la superficie generata dal movimento di una linea piana qualunque è proporzionale al prodotto dell' estensione di quella linea, e dell'altra che vien descritta dal proprio centro di gravità, il piano della generatrice sarà sempre perpendicolare alla curva percorsa dal centro nominato, e quando la linea generatrice non sia un cerchio, non potrà rotare intorno al centro medesimo.

Immaginiamo la generatrice nella sua posizione primitiva. Conduciamo pel suo centro di gravità G tre assi ortogonali Gx, Gy, Gz, di cui i primi giacciano nel piano di quella linea. Siano x, y le coordinate di un suo punto qualunque, e fingiamo che allorquando il punto G occupa il luogo cui corrispondono le coordinate p, q, r, siano x', y', z' quelle del punto nominato della generatrice ed s l' estensione della curva percorsa dal centro suddetto.

Fra le coordinate x, y, x', y', z', p, ed r sussisteranno le seguenti equazioni

$$(1) \qquad x'=p+ax+a'y,\; y'=q+bx+b'y,\; z'=r+cx+c'y$$

ove le quantità a, a', b ec. che sono funzioni di s, rappretano coseni di angoli.

Indicando ora con t l'arco della generatrice compreso fra l' asse Gx ed il punto x, y, e con S quella parte della superficie che si considera, la quale è intercetta fra le curve descritte da un estremo della generatrice, e dal punto x, y; e l' intera generatrice considerata nella posizione primitiva e nella seconda; per l' enunciato del teorema dovrà essere $S=H.T.s$: essendo H una quantità costante, e T la lunghezza totale della generatrice.

Ora siccome

$$\left(\frac{d^2S}{dt.ds}\right)=\sqrt{\left[\left(\left(\frac{dx'}{dt}\right)\left(\frac{dy'}{ds}\right)-\left(\frac{dy'}{dt}\right)\left(\frac{dx'}{ds}\right)\right)^2+\left(\left(\frac{dy'}{dt}\right)\left(\frac{dz'}{ds}\right)\right.\right.}$$
$$\sqrt{\left.\left.-\left(\frac{dz'}{dt}\right)\left(\frac{dy'}{ds}\right)\right)^2+\left(\left(\frac{dz'}{dt}\right)\left(\frac{dx'}{ds}\right)-\left(\frac{dz'}{ds}\right)\left(\frac{dx'}{dt}\right)\right)^2\right]}.$$

Se si formano le derivate per rispetto a t e ad s delle equazioni (1) coll' avvertenza che le quantità p, q, r, a, a' ec. sono funzioni di s e non di t, ed x, y sono funzioni di questa variabile t ma non della prima, si avrà

$$\left(\frac{dz'}{dt}\right)\left(\frac{dx'}{ds}\right)-\left(\frac{dz'}{ds}\right)\left(\frac{dx'}{dt}\right)=A\left(\frac{dx}{dt}\right)+B\left(\frac{dy}{dt}\right),$$

più termini moltiplicati per i prodotti di una qualunque delle quantità x ed y per le derivate $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, e dove per brevità ho supposto

$$A = c\left(\frac{dp}{ds}\right) - a\left(\frac{dr}{ds}\right),\quad B = c'\left(\frac{dp}{ds}\right) - a'\left(\frac{dr}{ds}\right),$$

Così avremo

$$\left(\frac{dy'}{dt}\right)\left(\frac{dz'}{ds}\right) - \left(\frac{dz'}{dt}\right)\left(\frac{dy'}{ds}\right) = A'\left(\frac{dx}{dt}\right) + B'\left(\frac{dy}{dt}\right) + \text{ecc.},$$

$$\left(\frac{dx'}{dt}\right)\left(\frac{dy'}{ds}\right) - \left(\frac{dy'}{dt}\right)\left(\frac{dx'}{ds}\right) = A''\left(\frac{dx}{dt}\right) + B''\left(\frac{dy}{dt}\right) + \text{ecc.}$$

ove il significato di A', B' ec. è analogo a quello di A, e B.

Supponiamo ora espressa la variabile y da una serie ordinata per rispetto alle potenze crescenti dell' arco t e sia $y = Mt^m + Nt^n + \text{ec.}$ ove non può essere $m < 1$, altrimenti a $t = 0$ corrisponderebbe $\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{0}$, il che è assurdo.

Noi supporemo che l'arco generatore della superficie S abbia le estremità nei punti a cui corrispondono $t = \tau$ e $t = \tau'$, onde sarà $T = \tau - \tau'$, quindi nelle serie che forniscono i valori di x, y ec. espressi per t, terremo a calcolo solo quei termini i quali non contengono alcuna dimensione delle quantità t, τ e τ'. Del che se ne vedrà tosto la ragione.

Essendo G il centro di gravità dell'arco T sarà $\int_{\tau'}^{\tau} y\,dt = 0$ ossia

$$\frac{M}{m+1}\left(\tau^{m+1} - \tau'^{m+1}\right) + \frac{N}{n+1}\left(\tau^{n+1} - \tau'^{n+1}\right) + \text{ec.} = 0$$

per cui il parametro M conterrà almeno $n - m$ dimensioni degli archi τ, τ', e sarà per conseguenza $y = 0$, $\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$.

Dall'equazione $\left(\frac{dx}{dt}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ si hanno $\left(\frac{dx}{dt}\right) = 1$, $x = t + \text{Cost.}$, ove i termini ommessi contengono dimensioni di t, τ e τ' maggiori della prima.

Siccome poi $\int_{\tau'}^{\tau} x\,dt = 0$, ossia $(\tau - \tau')\text{cost.} + \frac{1}{2}(\tau^2 - \tau'^2) + \text{ec.} = 0$, avremo Cost.$=0$ ed $x=0$. Sostituendo ormai i valori trovati nell' equazion di condizione, eseguendo l'integrazione rispetto a t ed estendendo da $t=\tau$ a $t=\tau'$ si avrà

$$(\tau-\tau')\int\sqrt{(A^2+A'^2+A''^2)}\,ds+\text{ec.}=H(\tau-\tau').s,$$

ove i termini ommessi nel primo membro contengono potenze di τ, τ' non minori della seconda. Dunque quell' equazione non può essere identica quando non sia

$$\int\sqrt{(A^2+A'^2+A''^2)}\,ds=Hs,$$

qualunque siasi s, cioè

$$\sqrt{(A^2+A'^2+A''^2)}=H,$$

o finalmente

$$\sqrt{\Big[\Big[c\left(\frac{dp}{ds}\right)-a\left(\frac{dr}{ds}\right)\Big]^2+\Big[a\Big(\frac{dq}{ds}-b\left(\frac{dp}{ds}\right)\Big]^2}$$

$$+\Big[b\left(\frac{dr}{ds}\right)-c\left(\frac{dq}{ds}\right)\Big]^2\Big]=H,$$

la quale ne indica che considerata la generatrice in qualunque posizione che movendosi assume la tangente alla curva descritta dal centro di gravità, ed una retta qualunque Gx condotta nel piano della generatrice, dovranno formare un angolo di grandezza costante; ossia la detta tangente dovrà essere perpendicolare al piano della medesima generatrice.

Rappresentiamo ora con v l'arco descritto dal punto x,y e si avrà

$$\left(\frac{d^2S}{dv.dt}\right)=\text{sen}.v.t \text{ ossia } \left(\frac{d^2S}{dt.ds}\right)=\left(\frac{dv}{ds}\right)\text{sen}.v.t\,.$$

Ma dalla formola (9) della prima parte si ha $\left(\frac{dv}{ds}\right)\cos.v.s=1-\frac{m}{R}\cos.R.m$, ove $m=\sqrt{x^2+y^2}$, ed R è il raggio osculatore, della linea s nell' estremo variabile di sua lunghezza: avremo perciò

$$\left(\frac{d^2S}{dt.ds}\right)=\left(1-\frac{m}{R}\cos.R.m\right)\frac{\text{sen}.v.t}{\cos.v.s}\,.$$

Siccome poi nel caso presente Ang.$^o m.v=90^o$, come si è provato nella Proposizione 3.^{a} della prima parte, si proverà facilmente colla trigonometria sferica che $\cos.v.t=\text{sen}.v.s.\text{sen}.m.t$ onde

$$\frac{\text{sen}.\,v.t}{\cos.v.s}=\sqrt{(1+\cos.^2 m.t.\,\text{tang}.^2 v.s)}\ ,\ \text{e}$$

$$\left(\frac{d^2S}{dt.ds}\right)=\left(1-\frac{m}{R}\cos.R.m\right)\sqrt{(1+\cos.^2 m.t\,\text{tang}.^2 v.s.)}\,.$$

Ciò premesso osserviamo che se in qualche posizione della curva generatrice il perimetro di essa segasse la superficie sviluppabile descritta dal suo piano, più non avrebbe luogo il teorema di cui si tratta, e siccome questa superficie non è altro che il luogo delle evolute della curva direttrice, così non potrà essere giammai $R:\cos.R.m<m$ ossia $1-\frac{m}{R}\cos.R.\,m<0$.

Il minimo valore poi che può ottenere l' espressione $\sqrt{(1+\cos.^2 m.t.\text{tang}.^2 v.s)}$ essendo l'unità, avremo

$$\left(1-\frac{m}{R}\cos.R.m\right)\sqrt{(1+\cos.^2 m.t.\text{tang}.^2 v.s)}\text{non}<1-\frac{m}{R}\cos.R.m,$$

e quindi

$$\int\!\!\int\left(1-\frac{m}{R}\cos.R.m\right)\sqrt{(1+\cos.^2 m.t.\text{tang}.^2 v.s)}dt.ds$$

$$>\int\!\!\int\left(1-\frac{m}{R}\cos.R.m\right)dt.ds$$

cioè maggiore di T.s, come risulta dalla proposizione seconda di questa seconda parte.

Dunque la condizione $S=T.s$ non potrà essere soddisfatta a meno che si abbia $\cos.m.t.\tang.v.s=0$ cioè $\cos.m.t=0$, ossia la curva generatrice una circonferenza, ovvero $\tang.v.s=0$, vale a dire le rette che toccano le linee descritte da qualunque punto della generatrice e dal suo centro di gravità, la dove le medesime vengono incontrate dalla generatrice, tali rette dovranno essere parallele fra loro, ossia la generatrice non dovrà rotare intorno al proprio centro di gravità, che è quanto ci restava a provare.

ESPERIENZE
SULLE CONTRAZIONI PARZIALI DELLE VENE D'ACQUA.

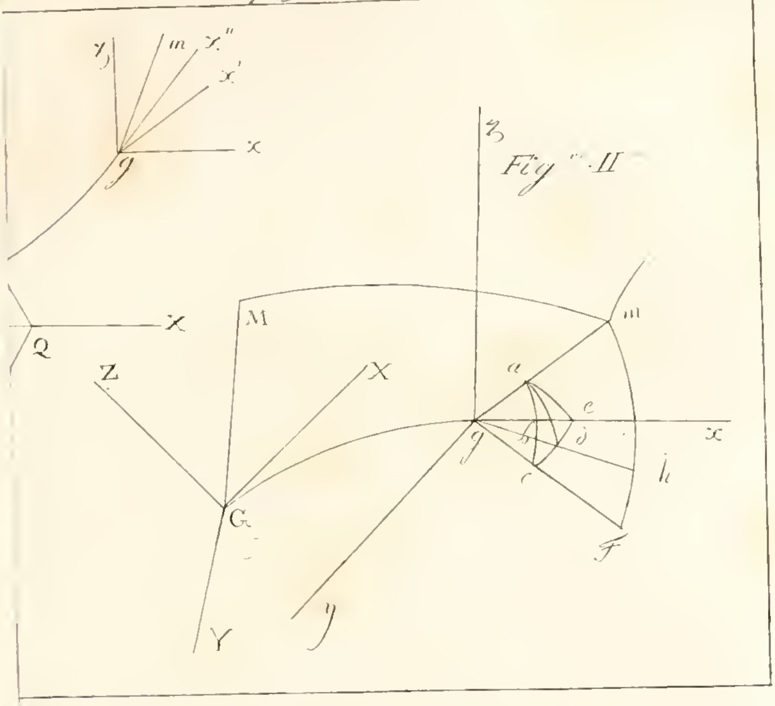
MEMORIA
DEL PROFESSORE GIORGIO BIDONE

Ricevuta adì 20. *Marzo* 1830.

Una vena d' acqua all' uscire da una luce aperta in lastra sottile si ristrigne e si contrae rispetto a tutto il perimetro della luce, e prende la forma di un cono o di una piramide tronca convergente, la cui base maggiore è circoscritta dal perimetro interno della luce, e la base minore è al sito della massima contrazione, posta a poca distanza dalla luce. Questa vena pertanto tocca il solo perimetro interno della luce, senza toccare nè il perimetro esterno della medesima, nè la grossezza della lastra compresa tra questi due perimetri.

Affinchè una luce possa dirsi in lastra sottile, oltrechè essa deve essere intagliata perpendicolarmente alla lastra, e la grossezza di questa deve in generale essere minore della distanza del perimetro interno della luce al sito della massima contrazione della vena, si richiede ancora che la luce sia situata a sufficiente distanza dalle pareti del vaso adjacenti a quella in cui essa è praticata, perchè l'afflusso del liquido alla luce sia libero da ogni banda, e le particelle del medesimo, situate sul piano della lastra della luce, arrivino al perimetro interno di questa scorrendo su questo piano. Noi chiameremo *contrazione totale* quella delle vene sgorganti da luci, le quali soddisfanno alle anzidette condizioni, e sono per-

T° XX Matem. pag 536. Tav. V.


z
m
x''
x'
x
g
X
Q
Z
M
X
G
Y
y
z
Fig. II
m
a
e
b
d
x
g
h
c
F

rispetto ad alcuni lati della luce, e sussistere rispetto agli altri lati. Per distinguere queste contrazioni sussistenti dalla contrazione totale, noi le chiameremo *contrazioni parziali*, e con questa denomina-

Mem. della Soc. Ital. T.° XX Matem. pag. 536. Tav. V.

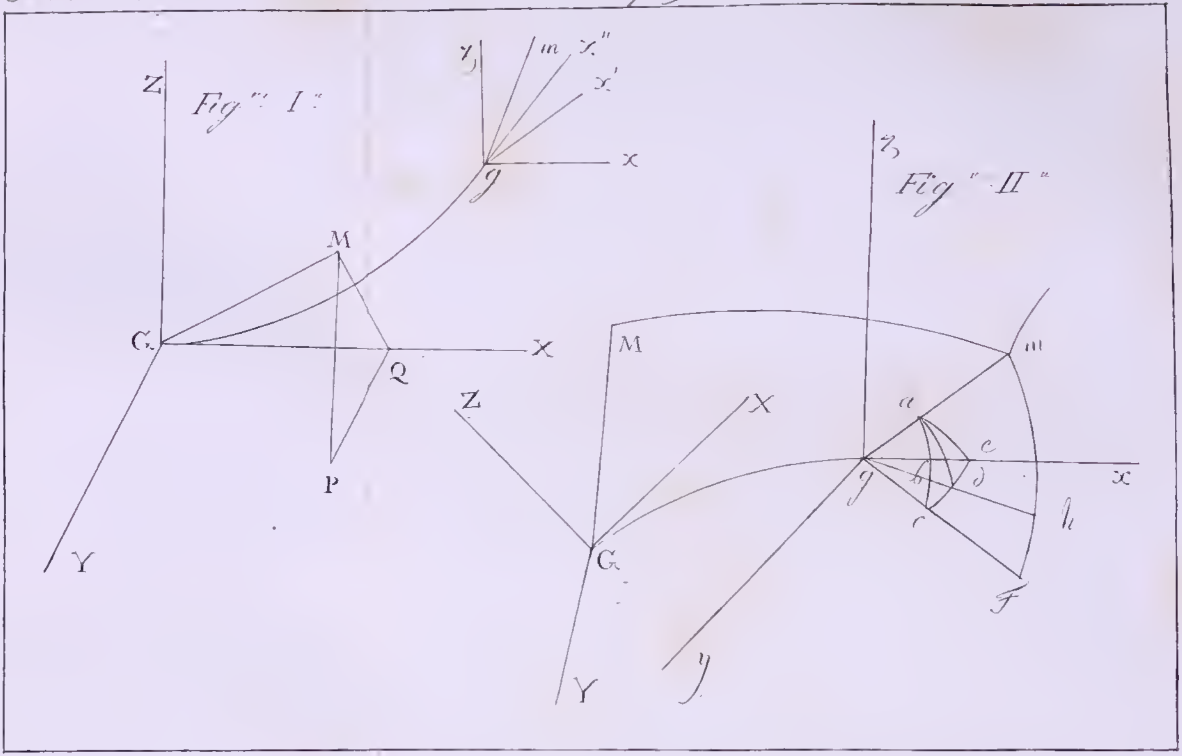


Fig.ra I.a

Fig.ra II.a

Z
X
Y
G
M
Q
P
g
x
η
m
x''
x'
Z
X
Y
G
M
η
x
y
g
m
a
b
c
d
e
h
F

ciò in lastre o in pareti *sottili*. La diminuzione cagionata da sì fatta contrazione nella portata di queste luci è stata osservata e misurata da molti con varie e numerose esperienze.

Sia ora una luce rettangola, praticata in una parete verticale e sottile di un vaso prismatico rettangolo, e questa luce sia situata in modo che il suo lato orizzontale inferiore si trovi sul fondo del vaso, ed i suoi due lati verticali siano assai lontani dalle pareti verticali del vaso, laterali a quella in cui è aperta la luce. Ciò posto, durante l'efflusso da questa luce, le particelle dell' acqua contigue al fondo arriveranno alla luce scorrendo su un piano ad essa perpendicolare, e ne usciranno toccandone il lato inferiore interno ed il lato inferiore esterno, e scorrendo sulla grossezza della parete compresa fra questi lati. Per questa luce pertanto non vi sarà contrazione della vena rispetto al lato inferiore; ma sussisterà una contrazione rispetto a ciascuno degli altri tre lati.

La stessa luce rettangola venga situata in uno degli angoli inferiori del vaso prismatico, di maniera che essa abbia tuttavia il suo lato inferiore sul piano del fondo del vaso, ed abbia inoltre un lato verticale sul piano della vicina parete verticale del vaso. In questa situazione della luce la vena non avrà contrazione rispetto a due lati; ma essa ne avrà una rispetto a ciascuno degli altri due.

Similmente la situazione e le dimensioni della luce rettangola possono essere tali, che il suo lato orizzontale inferiore sia sul fondo del vaso, e ciascuno de' suoi lati verticali si trovi su una delle pareti verticali, fra le quali è compresa quella, in cui è aperta la luce. Per questa luce non vi sarà contrazione rispetto al lato inferiore e ai lati verticali; ma sussisterà una contrazione rispetto al lato superiore.

Da questi esempj si vede che la contrazione di una vena può essere distrutta ed annientata rispetto ad alcuni lati della luce, e sussistere rispetto agli altri lati. Per distinguere queste contrazioni sussistenti dalla contrazione totale, noi le chiameremo *contrazioni parziali*, e con questa denominazione intenderemo in generale le contrazioni delle vene che escono da luci, per le quali sono soddisfatte tutte le condizioni richieste nelle luci dette in lastre sottili, salvo che in queste vene la contrazione si fa solamente su una o su più parti del perimetro delle luci, e sulle altre parti essa è distrutta in modi eguali o equivalenti a quelli ora riferiti. Pertanto, mentre la contrazione totale delle vene presenta un sol caso, ed è sempre presso a poco la stessa, qualunque sia la luce, le contrazioni parziali presentano infiniti casi diversi, dipendenti dalla figura delle luci, e dalle parti del perimetro delle stesse luci, rispetto alle quali la contrazione sussiste. Noi ci siamo proposto di determinare esperimentalmente l'effetto di alcuni di questi casi sulla portata delle luci.

La contrazione di una vena, che spiccia da una luce aperta in lastra sottile, si può togliere rispetto ad uno o a più lati, adattando a ciascuno di questi, presi sulla faccia interna della luce, una lastra piana e perpendicolare alla luce. Con tali lastre, sufficientemente estese per tutti i versi, viene annullata la contrazione della vena rispetto ai lati, ai quali esse sono applicate. Le luci preparate in tal modo, e le contrazioni parziali delle loro vene sono così ridotte al massimo grado di semplicità e di precisione, e le une e le altre possono sempre con somma facilità riprodursi ed ottenersi in circostanze affatto eguali. Per la qual cosa noi ci siamo serviti di luci così preparate come le più adattate a somministrare, per via degli efflussi dalle medesime, la determinazione dell' effetto delle contrazioni parziali sulla portata delle luci, distinto e non confuso con altri effetti provenienti da altre cause di aumento o di diminuzione della stessa portata.

Fra i casi di efflusso osservati da *Dubuat* se ne trovano pure alcuni, ne' quali la contrazione è distrutta su qualche lato della luce: ma questi casi sono per la maggior parte accompagnati da altre circostanze, come da tubi o da canali applicati alla faccia esterna della luce, da stramazzi e simili, le quali, alterando ancor esse l' efflusso, non permettono di ottenere dal medesimo l' effetto separato e distinto della sola contrazione parziale sulla portata della luce.

Nel 1793 il *P. Bartolommeo Ferrari* pubblicò nelle sue opere le seguenti esperienze da lui fatte sulla portata di una luce quadra di nove linee del piede di Parigi di lato, aperta in una parete verticale e sottile di un vaso prismatico. Questa luce era preparata internamente con lastre piane nel modo sopra indicato ora sui due soli lati verticali, ora su questi, e sul lato orizzontale inferiore. Egli osservò che quando il canale formato dalle due lastre verticali e dalla lastra inferiore orizzontale aveva le sponde alte come i lati verticali della luce, l'acqua del vaso, uscendo dalla luce, impiegava un po' meno di tempo ad abbassarsi sino al lato superiore della luce di quello che essa impiegava pel medesimo abbassamento, quando la luce era nuda e senza l'anzidetto canale. Avendo poi cambiato le sponde di questo canale e postone due altre, l'altezza delle quali sopravvanzava tredici volte quella della luce, egli trovò che il tempo impiegato dall'acqua ad abbassarsi nel vaso sino alla sommità di queste nuove sponde era eguale a quello impiegato dall'acqua ad abbassarsi all'istesso segno, quando la luce era nuda e senza canale. E trovò pure che per l'anzidetto abbassamento il tempo era ancora il medesimo quando si lasciavano ferme al loro sito le nuove sponde, e si toglieva il fondo del canale. Quando poi l'acqua contenuta nel vaso, continuando a fluire dalla luce, si abbassava al di sotto della sommità di queste nuove sponde, egli ossevò che il pelo dell' acqua compresa fra esse era inclinato verso la luce, e più basso del pelo dell'acqua esterna a queste sponde: e perciò egli non fece alcun paragone tra i tempi di questo efflusso, e quelli dell' efflusso dalla luce nuda, come cosa troppo complicata e soggetta a molte dubbiezze.

Fra gli autori posteriori, senza che da essi si faccia menzione di queste esperienze del *P. Ferrari*, forse poco note o giudicate insufficienti alla determinazione dell' effetto delle contrazioni parziali sulla portata delle luci, alcuni dicono che questo effetto è diverso da quello della contrazione totale, ma non propongono il modo di valutarlo. Altri stabiliscono che la diminuzione cagionata da queste contrazioni parziali alla portata della luce sta alla diminuzione cagionata dalla contrazione totale, come la parte del perimetro sulla quale si fa la contrazione parziale, sta a tutto il perimetro della luce. Alcuni poi o non fanno parola delle contrazioni parziali o non ne espongono i varii casi: così il *Sig. Eytelwein*, il quale riferisce i valori di un gran numero di contrazioni diverse, ricavati dalle proprie o dalle altrui esperienze, non considera, fra le contrazioni parziali delle quali ora si ragiona, se non quella di una vena che esce da una luce rettangola e verticale col suo lato inferiore situato sul fondo piano di un vaso, e colla scorta di *Dubuat* il quale aveva già osservato questo efflusso, arreca il valore di questa contrazione parziale. Parecchi finalmente, massime fra i pratici, pensano che quando in una vena sgorgante da una luce in lastra sottile, la contrazione è distrutta su uno o su più lati, la contrazione sussistente sugli altri lati equivale sempre a *tutta* la contrazione della stessa vena, cioè a quella che si farebbe su tutto il perimetro della luce, e che noi abbiamo chiamata contrazione totale.

In tale diversità di opinioni circa i valori delle contrazioni parziali, ed in mancanza di esperienze atte a somministrarli, ho fatto nel 1821, su queste contrazioni, e con luci quadre di mezzo pollice di lato, una serie di esperienze, le quali si trovano esposte nel tomo XXVII *delle Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino*. Dai valori delle contrazioni parziali da esse ricavati risulta che queste contrazioni diminuiscono meno la portata della luce, di quello che la diminuisce la contrazione totale; e risulta pure che queste diminuzioni non istanno tra loro nelle ragioni delle rispettive parti del perimetro, sulle quali si fa la contrazione.

Questi valori, e questi risultamenti, ottenuti da una sola serie di esperienze fatte con luci assai piccole, e con un vaso in cui l'acqua, non rifornita durante l'efflusso, formava dal principio alla fine di ciascuna esperienza un battente variabile da 40 a 24 volte l'altezza della luce, meritavano di essere confermati con altre serie di esperienze fatte con luci più grandi e con battenti costanti, altri maggiori ed altri minori degli anzidetti, rispetto all'altezza delle luci. Queste nuove serie di esperienze ho eseguito nell'autunno del 1829. all'*Edifizio Idraulico della Regia Università di Torino*, e l'esposizione dei risultamenti somministrati dalle medesime forma l'argomento della presente Memoria, la quale è divisa in sette paragrafi.

Nel primo di essi descrivo il modo con cui ho annullato la contrazione della vena rispetto ad uno o a più lati della luce aperta in lastra sottile. Questo modo, accennato di sopra, e già praticato nelle esperienze fatte nel 1821, consiste nell'adattare ad uno o a più lati interni della luce lastre piane e rettangole, perpendicolari al piano della luce. Queste lastre così disposte formano l'*armatura interna* della luce. In ogni esperienza vengono notate le dimensioni delle medesime lastre, e dei loro *prolungamenti* al di là delle estremità dei lati cui esse vengono applicate, e che noi chiamiamo lati *armati*. Per le luci circolari le lastre dell'armatura si incurvano in modo che le loro faccie sono cilindriche, perpendicolari alla luce, e terminate da prolungamenti piani, piegati secondo la direzione dei raggi che passano per le estremità dell'arco armato.

Questo modo di togliere la contrazione della vena rispetto ad uno o a più lati della luce, armando internamente questi lati con lastre piane, perpendicolari alla luce, è esattamente determinato, e non vuolsi confondere con quello, in cui, in vece di lastre piane, si adoprassero lastre incurvate a guisa di porzioni di quegli imbuti i quali si applicano alle luci internamente per tentare di annientare tutta la contrazione della vena rispetto a tutto il loro perimetro. I risultamenti che si otterrebbero con lastre così incurvate, potrebbero essere diversi da quelli ottenuti con lastre piane o cilindriche: poichè è da notarsi che la condizione essenziale, cui le lastre dell'armatura interna debbono soddisfare per togliere la contrazione, si è che l'acqua, scorrendo sopra di esse, abbia, alla sua uscita dalla luce, una direzione tangente alla lastra e ad un tempo perpendicolare al piano della luce. Ora per conseguire ciò con lastre incurvate a foggia d'imbuti converrebbe conoscere la giusta curvatura da darsi a queste lastre, la quale non essendosi sinora determinata nè colla teoria nè colla esperienza, rimane incerta ed arbitraria: anzi tutte le esperienze portano a credere, che negli imbuti interni ricurvi sin quì adoperati la superficie della vena si stacchi dai medesimi alquanto prima della sua uscita dalla luce, e che, staccandosi così, la stessa superficie abbia qualche convergenza verso l'asse della luce, di maniera che la vena si contragga alcun poco a qualche distanza dalla luce. All'opposto l'anzidetta condizione si ottiene esattamente con lastre piane o cilindriche, abbastanza estese ed applicate solamente a parte del perimetro: Durante l'efflusso l'acqua esce dalla luce scorrendo su queste lastre, e la sua direzione è per conseguenza tangente alle medesime e perpendicolare al piano della luce. Ora è appunto quando e dove la vena esce perpendicolarmente al piano della luce che la sua contrazione è distrutta.

Il secondo paragrafo contiene una serie di esperienze fatte con luci quadre verticali, di un pollice di lato, assai prossimamente, con battenti costanti in ciascuna esperienza, ma variabili dall'una all'altra da 72. a 255. volte l'altezza della luce. I risultamenti di queste esperienze concordano assai bene con quelli delle esperienze fatte nel 1821. Le differenze tra gli uni e gli altri, tutte assai piccole, debbono principalmente attribuirsi alla diversità delle dimensioni delle armature adoperate nelle esperienze dell'una e dell'altra serie.

Nel paragrafo terzo si espone una serie di simili esperienze fatte con una luce verticale quadra di quattro pollici di lato, con piccoli battenti, costanti in ciascuna esperienza, ma variabili da una esperienza all'altra: essi erano però sempre tali, che in nessuna delle esperienze i prolungamenti dell'armatura sporgevano fuori della superficie dell' acqua contenuta nel vaso. Gli anzidetti battenti, misurati dal lato superiore della luce, erano da una volta e un terzo a due volte e mezzo l'altezza della luce. Pertanto le esperienze di questa serie differiscono dalle precedenti e per la grandezza della luce e per la piccolezza dei battenti, rispetto all'altezza della medesima luce. Dal che ne segue che durante l'efflusso la velocità nei punti più alti della luce è notabilmente minore della velocità nei punti più bassi. Con tuttociò i risultamenti di queste esperienze si scostano poco da quelli delle altre esperienze.

Il paragrafo quarto presenta raccolti in una tavola i valori delle contrazioni parziali somministrati dalla serie delle esperienze fatte nel 1821, e dalle due serie di quelle esposte nei paragrafi precedenti. Queste tre serie sono assai distinte tra loro per le dimensioni delle luci e delle armature, per le grandezze dei battenti, e per la natura dell'efflusso, durante il quale nella prima serie il vaso si vuotava e nelle altre esso era mantenuto costantemente pieno all'istessa altezza.

Nel paragrafo quinto si ricavano per ogni serie di esperienze, i valori medii di ciascuna delle tre contrazioni parziali considerate in queste esperienze, cioè di quelle che si fanno solamente o rispetto a tre lati della luce, o rispetto a due o rispetto a uno, qualunque siano questi lati, o verticali o orizzontali o paralleli o contigui. Dai valori medii particolari di ciascuna delle due prime serie si ricavano altri valori medii più estesi, e che abbracciano i casi, ne' quali il battente è da 24 a 255 volte l'altezza della luce. Finalmente da questi e dai valori medii particolari della terza serie si formano i valori medii generali delle anzidette contrazioni parziali, estesi così ai casi di luci quadre verticali da mezzo pollice a quattro pollici di lato, con battenti da una volta e un terzo a 255 volte l'altezza della luce.

Esprimendo, secondo il metodo comune, il valore della contrazione per mezzo di un coefficiente μ, col quale si deve moltiplicare la portata della luce calcolata nell'ipotesi del moto lineare de' liquidi, si hanno, pei valori medii generali delle anzidette contrazioni parziali,

$$\mu = 0{,}6073\,;$$

$$\mu' = 0{,}6297;$$

$$\mu'' = 0{,}6542\,;$$

$$\mu''' = 0{,}6922;$$

ove μ è il valore della contrazione totale, e μ', μ'', μ''' sono i valori delle contrazioni parziali su tre lati, su due, e su un solo, rispettivamente.

Il paragrafo sesto contiene alcune altre esperienze fatte colla sopraddetta luce quadra verticale di quattro pollici di lato. La contrazione si faceva solamente sul lato orizzontale superiore, ed i battenti erano piccoli in modo, che i prolungamenti verticali dell'armatura sporgevano fuori della superficie dell'acqua contenuta nel vaso. Calcolando la portata ottenuta con queste esperienze colla formula adoperata per le altre esperienze fatte colla medesima luce, risulta che il valore di μ''' cresce a misura che il battente è minore, nei limiti però dei battenti coi quali si sono fatte queste esperienze. Dall'ultima di esse si trova $\mu''' = 0{,}7603$, valore assai più grande di quello ottenuto dall'istessa luce, armata nell'istesso modo, ma con battenti più alti dei prolungamenti dell'armatura.

Nel paragrafo settimo ed ultimo riferisco altre esperienze sulle contrazioni parziali fatte con luci piccole e verticali, alcune rettangole ed alcune circolari, armate su qualche porzione del loro perimetro, e con battenti costanti da 70 a 255 volte l'altezza delle luci. I risultamenti di queste esperienze concordano coi precedenti, e dimostrano anch'essi che le luci armate internamente nel modo sopra detto su qualche parte del loro perimetro somministrano maggiore quantità d'acqua, che le medesime luci non armate; e dimostrano pure che questi aumenti della portata sono assai minori di quelli che si desumerebbero dalle ragioni delle rispettive parti del perimetro, sulle quali si fa la contrazione.

Le esperienze e i risultamenti esposti nella presente Memoria possono riguardarsi come abbastanza compiuti e conchiudenti per le luci quadre verticali, per le quali la contrazione della vena si faccia solamente o su tre lati, o su due, o su uno, qualunque siano questi lati, e qualunque sia il battente, purchè i prolungamenti dell' armatura non isporgano fuori della superficie dell' acqua contenuta nel vaso. Ma a rendere compiuta la parte esperimentale delle contrazioni parziali delle vene manca ancora molto. Poichè sono pure da farsi con luci rettangole non quadre esperienze simili a quelle fatte con luci quadre. Poi colle une e colle altre luci sono da esperimentarsi i casi, ne' quali la contrazione è distrutta non su tutta la lunghezza di uno o di più lati, ma solamente su una parte di questa lunghezza: e simili esperimenti sono da farsi con luci circolari, distruggendo la contrazione su una o su più porzioni del loro perimetro.

I risultamenti di tali esperienze, oltrechè contribuiranno ai progressi dell' Idrodinamica, saranno immediatamente applicabili ed utili all' Idrometria pratica, poichè non sono rari i casi, in cui l'acqua passa per luci e per aperture, nelle quali la contrazione si fa solamente su alcuni lati. Talvolta poi, per ottenere da una vena o da una corrente d' acqua quel tal effetto che si desidera, è d'uopo annientarne la contrazione rispetto ad alcuni lati della luce, dalla quale esce la vena o la corrente. Così il *Sig. Poncelet* nelle sue esperienze fatte nel 1826 sulla ruota idraulica a palmette cilindriche da lui immaginata, le quali ricevevano l'acqua da una luce, il cui lato inferiore era situato sul fondo stesso del vaso, ha riconosciuto essere cosa vantaggiosa il togliere nel modo sopraddetto la contrazione anche rispetto ai due lati contigui al lato inferiore della luce.

Noteremo in fine che colle armature interne adoperate per annientare la contrazione della vena rispetto a qualche porzione del perimetro della luce, si producono ad un tempo tre effetti distinti: *Si cambia la forma della vena; se ne cambia la direzione; e si aumenta la portata della luce.* Sui due primi effetti abbiamo eseguito speciali ed estese esperienze riferite nella Memoria intitolata *Experiences sur la forme et sur la direction des veines et des courans d'eau, lancés par divers ouvertures*, stampata nel tomo XXXIV. *della Reale Accademia delle Scienze di Torino.* Quanto all'aumento della portata, abbiamo procurata, rispetto alle luci quadre verticali, di rendere, colle esperienze esposte nella presente Memoria, più generali le ricerche esperimentali che avevamo già fatte sulle luci di questa forma.

§. I.

Per annullare la contrazione della vena rispetto ad uno o a più lati di una luce rettilinea, aperta in una parete piana e sottile, ho adoperato una *armatura*, la quale consiste in una o più lastre piane e rettangole, adattate perpendicolarmente alla faccia interna della parete della luce, in guisa che l'armatura è tutta dentro il vaso. Ciascuna di queste lastre è disposta in modo che essa ha una sola faccia riguardante la luce, e che il lato di questa faccia contiguo alla parete della luce è applicato sul lato della luce, rispetto al quale si vuole annullare la contrazione della vena. Mediante queste lastre così disposte, e sufficientemente ampie ed estese per ogni verso, colle quali uno o più lati della luce vengono *armati*, si distrugge la contrazione della vena rispetto a questi lati, e non si occupa alcuna parte dello spazio prismatico indefinito che corrisponde alla luce perpendicolarmente alla parete in cui essa è aperta.

In ciascuna delle lastre colle quali si armano i lati della luce, noi chiameremo *altezza* la sua dimensione perpendicolare al piano della luce, e *prolungamento* quella parte della lastra che sopravvanza ciascuna estremità del lato della luce, al quale essa lastra è applicata. Quando l'armatura è formata con lastre egualmente alte, l' altezza di queste lastre è pure l'*altezza* dell'armatura, e per *prolungamenti* dell'armatura non si intenderà altro che i prolungamenti stessi delle lastre che la compongono. Così se la lunghezza di un lato della luce è di un pollice, e la lastra rettangola con cui esso è armato, è alta due pollici, ed ha un pollice di prolungamento al di là di ciascuna estremità di questo lato, diremo che l'*altezza* di questa armatura è di due pollici, e che ciascuno de' suoi *prolungamenti* al di là delle estremità del lato armato è di un pollice.

Se in una luce si armano nel modo anzidetto due lati contigui, i prolungamenti dell'armatura al di là del vertice dell' angolo formato da questi lati sono inutili, e si possono ommettere; ma l' armatura si prolunga all'altra estremità di ciascun lato armato. Se si armano tre lati di una luce quadra, l' armatura avrà due soli prolungamenti, e ne avrà quattro, se si armano solamente due lati paralleli.

Nel caso in cui una parte di un lato è da armarsi, uno dei prolungamenti dell'armatura, o tutti e due non si fanno più nella direzione della parte armata, ma si piegano perpendicolarmente a questa, e vengono applicati sulla lastra della luce. Così per esempio se, partendo da un angolo di una luce rettangola, si voglia armare la sola terza parte di un lato adjacente a quest'angolo, l'armatura avrà un prolungamento al vertice dell' angolo nella direzione del lato, e un altro prolungamento al punto ove termina la terza parte armata; ma questo prolungamento sarà perpendicolare al lato, e verrà applicato, come l' altro, sulla lastra della luce. Se poi la terza parte del lato la quale deve armarsi, non termina nè all'una nè all' altra estremità del lato, l'armatura applicata a questa terza parte avrà a ciascuno de' suoi termini un prolungamento perpendicolare al lato ed all' armatura, ed applicato sulla lastra della luce.

Quando il perimetro della luce è curvilineo, come nelle luci circolari, l' armatura consiste in una o più lastre incurvate con faccie cilindriche, ed applicate nel modo precedentemente spiegato ad uno o a più archi del perimetro della luce. Ciascuna di queste lastre alle due estremità dell'arco armato, ove essa abbandona il perimetro, si piega nella direzione dei raggi dell'arco, i quali passano rispettivamente per queste estremità, e l' armatura si continua per qualche tratto nella direzione di questi raggi, in modo che i prolungamenti di questa armatura cilindrica sono lastre piane applicate perpendicolarmente sulla lastra della luce, e dirette secondo i raggi che passano per le estremità dell' arco armato.

Queste spiegazioni sembrano sufficienti per dare un' idea precisa e chiara delle armature e delle luci armate di cui ci siamo serviti in queste esperienze. Chi desiderasse di vederne anche le figure, le troverà fra quelle unite alla sopraccitata Memoria inserta nel tomo XXXIV. *della Reale Accademia delle Scienze di Torino.*

§. 2.°

In questo paragrafo esporremo le esperienze fatte con luci verticali quadre di un pollice di lato, con tenuissimo divario, del quale si tien conto nel valore dell'area di ciascuna di queste luci. Esse erano intagliate in lastre sottili d'ottone, ed armate internamente con simili lastre, e venivano applicate alla parete verticale della *Torre dell'Edifizio Idraulico*, nella quale sono praticate le aperture e stabiliti gli ordigni necessari per adattarvi le luci, e per chiuderle e per aprirle. In ciascuna esperienza il battente era costante, ma variava da una esperienza all'altra. Il più piccolo di essi, misurato dal centro delle luci è di piedi 6, linee 9, ossia di linee 873; ed il maggiore è di piedi 21, pollici 2, linee 10; cioè di linee 3058: e siccome l'altezza delle luci è di linee 12, si vede che in queste esperienze, nelle quali il battente è da 72 a 255 volte quest' altezza, si può prendere pel battente medio quello che corrisponde al mezzo dell'altezza delle luci, ed è appunto questo battente che si espone nella seguente tavola. L' efflusso si faceva liberamente nell'aria, e perciò chiamando

a^2 l' area della luce;
h il battente corrispondente al punto di mezzo dell'altezza della luce;
t il tempo dell'efflusso;
Q la portata della luce nel tempo t;
g la gravità;
μ il coefficiente comunemente detto della contrazione, si ha la nota equazione

$$Q = \mu a^2 t \sqrt{2gh};$$

dalla quale si ricaverà il valore del coefficiente μ, poichè tutte le altre quantità sono date dalla misura immediata.

In tutte queste esperienze l' unità lineare è il *piede di Parigi*; perciò prendendo $2g =$ piedi $60{,}3916$, e $\sqrt{2g} = 7{,}7712$, si ha

$$\mu = \frac{3Q}{(0{,}161)9a^2t\sqrt{h}};$$

nella quale equazione Q deve esprimersi in pollici cubici; a^2 in linee quadrate; h in linee, e t in minuti secondi. Con questa formula si sono calcolati i valori di μ contenuti nella seguente tavola.

TAVOLA I.ª

Esperienze sulle contrazioni parziali delle vene d'acqua, fatte con luci verticali, quadre, di 12 linee di lato, prossimamente, armate internamente su alcuni lati, e con battenti costanti da 6 a 21 piedi di Parigi, cioè da 72 a 255 volte l'altezza delle luci.

Lati sui quali si fa la contrazione, e dimensioni dell'armatura.	a^2	N.° delle esp.	h	t	Q	μ	valori medii di μ
	lin. quad.		lin.		poll.cu		
Contrazione su tre lati; i due verticali, e l'orizzontale superiore. L'armatura del lato orizzontale inferiore è alta linee 30; ciascun suo prolungamento è di linee 12.	139,2375	1	891	600	84099	0,6249	
		2	892	900	126582	0,6267	0,6256
Contrazione su due lati paralleli; i due verticali. L'armatura dei lati orizzontali è alta linee 30; ciascuu suo prolungamento è di linee 12.	144,0000	3	3056	600	165597	0,6424	
		4	3058	780	215016	0,6422	
		5	897	600	91035	0,6519	
		6	898	780	117912	0,6491	0,6464
Contrazione su due lati contigui; l'orizzontale superiore, ed uno dei verticali. L'armatura degli altri due lati è alta linee 30; ciascun suo prolungamento è di linee 12.	143,4000	7	3057	600	168198	0,6552	
		8	3057	780	218484	0,6546	
		9	3057	900	250563	0,6507	
		10	873	600	90168	0,6572	
		11	874	780	116178	0,6510	
		12	875	900	134385	0,6523	0,6535
Contrazione su un sol lato; l'orizzontale superiore. L'armatura degli altri tre lati è alta linee 30; ciascun suo prolungamento è di linee 13.	141,6075	13	3043	600	175134	0,6924	
		14	3045	780	228021	0,6932	
		15	3045	900	262701	0,6922	
		16	896	600	96237	0,7012	
		17	896	780	123981	0,6949	
		18	896	900	143055	0,6949	0,6948

§. 3.

Riferiremo ora le esperienze fatte con una luce quadra di quattro pollici di lato, intagliata in una lastra sottile d'ottone, ed applicata ad una parete verticale di un vaso inesausto e di sezione assai grande rispetto alla luce. Questa aveva due lati verticali, e si armava internamente su uno o su più lati nel modo avanti detto con lastre rettangole d' ottone, delle quali si daranno le dimensioni nella tavola seguente. L' efflusso si faceva liberamente nell' aria. In ciascuna esperienza il battente era costante, ma esso variava dall'una all' altra di maniera che il più piccolo battente, misurato dal lato superiore della luce, era di linee 65, cioè una volta e un terzo l' altezza della luce, ed il più gran battente di linee 121, cioè due volte e mezzo la stessa altezza. Perciò si è tenuto conto in ciascuna esperienza della diversità dei battenti da un punto all' altro dell' altezza della luce, adoperando la nota equazione

$$Q = \frac{2}{3}\,\mu t l \sqrt{2g}\left[(m+n)^{\frac{3}{2}} - n^{\frac{3}{2}}\right];$$

nella quale

t esprime il tempo dell' efflusso;
Q la portata nel tempo t;
l e m la larghezza e l' altezza della luce;
n il battente sopra il lato superiore della luce;
g la gravità;
μ il coefficiente detto della contrazione.

Prendendo, come precedentemente, il *piede di Parigi* per unità di misura, ed osservando che la luce, larga ed alta quattro pollici, è identicamente la medesima in tutte queste esperienze, si ottiene

$$\mu = \frac{162.Q}{(0{,}1619)\,t\left[(48+n)^{\frac{3}{2}} - n^{\frac{3}{2}}\right]};$$

ove Q deve essere espresso in piedi cubici; t in minuti secondi, ed n in linee del piede.

La tavola seguente contiene i risultamenti ottenuti da queste esperienze, in ciascuna delle quali è da notarsi che i prolungamenti dell' armatura non isporgevano mai fuori della superficie dell' acqua contenuta nel vaso.

TAVOLA 2.^{a}

Esperienze sulle contrazioni parziali delle vene d'acqua, fatte con una luce quadra verticale di 4. pollici di lato, armata internamente su alcuni lati, con battenti costanti da pollici $5 \frac{1}{3}$ a pollici 10, cioè da $1 \frac{1}{3}$ a 2 volte e $\frac{1}{2}$ l'altezza della luce.

Lati sui quali si fa la contrazione, e dimensione dell' armatura.	N.° delle esp.	n	t	Q	μ	valori medii di μ
		lin.		pied.cub.		
Contrazione su tutti quattro i lati. La luce non ha armatura, ed è in lastra sottile.	19	91,0	360″	169,1250	0,6099	
	20	90,5	360	167,2500	0,6045	
	21	87,5	360	165,2500	0,6053	
	22	86,5	360	165,1875	0,6078	0,6069
Contrazione su tre lati; i due orizzontali ed uno dei verticali. L'armatura dell'altro lato è alta 8 pollici; ciascun suo prolungamento è di 6. pollici	23	109,0	360	187,2037	0,6275	
	24	99,0	360	179,0000	0,6241	0,6258
Contrazione su tre lati; i due verticali, e l'orizzontale superiore. L' armatura del lato orizzontale inferiore alta pollici 8; ciascun suo prolungamento è di pollici 6.	25	101,0	360	180,4375	0,6240	
	26	99,5	360	180,0625	0,6265	
	27	86,5	360	169,9375	0,6251	
	28	85,5	360	169,8750	0,6280	0,6259
Contrazione su tre lati, i due verticali, e l' orizzontale inferiore. L'armatura del lato orizzontale superiore è alta 8 pollici; ciascun suo prolungamento è di 6 pollici .	29	102,0	360	182,6250	0,6290	
	30	97,5	360	179,6250	0,6301	0,6295
Contrazione su due lati paralleli; i due verticali. L'armatura dei due lati orizzontali è alta pollici 8; ciascun suo prolungamento è di 6 pollici.	31	93,5	360	181,0625	0,6460	
	32	92,0	360	180,1375	0,6470	
	33	90,5	360	179,6250	0,6492	
	34	88,5	360	177,3750	0,6468	
	35	86,0	360	176,5000	0,6510	0,6480

Continuazione della Tavola 2.ª

Lati sui quali si fa la contrazione, e dimensioni dell'armatura.	N.º delle esp.	n	t	Q	μ	valori medii di μ
		lin.		pied.cub.		
Contrazione su due lati contigui; l'orizzontale superiore ed uno dei verticali. L'armatura degli altri lati è alta poll. 8; il prolungamento orizzontale è poll. 8; il prolungamento verticale poll. 6.	36	111,5	330''	179,5625	0,6505	
	37	107,5	330	177,1250	0,6514	0,6509
Contrazione su due lati paralleli; i due orizzontali. L'armatura dei lati verticali è alta poll. 8; ciascun suo prolungamento è poll. 6.	38	102,5	330	174,5000	0,6544	
	39	99,0	330	172,3125	0,6554	0,6549
Contrazione su due lati contigui; l'orizzontale inferiore, ed uno dei verticali. L'armatura degli altri lati è alta poll. 8; il prolungamento verticale è poll. 8, e l' orizzontale poll. 6.	40	96,0	360	189,0093	0,6672	
	41	65,0	360	162,2500	0,6659	0,6665
Contrazione su un sol lato; l' orizzontale superiore. L'armatura degli altri tre lati è alta poll. 8; ciascun prolungamento è poll. 8.	42	115,5	300	171,3750	0,6730	
	43	114,0	300	171,4375	0,6769	0,6749
Contrazione su un sol lato; uno dei verticali. L'armatura degli altri tre lati è alta pollici 8; ciascun prolungamento è poll. 8.	44	121,0	300	178,0000	0,6854	
	45	120,5	300	178,0625	0,6870	
	46	115,0	300	174,8750	0,6880	0,6868
Contrazione su un sol lato; l' orizzontale inferiore. L'armatura degli altri tre lati è alta pollici 8; ciascun prolungamento è poll. 8.	47	120,0	300	183,3750	0,7087	
	48	115,5	300	180,1250	0,7074	
	49	113,5	300	178,8750	0,7076	0,7079

Da questa tavola si vede che quando la contrazione si fa solamente su tre lati, qualunque essi siano, i valori medii di μ sono pressochè eguali tra loro: il più grande di essi, 0,6295 non differisce dal più piccolo 0,6258 che di una 170.ª parte.

Fra i valori medii di μ, relativi alla contrazione su due soli lati, qualunque essi siano, si osservano differenze alquanto più considerabili: il maggiore di questi valori 0,6665 differisce dal minore 0,6480 di una 36.ª parte.

Le differenze tra i valori medii di μ, relativi alla contrazione su un sol lato, qualunque esso sia, sono le più grandi: La maggiore di esse è tra 0,7079 e 0,6749 ed è la 21.ª parte del primo di questi valori.

Senza cercare di proposito la cagione di queste differenze, pare che esse si debbano principalmente attribuire alla piccolezza del battente rispetto all'altezza della luce. Poichè quando il battente è assai grande rispetto a questa altezza, sembra evidente che per una luce quadra verticale la portata non può cambiare, allorchè, posto un sol lato armato, in vece di questo se ne arma un altro qualunque con eguale armatura. Così pure se ne sono armati due lati paralleli, la portata non si muterà, armando in loro vece gli altri due lati paralleli: lo stesso si dica allorchè in vece di due lati contigui armati, se ne armano due altri qualunque, purchè contigui; e così finalmente allorchè in vece di tre lati armati se ne armano altri tre.

Ma quando il battente è piccolo, pare che facendo gli accennati cambiamenti dei lati armati, debba pure cambiarsi la portata della luce, poichè in questo caso la velocità con cui l'acqua scorre sulle lastre dell'armatura, prima di uscire dalla luce, è diversa secondo la situazione più o meno alta, orizzontale o verticale delle lastre stesse: d'altra parte si sa che il coefficiente μ contiene non solamente la correzione dovuta alla contrazione della vena, ma ancora quella dovuta all'inesatta supposizione che si fa, prendendo per la velocità media di ciascun punto di una linea orizzontale di una luce quella dovuta al battente di questa linea, senza tener conto della perdita di velocità cagionata dall' aderenza dell' acqua alle pareti, e dall'imperfetta fluidità dell'acqua medesima. Da ciò ne segue che nel caso di battenti piccoli le portate delle luci verticali armate internamente nel modo sopra descritto debbono variare non solo quando il numero de' lati armati varia, ma ancora quando la situazione di questi viene a variare ancorchè il loro numero resti il medesimo. La tavola precedente mette sott' occhio queste variazioni di portata, provenienti e dal numero e dalla situazione de' lati armati.

§. 4.

I precedenti risultamenti sulle contrazioni parziali delle vene, ottenuti da due serie distinte di esperienze, e quelli ottenuti dall'altra serie sopraccitata eseguita nel 1821, si riuniscono nella seguente tavola, intorno alla quale dobbiamo notare in primo luogo, che per una luce quadra verticale di 12 linee di lato, aperta in lastra sottile, e con battenti di 6 e di 20 piedi risultò $\mu = 0{,}6077$: questo stesso valore di μ noi prendiamo per le luci quadre di 6 linee di lato in lastre sottili con battenti di 237 a 141 linee, ancorchè non ne abbiamo fatto direttamente l'esperienza.

Noteremo in secondo luogo che nella serie delle esperienze fatte nel 1821 con luci quadre di 6 linee di lato, e nella serie di quelle fatte con luci qnadre di 12 linee di lato, riferite quì sopra al §. 2, nelle quali due serie i battenti sono assai grandi rispetto all' altezza delle luci, noi supponiamo che quando la contrazione si fa su tre lati solamente, il coefficiente μ ha l'istesso valore, qualunque siano questi lati. Similmente quando la contrazione si fa su due lati paralleli, noi prendiamo per μ l'istesso valore, siano essi o i lati orizzontali o i lati verticali: così si dica del valore di μ quando la contrazione si fa su due lati contigui e quando si fa su un sol lato. I valori di μ non ottenuti direttamente dall' esperienza, ma supposti e presi eguali ad altri ottenuti dall'esperienza, sono segnati nella tavola con un asterisco *.

TAVOLA 3.^{a}

Valori dei coefficienti μ, ottenuti da tre distinte serie di esperienze fatte sulle contrazioni parziali.

Lati sui quali si fa la contrazione.	I Serie Valori di μ ottenuti da esperienze fatte con luci quadre verticali di 6 linee di lato, con battenti da 4 a 24 volte l'altezza delle luci	II Serie Valori di μ ottenuti da esperienze fatte con luci quadre verticali di 12 linee di lato, con battenti da 72 a 255 volte l'altezza delle luci.	III Serie Valori di μ ottenuti da esperienze fatte con una luce quadra verticale di 4 pollici di lato, con battenti da 1 $\frac{1}{3}$ a 2 $\frac{1}{2}$ volte l'altezza della luce.
Contrazione su tutti quattro i lati. Le luci sono senza armatura e in lastre sottili.	0,6077*	0,6077	0,6069
Contrazione su tre lati; i due orizzontali ed uno dei verticali.	0,6389*	0,6256*	0,6258
Contrazione su tre lati; i due verticali, e l' orizzontale superiore.	0,6389	0,6256	0,6259
Contrazione su tre lati; i due verticali e l' orizzontale inferiore.	0,6389*	0,6256*	0,6295
Contrazione su due lati; i due verticali.	0,6513	0,6464	0,6480
Contrazione su due lati; l'orizzontale superiore, ed uno dei verticali.	0,6621	0,6535	0,6509
Contrazione su due lati; i due orizzontali.	0,6513*	0,6464*	0,6549

Continuazione della Tavola 3.ª

Lati sui quali si fa la contrazione.	I Serie Valori di μ ottenuti da esperienze fatte con luci quadre verticali di 6 linee di lato, con battenti da 4 a 24 volte l'altezza delle luci.	II Serie Valori di μ ottenuti da esperienze fatte con luci quadre verticali di 12 linee di lato, con battenti da 72 a 255 volte l'altezza delle luci.	III Serie Valori di μ ottenuti da esperienze fatte con una luce quadra verticale di 4 pollici di lato, con battenti da $1\frac{1}{3}$ a $2\frac{1}{2}$ volte l'altezza della luce.
Contrazione su due lati; l'orizzontale inferiore, ed uno dei verticali.	0,6621*	0,6535*	0,6665
Contrazione su un sol lato; l' orizzontale superiore;	0,6943*	0,6948	0,6749
Contrazione su un sol lato; uno dei verticali	0,6943*	0,6948*	0,6868
Contrazione su un sol lato; l' orizzontale inferiore.	0,6943*	0,6948*	0,7079

Cercando in questa tavola le maggiori differenze tra i valori di μ relativi ad una stessa contrazione parziale, e posti in una stessa linea orizzontale della tavola, si trova in primo luogo, che nella seconda, terza e quarta linea orizzontale si ha per la colonna verticale n.° I. $\mu=0,6389$, e per la colonna verticale n.° II. si ha $\mu=0,6256$; e questi sono il maggiore ed il minore valore di μ dati dalle esperienze, relativi alla contrazione parziale della vena su tre soli lati della luce. La differenza tra questi due valori è la 48.^{a} parte del maggiore di essi.

Si trova in secondo luogo che nella nona linea orizzontale i valori di μ contenuti nelle colonne verticali n.° I. e n.° II. sono pressochè eguali tra loro, ed hanno per valor medio 0,6945, il quale è di una sua 35.^{a} parte maggiore del corrispondente valore 0,6749 posto nella colonna n.° III.

Intorno a queste differenze noi osserveremo prima di tutto, che esse sono minori di quelle, che si incontrano nelle esperienze fatte per determinare il valore della contrazione totale delle vene, che escono da luci aperte in lastre sottili, nelle quali esperienze i valori ottenuti per questa contrazione differiscono talvolta tra loro di una trentesima parte. Perciò le serie I. II. e III. della tavola precedente possono da questo canto riguardarsi come assai bene d'accordo tra loro.

Oltre a ciò osserveremo che nelle esperienze della serie n.° I. il fondo del vaso prismatico, o solo o con una parete del medesimo, serviva di armatura alla luce nei casi ne' quali si armava o un sol lato, o due lati contigui di questa. Quando poi si armavano o due lati paralleli o tre lati, si adoperava, oltre il fondo e una parete del vaso, una lastra rettangola alta e lunga sei pollici, e perciò l'altezza di questa lastra era dodici volte il lato della luce, e ciascun suo prolungamento era cinque volte e mezzo il medesimo lato. Ma nelle esperienze delle serie n.° II. e n.° III. tutte le armature erano formate con lastre rettangole, le altezze e i prolungamenti delle quali avevano una ragione assai minore ai lati delle luci. Ora quando l'altezza ed i prolungamenti dell' armatura eccedono di poco le dimensioni della luce, pare che non si distrugga così compiutamente tutta la contrazione sui lati armati, come quando l'altezza ed i prolungamenti dell'armatura eccedono di molto le dimensioni della luce, e sono come indefiniti.

Ed in conferma di questa osservazione gioverà riferire, che per una luce rettangola, il cui lato orizzontale inferiore è posto sul fondo stesso del vaso, il *Sig. Eytelwein* colla scorta di *Dubuat*, il quale aveva già osservato questo caso, arreca pel valore della contrazione della vena fluente da questa luce il numero 0,6321, il quale è assai poco diverso dal numero 0,6389 dato dalla serie n.° I. per un caso affatto eguale di una luce rettangola, in cui la contrazione rispetto al suo lato inferiore era distrutta, non per via di un'armatura, ma perchè questo lato era situato sul fondo stesso del vaso.

Le differenze poi, le quali trovansi tra i valori di μ dati dalla serie n.° III. e quelli dati dalle altre due serie, debbono principalmente ripetersi, come si è già notato sopra, da ciò che quando il battente è assai grande rispetto all'altezza di una luce verticale, come nelle serie I. e II. la velocità dell'efflusso è la medesima in tutti i punti della luce, e perciò la portata di questa non può variare, se in vece di alcuni lati armati, se ne armano altri in egual modo e numero, i quali inoltre abbiano tra loro la stessa posizione relativa che avevano i primi, cioè siano o paralleli o contigui, se si tratta di lati paralleli o contigui. Ma quando il battente è piccolo rispetto all'altezza della luce, la velocità dell'efflusso non è più la medesima in tutti i punti della luce, e perciò secondo la situazione dei lati, ai quali si applica l'armatura, si ottiene una portata diversa ed un valore diverso di μ, ancorchè tutte le altre circostanze siano uguali. Così dalla colonna n.° III. si vede che nel caso della contrazione su un sol lato, la maggiore portata si ottiene quando questa contrazione si fa sul lato orizzontale inferiore della luce.

§. 5.

I valori dei coefficienti μ relativi ad una stessa contrazione parziale, dati dalle tre serie di esperienze esposte nella tavola precedente, avendo tra loro differenze piccole, e comprese nei limiti di quelle che in simili esperienze si incontrano inevitabilmente, ed inoltre ciascun coefficiente μ avendo presso a poco l'istesso valore, quando il numero dei lati sui quali si fa la contrazione è il medesimo, qualunque siano questi lati, ho formato per l' uso pratico e ordinario, e per compendio e per maggiore evidenza de' risultamenti, la tavola seguente: essa contiene i valori di μ per quattro casi di contrazioni di una luce quadra verticale in lastra sottile, cioè quando la contrazione si fa sui quattro lati, su tre, su due o su un sol lato. Questi valori di μ si presentano separatamente e per battenti assai grandi, e per battenti piccoli rispetto all'altezza della luce. Quindi dagli uni e dagli altri di questi valori, poco diversi tra loro per ciascuna contrazione, si ricavano i valori medii generali delle anzidette contrazioni per un battente qualunque.

Pertanto le colonne verticali A e B della tavola seguente contengono i valori delle medesime contrazioni ricavati dalle serie n.° I. e n.° II. della tavola 3.^{a} rispettivamente.

Dai valori contenuti nelle colonne A e B, tutti relativi al caso di un battente assai grande rispetto all' altezza della luce, si è formata la colonna C, la quale contiene i valori medii di quelli compresi nelle colonne A e B. Perciò questa colonna C presenta i valori delle contrazioni parziali da noi considerate per le luci quadre verticali, quando i battenti sono assai grandi rispetto all'altezza di queste luci.

Nella colonna D si espongono i valori delle stesse contrazioni ricavati dalla serie n.° III. della tavola 3.^{a}, nella quale serie i battenti sono piccoli rispetto all'altezza della luce.

Finalmente nella colonna E si presentano i valori medii generali delle medesime contrazioni, i quali si ottengono prendendo i valori medii di quelli contenuti nelle colonne C e D. Questi valori medii generali possono riguardarsi come assai prossimi al vero, e adoperarsi in tutti i casi di luci quadre verticali, qualunque sia il loro battente, purchè i prolungamenti dell' armatura non isporgano mai fuori della superficie dell' acqua contenuta nel vaso, e questo abbia le sue sezioni assai grandi rispetto all'area della luce.

TAVOLA 4.^{a}

Valori medii dei coefficienti μ, particolari per ciascuna delle tre serie precedenti di esperienze; e valori medii *generali* dei medesimi coefficienti.

La contrazione si fa	A Valori medii di μ ricavati dalla serie n.° I, nella quale i battenti sono da 4 a 24 volte l'altezza della luce.	B Valori medii di μ ricavati dalla serie n.° II, nella quale i battenti sono da 72 a 255 volte l'altezza della luce.	C Valori medii di μ ricavati dalle colonne A e B nelle quali i battenti sono da 24 a 255 volte l'altezza della luce.	D Valori medii di μ ricavati dalla serie n.° III, nella quale i battenti sono 1 $\frac{1}{8}$ a 2 $\frac{1}{2}$ volte l'altezza della luce.	E Valori medii *generali* di μ ricavati dalle colonne C e D, nelle quali i battenti sono da 1 $\frac{1}{8}$ a 255 volte l'altezza della luce.
Su tutti e quattro i lati.	0,6077	0,6077	0,6077	0,6069	0,6073
Su tre lati qualunque.	0,6389	0,6256	0,6323	0,6271	0,6297
Su due lati qualunque.	0,6567	0,6500	0,6533	0,6551	0,6542
Su un lato qualunque.	0,6943	0,6943	0,6945	0,6899	0,6922

I valori medii generali dei coefficienti μ, contenuti nella colonna E, possono scriversi nel modo seguente, cominciando dal più piccolo, relativo al caso in cui la luce è in lastra sottile senza armatura alcuna:

$$\mu = 0{,}6073\;;$$

$$\mu' = 0{,}6297 = 0{,}6073\left(1 + \frac{1}{27}\right);$$

$$\mu'' = 0{,}6542 = 0{,}6073\left(1 + \frac{1}{13}\right);$$

$$\mu''' = 0{,}6922 = 0{,}6073\left(1 + \frac{1}{7}\right).$$

Da queste espressioni si vede che gli aumenti della portata, i quali si ottengono negli efflussi da luci quadre verticali, quando si distrugge la contrazione su un lato, su due o su tre, stanno prossimamente tra loro come 1 : 2 : 4. Questa relazione si era già notata nella sopraccitata *Memoria* che contiene la serie delle esperienze fatte nel 1821. sulle contrazioni parziali.

§. 6.

Nelle esperienze esposte nella tavola 2.ª, fatte con una luce quadra verticale di quattro pollici di lato, i battenti ancorchè piccoli, erano però tali che in nessuna di esse i prolungamenti dell' armatura sporgevano fuori della superficie dell' acqua contenuta nel vaso. Ora presenterò alcune esperienze fatte colla medesima luce, armata sul lato orizzontale inferiore e sui due lati verticali, come nelle esperienze 42 e 43 (§.° 3.°) e con battenti piccoli e tali che i prolungamenti verticali dell' armatura sporgevano fuori della superficie dell' acqua contenuta nel vaso. I valori dei coefficienti μ si sono calcolati colla formula esposta al §.° 3.°

TAVOLA 5.ª

Altre esperienze sulle contrazioni parziali, fatte colla sopraddetta luce quadra verticale di 4 pollici di lato, con battenti piccoli e tali che i prolungamenti verticali dell' armatura sporgevano fuori della superficie dell' acqua contenuta nel vaso.

Lati sui quali si fa la contrazione, e dimensione dell' armatura.	N.º delle esp.	n	t	Q	μ
Contrazione su un sol lato;		lin.		pied.cub.	
l'orizzontale superiore.	50	64,5	330″	160,6250	0,7214
	51	64,0	330	161,1250	0,7256
L' armatura degli altri lati è alta pollici 8; e ciascun prolungamento è pure di 8. pollici.	52	62,5	330	162,6875	0,7391
Questa luce e questa armatura, ed i lati cui essa è applicata, sono identicamente quegli istessi delle esperienze 42 e 43.	53	56,5	360	176,1250	0,7603

In queste quattro esperienze i prolungamenti dell'armatura sporgevano fuori dell' acqua dalle linee 31,5 alle linee 39,5. Il battente non si è misurato dal livello dell'acqua compresa fra le due lastre verticali dell' armatura, ma dal livello dell' acqua esterna alle medesime. L' acqua compresa fra le anzidette lastre verticali, e la lastra orizzontale dell'armatura aveva una superficie più bassa della superficie dell' acqua esterna a queste lastre contenute nel vaso, e formava una corrente assai rapida e di superficie inclinata verso la luce, alla quale si affacciava con molta velocità, e di cui non superava l' altezza che di sei a dodici linee, formando così un labbro sempre agitato e ondeggiante sopra il lato superiore della luce. Questa corrente alla sua entrata nel canale formato dalle lastre dell' armatura aveva una contrazione affatto particolare, in virtù della quale le faccie interne delle pareti di esso canale presso l'anzidetta entrata non erano tocche dall' acqua la quale si teneva in mezzo del canale e precipitava verso la luce.

Queste circostanze del movimento dell'acqua contenuta nel canale formato dall' armatura della luce, già osservato dal *P. Ferrari* nelle sue esperienze sopra riferite, sono tali che a questo caso non sembra potersi applicare la formula della portata esposta al §. 3.°, e adoperata per gli altri casi della stessa luce e armatura, ne' quali l'acqua contenuta fra le lastre di questa è pressochè stagnante e senza moto, e la vena esce dalla luce per pura pressione.

Ma qualunque sia il modo con cui si deve calcolare la portata nelle esperienze di questa tavola, è osservabile che questa portata, paragonata a quella delle esperienze 42 e 43 fatte coll'istessa identica luce e armatura, ma con maggiori battenti, diminuisca meno di quello che richiegga la diminuzione de' battenti; ed è pure osservabile che nell' esperienza 53, per esempio, la portata nell' unità di tempo è alcun poco maggiore di quella ottenuta nell' esperienza 50, quantunque in quest' ultima il battente sia di otto linee, cioè di un settimo maggiore del battente nell' esperienza 53.

Del resto in ordine alla particolarità che offrono i valori di μ esposti nella tavola precedente, i quali crescono da 0,7214 a 0,7603, diminuendo il battente, non è inopportuno il riferirne un' altra simile che si trova nelle esperienze fatte dal *Sig. Poncelet* con una luce rettangola, di altezza variabile, aperta in una parete inclinata all'indentro verso il vaso. In questa luce la contrazione si faceva sul solo lato orizzontale superiore, come nelle esperienze di questo paragrafo. Egli ha trovato pei valori di questa contrazione 0,737; 0,751, i quali sono poco diversi dai sopra riferiti, e crescono a misura che l' altezza delle luce diminuisce.

§. 7.°

In quest' ultimo paragrafo esporrò altre esperienze fatte sulle contrazioni parziali con piccole luci verticali, alcune rettangole ed altre circolari, aperte in lastre sottili d'ottone, con battenti costanti e assai grandi, come nelle esperienze del §. 2.° La seguente tavola mostra i risultamenti ottenuti con queste luci, armate internamente, nel modo sopra indicato, con lastre d' ottone su qualche parte del loro perimetro. Le aree di queste luci sono comprese tra 108 e 260 linee quadrate. La loro maggiore altezza verticale è di 18 linee, ed i battenti sono da 891 a 3055 linee; e perciò nel calcolo di queste esperienze, nelle quali l' efflusso si faceva liberamente nell'aria, si è fatto uso della formula esposta nel §. 2.°, ritenendo le stesse lettere colla significazione ivi spiegata.

TAVOL 6.ª

Altre esperienze sulle contrazioni parziali delle vene d'acqua, fatte con piccole luci verticali, alcune rettangole ed altre circolari, armate internamente su qualche parte del loro perimetro, e con battenti assai grandi, come nelle esperienze della tavola 1.ª

Forma e dimensioni delle luci: lati sui quali si fa la contrazione: dimensioni dall' armatura.	a^2	N.° delle esp.	h	t	Q	μ	Valori meidi di μ
	lin.quad.		lin.		poll.cu		
Luce rettangola: il lato verticale è di linee 17; l'orizzontale è di linee 8,1. Contrazione su due lati; l'orizzontale inferiore ed uno dei verticali. L'armatura degli altri lati è alta linee 30; il suo prolungamento verticale è di linee 10, ed il prolungamento orizzontale è di linee 17.	137,7000	54	3035	600''	158661	0,6459	
		55	3035	780	206346	0,6462	
		56	3034	900	237991	0,6460	0,6460
Luce rettangola: Il lato verticale è di linee 18, e l'orizzontale di linee 6. Contrazione su una lunghezza di linee 6 il cui punto di mezzo coincide col punto di mezzo di un lato verticale. L'armatura del rimanente perimetro è alta linee 30; ciascun suo prolungamento, perpendicolare al perimetro è di linee 12.	108,0000	57	3051	600	134385	0,6957	
		58	3052	900	202011	0,6971	0,6964
Luce semicircolare col vertice in su, e col diametro orizzontale: questo è lungo linee 25,75. Contrazione sulla semicirconferenza. L'armatura del diametro è alta linee 30; ciascun suo prolungamento è linee 5.	260,3840	59	889	600	158661	0,6311	
		60	891	900	238425	0,6316	0,6313

Continuazione della Tavola 6.ª

Forma e dimensione delle luci: lati sui quali si fa la contrazione: Dimensioni dell' armatura	a^2	N.° delle esp.	h	t	Q	μ	Valori medii di μ
Luce circolare di un pollice di diametro. Contrazione su due archi del perimetro, ciascuno di 45°, separati l' uno dall' altro da due archi eguali ed armati. L'armatura è alta linee 30, e ciascun suo prolungamento nella direzione del raggio è di linee 9.	lin. quad. 113,0973	61	lin. 3031	600″	poll.cu 130917	0,6493	
		62	3045	780	168198	0,6403	
		63	3045	900	195075	0,6436	0,6444
Luce circolare di un pollice di diametro. Contrazione su un arco di 45.° L'armatura del rimanente perimetro è alta linee 30; ciascun suo prolungamento nella direzione del raggio è di lioee 9.	113,0973	64	3054	600	136966	0,6769	
		65	3055	780	177735	0,6755	
		66	3055	900	205046	0,6754	0,6759

Il valore di $\mu=0,6460$ ottenuto dalle esperienze 54, 55 e 56, fatte con una luce rettangola, armata su due lati contigui, de' quali uno è doppio dell' altro, è poco diverso dal valore 0,6535 ottenuto da una luce quadra, armata pure su due lati contigui e con battenti assai grandi (esperienze 7.ª... 12.ª) La differenza tra questi due valori non è che la 87.ª parte del maggiore di essi.

Per la luce semicircolare, armata sul suo diametro (esp. 59. e 60.) il valore di $\mu=0,6313$ è medio tra quelli dati da una luce quadra armata su un sol lato, e armata su due lati paralleli, (esp. 1, 2 e 3, 4, 5 e 6).

Il valore di μ=0,6444, somministrato da una luce circolare armata su due porzioni eguali del suo perimetro e egualmente distanti tra loro (esp. 61, 62 e 63), è pressochè eguale al valore di μ=0,6464, ottenuto da una luce quadra, armata su due lati paralleli (esp. 3, 4, 5 e 6), quantunque in queste ultime esperienze la contrazione si faccia sulla metà del perimetro della luce, mentre nelle esperienze 61, 62 e 63 la contrazione si fa solamente sulla quarta parte del perimetro della luce circolare.

Finalmente le esperienze 57 e 58, fatte con una luce rettangola armata sui sette ottavi del suo perimetro danno μ = 0,6964, il qual valore è maggiore di μ = 0,6759 somministrato dalle esperienze 64, 65, e 66, fatte con una luce circolare, armata pure sui sette ottavi del suo perimetro. Ma da queste sole esperienze fatte con ciascuna di queste luci così armate non si può inferire, se aumentando o diminuendo la porzione non armata del perimetro di ciascuna di esse luci, il valore di μ sia per aumentarsi o per diminuirsi. Questa incertezza nasce dal risultamento ottenuto e colla teoria e coll esperienza da *Borda*, e conformato da *Venturi*; il quale risultamento consiste in ciò che se una luce è armata internamente con un breve tubo prismatico, il coefficiente μ ha per valore 0,5000.

Ora paragonando questo valore ottenuto da *Borda* nel caso in cui la luce è armata internamente con un breve tubo prismatico su tutto il suo perimetro, col valore di μ quando la luce è nuda ed in lastra sottile, e coi valori di μ ottenuti colle nostre esperienze, quando la luce è armata internamente su porzioni più o meno grandi del suo perimetro, si scorge che fra questi valori di μ dovrà necessariamente trovarsi un valore massimo, il quale corrisponderà al caso in cui la contrazione sarà parziale, e si farà su una certa determinata parte del perimetro della luce, l'altra parte essendo armata nel modo superiormente descritto.

Così, per esempio, se la luce è un quadrato di un pollice di lato, come le luci delle esperienze esposte al §. 2, si avranno i seguenti valori di μ; cioè

$\mu = 0{,}6077$; luce nuda, in lastra sottile; contrazione sui quattro lati:

$\mu' = 0{,}6256$; luce armata internamente su un lato; contrazione su tre lati.

$\mu'' = 0{,}6535$; luce armata internamente su due lati contigui; contrazione su due lati contigui:

$\mu''' = 0{,}6948$; luce armata internamente su tre lati; contrazione su un sol lato:

$\mu^{\text{iv}} = 0{,}5000$; luce armata internamente su tutto il suo perimetro; esperienza di *Borda*.

Il massimo di questi valori è μ''': ma non si può asserire che esso è il massimo assoluto tra tutti quelli che si otterrebbero, armando ancora qualche porzione del quarto lato, oltre i tre già armati, come si è praticato nelle esperienze 57 e 58 fatte con una luce rettangola, armata su tre lati, e su due terze parti del quarto, e dalle quali si è ottenuto $\mu = 0{,}6964$.

Ma qui non si deve ommettere una osservazione essenziale sulla maniera con cui esce la vena da una luce armata internamente su qualche parte del suo perimetro, oppure armata su tutto il perimetro. In tutte le nostre esperienze sulle contrazioni parziali la forma della vena alla sua uscita da una luce armata solamente su qualche parte del suo perimetro è tale, che le faccie della vena, corrispondenti alle parti armate del perimetro, sono, all' uscire dalla luce, perfettamente prismatiche o cilindriche, perpendicolari al piano della luce, e toccano tutta la grossezza della lastra, in cui la luce è intagliata: e le faccie della stessa vena corrispondenti alle parti non armate del perimetro, escono dalla luce obblique al piano di questa, e dirette verso l'asse della medesima, e radono solamente il perimetro interno della luce, senza toccarne il perimetro esterno.

Quando poi tutto il perimetro della luce è armato internamente con un breve tubo prismatico o cilindrico, come nell'esperienza di *Borda*, nella quale la luce era circolare del diametro di linee 14 e un decimo, ed il tubo di egual diametro era lungo linee 72, la vena si contrae alla sua entrata nel tubo, cioè su tutto il perimetro dell'estremità di questo opposta a quella che è applicata al perimetro della luce: la vena così contratta passa pel tubo e per la luce, staccata affatto dalle pareti interne del tubo e del perimetro della luce.

SULLA TEORIA DELLE FUNZIONI DISCONTINUE.

MEMORIA

DI GABRIO PIOLA

Ricevuta adì 23. *Aprile* 1830.

Se attentamente si considerano i recenti progressi dell' analisi, pare che il filosofo amico unicamente delle utili cognizioni possa distinguerne due parti, e porre nella prima alcune teoriche di sottile invenzione ma di cui non saprebbesi per avventura ben prevedere quale debba essere finalmente lo scopo, e raccogliere nella seconda le vere scoperte d'onde la scienza può sperare maggiori e sempre crescenti vantaggi. Fra quest' ultime tengono, se io non m' inganno, posto primario quelle dottrine sulla discontinuità delle funzioni che promosse da alcuni grandi viventi Geometri, furono immediatamente trovate di somma utilità nei più intralciati problemi di fisica matematica: e non è forse illusione il pensare che il meglio di esse ancora s'ignori, e che venendo quanto che sia a prodursi con pienezza d' insegnamento, debba l' effetto superare di molto l'aspettativa. A dare per tanta impresa qualche avviamento secondo la mia possibilità, è diretta la presente memoria, in cui mi propongo: primieramente di dichiarare l'indole delle questioni con una metafisica facile che contenga il principio di una persuadente dimostrazione: in secondo luogo d'indicare come ciò che finora in tale materia è stato trovato, si possa prestamente dedurre dalle formole generali col metodo che verrò sponendo: per ultimo di mostrare come si giunga a dare al calcolo un andamento più largo di quello finora usato, e così ad aprire nuove vie per simili ricerche.

§. 1.

Dichiarazione del principio di Discontinuità nelle Funzioni.

1. Ad una variabile in una formola si può attribuire un numero indefinito di valori, di cui ciascuno può differire dall' antecedente e dal seguente meno d'ogni quantità assegnabile. Questa maniera di dire è sinonima ma forse più chiara dell' altra comunemente usata, che i valori della variabile crescono o calano per gradi insensibili. Una variabile la quale nella questione che si ha di mira deve prendere una tale successione di valori, dicesi avere un corso continuo. Or ecco un principio fondamentale nella presente teorica; se il corso della variabile è da $-\infty$ a $+\infty$, certamente il numero dei valori diversi ch' essa può prendere è matematicamente infinito: ma è infinito anche il numero dei valori diversi che può prendere la variabile nel suo corso particolare fra due limiti a, b grandezze finite di cui la seconda supera per ipotesi la prima di una differenza assegnabile: di più se questo tratto si divide in un numero finito di parti, è infinito anche il numero dei valori diversi possibili a prendersi dalla variabile dentro il solo tratto che corrisponde ad una di queste parti. Così per assegnare un numero matematicamente infinito di punti in una retta, non è necessario che la retta si estenda all' infinito da ambe le estremità: anche in un brevissimo pezzo di essa, purchè sia di finita lunghezza, è infinito il numero dei punti che vi si possono distinguere, se non coll'atto certamente col pensiero.

2. Le equazioni identiche, nelle quali i due membri sono formole diverse di forma ma eguali di valore, sussistono in generale per tutti i valori possibili delle variabili da $-\infty$ a $+\infty$, ed anche immaginarj. È vero che si dà qualche caso di eccezione: per esempio l' equazione tra la funzione di una variabile e il suo sviluppo colla serie di Taylor può di-

venir falsa, come è notissimo, per alcuni valori particolari della variabile. È vero altresì che le equazioni identiche le quali, come quella ultimamente nominata, hanno in un membro una funzione sotto forma finita e nell' altro una serie infinita, si devono ritenere erronee (1) per tutti i valori particolari della variabile che producono nelle serie infinite la divergenza. Però queste speculazioni sono di tutt' altro genere di quelle che quì ci conducono a stabilire una proposizione, la quale sul principio fa qualche urto a motivo della sua singolarità, ma trovasi di verità inconcussa e di estrema importanza. *Si danno equazioni che sussistono solamente pel corso delle variabili fra limiti la cui differenza è una quantità finita*. Così se trattasi di una sola variabile x, l' equazione sarà vera solamente per tutto il tratto finito della x fra certi limiti a, b, e sarà falsa pei valori di x antecedenti ad a, e per quelli susseguenti a b. Una tale proposizione servendo di base a tutta la teorica che ho preso ad esporre, merita di essere con diligenza esaminata e riconosciuta. Parmi che non si possa contrastare al Sig. Fourier la gloria di averne data la vera dimostrazione: ed ora io non farò che seguire in una maniera generale quello stesso andamento che il detto Geometra ha tracciato per un caso particolare (2). Nè può essere senza sorpresa il vedere come una verità rimasta per tanto tempo così recondita, emerga da assai facili considerazioni sulla natura delle equazioni lineari a più incognite.

3. Vuolsi una equazione tra una funzione qualunque $\varphi(x)$ e una serie che ne' suoi termini contenga la stessa x, e vuolsi che questa equazione sià vera unicamente pei valori di x compresi fra a, b. Si assuma un' altra funzione $\psi_n(x)$ di x e di un indice n numero intero, la cui forma ψ sia in origine arbitraria e indipendente dalla forma φ: si divida per n la dif-

---

(1) Poisson. Journal de l' Ecole Polyt. Cah. 19. pag. 501.

(2) Theorie de la Chaleur. Chap. III. Sect. VI.

ferenza $b-a$ dei due limiti e si ponga per abbreviazione

$$(1)\qquad \omega = \frac{b-a}{n};$$

poscia si formi un quadro di equazioni come segue

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
\varphi(a) &= A_1\psi_1(a) + A_2\psi_2(a) + A_3\psi_3(a) + \ldots \\
&\qquad \ldots\ldots + A_{n+1}\psi_{n+1}(a) \\
\varphi(a+\omega) &= A_1\psi_1(a+\omega) + A_2\psi_2(a+\omega) + A_3\psi_3(a+\omega) + \ldots \\
&\qquad \ldots\ldots + A_{n+1}\psi_{n+1}(a+\omega) \\
\varphi(a+2\omega) &= A_1\psi_1(a+2\omega) + A_2\psi_2(a+2\omega) + A_3\psi_3(a+2\omega) + \ldots \\
&\qquad \ldots\ldots + A_{n+1}\psi_{n+1}(a+2\omega) \\
\varphi(a+3\omega) &= A_1\psi_1(a+3\omega) + A_2\psi_2(a+3\omega) + A_3\psi_3(a+3\omega) + \ldots \\
&\qquad \ldots\ldots + A_{n+1}\psi_{n+1}(a+3\omega) \\
&\vdots \\
\varphi(a+(n-1)\omega) &= A_1\psi_1(a+(n-1)\omega) + A_2\psi_2(a+(n-1)\omega) \\
&\qquad + A_3\psi_3(a+(n-1)\omega) + \ldots\ldots + A_{n+1}\psi_{n+1}(a+(n-1)\omega) \\
\varphi(b) &= A_1\psi_1(b) + A_2\psi_2(b) + A_3\psi_3(b) + \ldots \\
&\qquad \ldots\ldots + A_{n+1}\psi_{n+1}(b)
\end{aligned}\right.$$

Quì A_1, A_2, $A_3 \ldots\ldots A_{n+1}$ sono coefficienti incogniti da determinarsi, e siccome essi sono di numero $n+1$ precisamente come le equazioni, si vede che la loro determinazione può sempre intendersi come fatta: nella quale supposizione i medesimi coefficienti riescono quantità che dipendono no da cinque cose: dalle due forme φ, ψ, da due limiti a, b, e dal numero n per cui è divisa la differenza $b-a$. Se ora nelle precedenti equazioni (2) si sostituiscano ai coefficienti incogniti i loro valori determinati come si è detto, è manifesto che tutte quelle equazioni diventeranno identiche: il che è lo stesso che dire in altri termini; l'equazione

$$(3)\qquad \varphi(x)=A_1\psi_1(x)+A_2\psi_2(x)+A_3\psi_3(x)+\ldots\ldots+A_{n+1}\,\psi_{n+1}(x)$$

ove A_1, A_2, A_3...... A_{n+1} s'intendono avere i valori costanti trovati come fu esposto, è *vera* per gli $n+1$ valori di x seguenti,

$$a,\ a+\omega,\ a+2\omega,\ a+3\omega,\ \ldots\ a+(n-1)\omega,\ b$$

e per tutti gli altri valori di x prima di a o dopo b o intermedj fra a, $a+\omega$: $a+\omega$, $a+2\omega$: $a+2\omega$, $a+3\omega$: ec. l'equazione (3) non sussiste e deve dirsi falsa. Onde fissar meglio le idee, se nella (3) i due membri rappresentano le ordinate di due curve piane riferite agli stessi assi, queste curve avranno un numero $n+1$ di punti d'incontro corrispondenti agli $n+1$ valori dell'ascissa x ultimamente scritti; per tutti gli altri valori dell'ascissa le ordinate saranno diverse, e i corsi delle curve saranno distinti; ben è vero che moltiplicando i punti d'incontro ne verrà di conseguenza che i detti corsi delle due curve fra i limiti a, b che esprimono le ascisse estreme, si approssimeranno sempreppiù verso la coincidenza.

4. Quanto più è grande nella (1) il numero n, tanto più grande è il numero delle equazioni (2), e quindi tanto maggiore è il numero dei valori di x intermedj fra a, b per cui si verifica l'equazione (3). Il problema è sempre solubile anche quando n diventa numero grandissimo, perchè insieme col numero delle equazioni (2) cresce in esse quello dei coefficienti da determinarsi, e vi è sempre eguale. Si vede perciò come sia possibile, impiegando un numero infinito di coefficienti, di verificare l'equazione (3) per l'infinito numero dei valori di x compresi fra i valori estremi a, b. Tale risulta-

mento potrà esistere *come limite* di tutti quegli altri risultamenti che si otterranno crescendo continuamente il numero delle equazioni (2), e che ad esso sempreppiù si avvicineranno. Allora l'equazione (3) avrà nel secondo membro una serie infinita: e i valori dei coefficienti A_1, A_2, A_3 . . . saranno i *limiti* verso i quali continuamente convergeranno al crescere di n quelle funzioni dell' indice stesso n, che per essi si cavano dalla soluzione delle equazioni (2). Una tale equazione (3) avente nel secondo membro una serie infinita, sarà vera per tutti i valori di x compresi fra a e b, ma pei valori di x prima di a e dopo b sarà falsa. I corsi delle curve piane le cui ordinate sono espresse dai due membri della equazione suddetta coincideranno perfettamente per tutto il corso della ascissa da a a b, ma prima e dopo saranno distinti. Ecco la stessa proposizione enunciata al numero 2.

5. Scriviamo l' equazione (3) quando il secondo membro è una serie infinita giusta l'esposto nel numero precedente e poniamo

$$(4) \qquad \varphi(x)=\dot{A}_1\psi_1(x)+\dot{A}_2\psi_2(x)+\ldots\ldots\dot{A}_i\psi_i(x)+\ldots \text{ all' inf.}$$

dove le $\dot{A}_1$, $\dot{A}_2$, $\dot{A}_3$, ecc. marcate con un punto in alto, sono le A_1, A_2, A_3, ecc. nelle quali è stata fatta $n=\infty$. Dietro un principio noto nella teorica delle serie si potranno anche intendere i coefficienti $\dot{A}_1$, $\dot{A}_2$, $\dot{A}_3$, ... funzioni dell' indice, cioè dedotti tutti da una medesima funzione $\dot{A}_i$ dell' indice i in cui facciasi successivamente $i=1$, 2, 3, ... ec. Difatto si capisce che potendosi nel secondo membro della precedente equazione senza alterarne il valore, cambiare i termini fra di loro di posto in tutte le maniere, la ragione per cui uno qualunque dei coefficienti $\dot{A}_1$, $\dot{A}_2$, $\dot{A}_3$ ec. diversifica dai compagni, non può venire da altro se non dall' essere esso coefficiente di diversa quantità variabile, per es. della $\psi_2(x)$ piuttosto che della $\psi_3(x)$; ma come queste stesse quantità variabili non diversificano fra loro per diversa forma di funzione ma solo per diverso valore dell' indice; anche quelle quantità la cui differenza è attaccata a quest'unica ragione, diversificheranno alla stessa maniera. Adunque la precedente equazione (4) potrà scriversi

$$(5) \qquad \varphi(x) = \Sigma_{1}^{\infty} \Delta i . \dot{A}_i \psi_i(x)$$

significando l' espressione del secondo membro l' integrale finito per i della funzione $A_i \psi_i(x)$ definito fra i limiti $1, \infty$. (*) Questa equazione (5) ci fa palese come il valore della funzione $\varphi(x)$ per il solo corso della variabile fra a, b può essere rappresentato da un' altra espressione in cui la variabile è posta sotto un altro simbolo di funzione ψ affatto diverso da φ. Tali seconde espressioni che riempiono gli ufficj delle prime, sono poi affette da segni di integrali definiti, che possono, se si vuole, cangiarsi in integrali definiti continui, e che sono presi per tutt' altra lettera che non è la variabile x. Essendo la (5) in quanto alla sostanza la stessa equazione (4), di essa pure varrà ciò che si è detto di quella, cioè che se i due membri significano le ordinate di due curve piane riferite agli stessi assi, dette curve anderanno insieme per tutto il tratto dell'ascissa da $x=a$ fin $x=b$, comunque prima e dopo siano distinte: al qual fatto geometrico singolarissimo è stato dal Fourier dato il nome di *osculazione finita.* In questa coincidenza di valori (per un tratto continuo finito della variabile) di due formole di

---

(*) Vedi la Nota posta in fondo a questa memoria dove rendo ragione della notazione quì adottata, ed espongo alcuni teoremi sul calcolo degli integrali finiti definiti che mi sono necessarj: dei quali uno dei primi è quello che permette il passaggio dalle espressioni come la (4) alle espressioni come la (5).

diversa forma, che danno per tutt'altro tratto diversi valori, sta il principio della discontinuità delle funzioni.

6. Ma questo principio può anche presentarsi sotto un aspetto di maggior estensione. Al n.° 3. formando le equazioni (2) abbiamo tenuta costante nel primo membro di tutte le $n+1$ equazioni la forma φ: ora questa si può variare una, due, un numero qualunque di volte. Per procedere con chiarezza facciamo il caso di una sola mutazione: fissiamo tre valori a, b, c della variabile x tra loro distanti di intervalli finiti, essendo $b > a$, $c > b$; dividiamo la differenza $c-a$ dei due valori estremi in un numero arbitrario n di parti eguali, ponendo per brevità $\omega = \frac{c-a}{n}$; poi nella formazione delle equazioni (2) riteniamo la forma φ nei primi membri di un numero $m+1$ di equazioni, scrivendoli

$$\varphi(a),\ \varphi(a+\omega),\ \varphi(a+2\omega),\ \varphi(a+3\omega)\ , \ldots\ \varphi(a+m\omega)$$

essendo $a+m\omega$ ovvero $a+m\,\frac{c-a}{n}$ quantità immediatamente minore di b, talchè $a+(m+1)\frac{c-a}{n}$ sarebbe di b maggiore. Per le altre $n-m$ equazioni che restano, adottiamo nei primi membri una forma χ diversa da φ e scriviamoli

$$\chi(a+(m+1)\omega),\ \ \chi(a+(m+2)\omega)\ ,\ \ldots\ \chi(c).$$

Il ritrovamento degli $n+1$ coefficienti A_1, A_2, A_3, ec. è possibile egualmente mediante la soluzione delle $n+1$ equazioni: soltanto è da avvertire che le loro espressioni generali dipenderanno da entrambe le forme φ, χ dei primi membri oltre la ψ dei secondi. Questa circostanza non toglie che possa ingrandirsi a piacimento il numero n (come è detto al n.° 4.) e che così possa arrivarsi anche in tal caso ad un risultamento esistente come limite di tutti quelli che si ottengono coi successivi ingrandimenti di n. Quando n diventa infinita, è infinita anche m, ma il rapporto $\frac{m}{n}$ è finito ed eguaglia $\frac{b-a}{c-a}$, talchè $a+m\omega$ diventa b. Allora i coefficienti A_1, A_2, A_3 ... prendono i valori limiti che si cavano dai loro valori generali dedotti dalla soluzione delle equazioni (2), ove pongansi m, n infinite: essi dipenderanno unicamente dalle tre forme ϕ, χ, ψ, e dai tre valori a, b, c. La serie infinita del secondo membro della (4), che può indicarsi per $\Sigma_1^\infty \Delta i.\dot{A}_i\psi_i(x)$ sarà una tale funzione di x, che per tutti i valori di x da a a b darà gli stessi risultamenti della funzione $\phi(x)$, e per tutti i valori di x da b a c darà gli stessi risultamenti della funzione $\chi(x)$. È evidente che se invece di due funzioni $\phi(x)$, $\chi(x)$ ne prendessimo tre, potremmo collo stesso metodo costruire una serie infinita (da compendiarsi poi mediante la sommatoria) la quale per un certo tratto finito del corso della variabile avrà tutti i valori coincidenti con quelli cavati dalla prima funzione, per un tratto seguente li avrà coincidenti coi valori cavati dalla seconda funzione, e per il terzo tratto li avrà coincidenti con quelli cavati dalla terza. Questa speculazione si estende senza difficoltà al caso di un numero qualunque di forme che si cambjno nei primi membri delle equazioni (2). Se allora si prenda l'espressione integrale $\Sigma_1^\infty \Delta i.\dot{A}_i\psi_i(x)$ per l'ordinata di una curva piana, è chiaro che una tal curva sarà discontinua: il suo corso andrà d'accordo per un tratto finito dell'ascissa colla curva dell'ordinata $\phi(x)$, pel tratto seguente dell'ascissa colla curva dell'ordinata $\chi(x)$, e così di seguito. Pertanto una sola espressione, *che non si muta mai*, tradotta alla Geometria potrà rappresentare contorni discontinui.

7. Meritano singolare attenzione quelle espressioni che si trovano dietro il principio del numero precedente, e che contenendo una variabile, pure *conservano per un tratto finito e anche infinito del corso della variabile un valore costante che*

può essere anche zero. Infatti il discorso del numero precedente sta tutto egualmente, anche supponendo che le prime $m+1$ equazioni invece di avere i primi membri formati colla forma φ, come si è detto, li avessero formati tutti della stessa quantità costante k. Questo sarebbe il caso particolare di $\varphi(x)=k$; vi si aggiunga l' altro caso particolare di $\chi(x)=0$, e la $\Sigma_1^\infty \Delta i.\dot{A}_i \psi_i(x)$ sarà una tale funzione discontinua di x che pel tratto da $x=a$ a $x=b$ avrà sempre uno stesso valor costante k, e pel tratto da $x=b$ a $x=c$ avrà sempre il valore zero. Si sa che nelle applicazioni ai problemi fisici, come nella teorica del calore o in quella delle onde, occorrono simili funzioni discontinue, che per lunghi e anche infiniti tratti del corso della variabile sono sempre di valor costante o nullo, e danno alle volte valori variabili solo corrispondentemente a qualche breve tratto.

8. È pure cosa degna di molta considerazione quel mantenersi una costanza di espressione nella quantità $\Sigma_1^\infty \Delta i.\dot{A}_i \psi_i(x)$ nel mentre i valori da essa rappresentati soffrono dei salti. Vedremo, per un esempio, più tardi quale è questa espressione nel caso che significhi l' ordinata del contorno discontinuo di un triangolo: l' ascissa dopo avere appartenuto ad un lato apparterrà al seguente e passerà il vertice ove la retta di contorno è spezzata: eppure di un tale passaggio niun sintomo apparirà nella trovata espressione, la quale è una serie che presenta eleganza e regolarità come le altre serie infinite. Ecco una proprietà recondita di tali espressioni che non si crederebbe se non fosse altrimenti dimostrata in modo da non lasciar dubbio.

9. Si può nelle equazioni (2) del n.° 3. supporre il secondo membro formato non di una sola serie, ma di due, di tre, ec: allora essendo maggiore il numero delle incognite, bisognerà dare una più grande estensione al corso della variabile per abbracciare un maggior numero di equazioni e tanto quanto basta per determinare tutte le incognite. Faremo il caso di due serie: riterremo tutto come al n.° 3. e porremo il sistema

$$
(6)\left\{
\begin{aligned}
\varphi(a) = C\ & \begin{aligned}[t] &+A_1\psi_1(a) \quad +A_2\psi_2(a) \quad +A_3\psi_3(a) \quad +\ldots\ldots \\ &\qquad \ldots +A_n\psi_n(a) \\ &+B_1\theta_1(a) \quad +B_2\theta_2(a) \quad +B_3\theta_3(a) \quad +\ldots\ldots \\ &\qquad \ldots +B_n\theta_n(a) \end{aligned} \\[1ex]
\varphi(a+\omega) = C\ & \begin{aligned}[t] &+A_1\psi_1(a+\omega) +A_2\psi_2(a+\omega) +A_3\psi_3(a+\omega) +\ldots\ldots \\ &\qquad \ldots +A_n\psi_n(a+\omega) \\ &+B_1\theta_1(a+\omega) +B_2\theta_2(a+\omega) +B_3\theta_3(a+\omega) +\ldots\ldots \\ &\qquad \ldots +B_n\theta_n(a+\omega) \end{aligned} \\[1ex]
\varphi(a+2\omega) = C\ & \begin{aligned}[t] &+A_1\psi_1(a+2\omega)+A_2\psi_2(a+2\omega)+A_3\psi_3(a+2\omega)+\ldots\ldots \\ &\qquad \ldots +A_n\psi_n(a+2\omega) \\ &+B_1\theta_1(a+2\omega)+B_2\theta_2(a+2\omega)+B_3\theta_3(a+2\omega)+\ldots\ldots \\ &\qquad \ldots +B_n\theta_n(a+2\omega) \end{aligned} \\
& \qquad\qquad \vdots \\
\varphi(a+(2n-1)\omega) = C\ & \begin{aligned}[t] &+A_1\psi_1(a+(2n-1)\omega)+A_2\psi_2(a+(2n-1)\omega)+\ldots \\ &\qquad \ldots +A_n\psi_n(a+(2n-1)\omega) \\ &+B_1\theta_1(a+(2n-1)\omega)+B_2\theta_2(a+(2n-1)\omega)+\ldots\ldots \\ &\qquad \ldots +B_n\theta_n(a+(2n-1)\omega) \end{aligned} \\[1ex]
\varphi(a+(2b-a)) = C\ & \begin{aligned}[t] &+A_1\psi_1(2b-a)+A_2\psi_2(2b-a)+\ldots\ldots+A_n\psi_n(2b-a) \\ &+B_1\theta_1(2b-a)+B_2\theta_2(2b-a)+\ldots\ldots+B_n\theta_n(2b-a) \end{aligned}
\end{aligned}
\right.
$$

dove i coefficienti incogniti sono di numero $2n+1$ come le equazioni. Potranno dunque tutti essere determinati, e allora l' equazione

$$(7) \qquad \phi(x)=C \begin{array}{l} +A_1\psi_1(x)+A_2\psi_2(x)+\ldots\ldots+A_n\psi_n(x) \\ +B_1\theta_1(x)+B_2\theta_2(x)+\ldots\ldots+B_n\theta_n(x) \end{array}$$

sarà vera pei $2n+1$ valori di x seguenti

$$a,\ a+\omega, \ldots a+(n-1)\omega,\ b,\ a+(n+1)\omega, \ldots\ a+(2n-1)\omega,\ 2b-a.$$

Quando poi si passa al risultamento del limite per n infinita l' equazione

$$(8) \qquad \phi(x)=\dot{C} \begin{array}{l} +\dot{A}_1\psi_1(x)+\dot{A}_2\psi_2(x)+\ldots\ldots+\dot{A}_i\psi_i(x)+\text{ec.} \\ +\dot{B}_1\theta_1(x)+\dot{B}_2\theta_2(x)+\ldots\ldots+\dot{B}_i\theta_i(x)+\text{ec.} \end{array}$$

ha nel secondo membro una doppia serie infinita, e può compendiarsi nella espressione

$$(9) \qquad \phi(x)=\dot{C}+\Sigma_1^{\infty}\Delta i.\dot{A}_i.\psi_i(x)+\Sigma_1^{\infty}\Delta i.\dot{B}_i\,\theta_i(x)$$

la quale è vera soltanto per tutti i valori di x compresi fra a, $2b-a$.

10. Noterò per la storia della scienza che l' idea piuttosto astrusa delle funzioni discontinue è stata raggiunta dai Geometri già da quasi un secolo. Ecco un passo di Lagrange in cui si rileva assai chiaramente „ On voit la nécessité „ d' admettre dans ce calcul d'autres courbes que celles, que „ les Géomètres ont considèré jusqu à présent, et d' emploier „ un nouveau genre des fonctions variables indépendentes de „ la loi de continuité, et qu' on peut trés bien appeller fon- „ ctions irrégulieres et discontinues. Mais ce n'est pas ici le

„ seul usage qu' on doit faire de ces sortes de fonctions: el-
„ les sont nécessaires pour un grand nombre de questions
„ importantes de Dynamique et d'Hydrodynamique. Car lorsque
„ on a un sistéme de corps, ou de points mobiles, dont le
„ nombre est infini, et qu' on en cherche les mouvemens,
„ aprés les avoir, come que ce soit, derangé de leur état
„ d'équilibre, il est facile de comprendre que tous ces mou-
„ vemens ne pourront étre contenus dans une même formu-
„ le, à moins qu' elle ne soit aussi applicable au premier
„ état du systeme, qui est tout-à-fait arbitraire, et dans le-
„ quel la loi de continuité est le plus souvent violée: M. Euler
„ est, je crois, le prémier qui ait introduit dans l' analyse
„ ce nouveau genre de fonctions ec. (1). „ Ma Lagrange ha fatto molto più: egli ha assegnata una serie periodica il cui valore eguaglia fra certi limiti quello di una funzione qualunque, onde un chiarissimo Geometra vivente, che arricchì anch' egli de' suoi trovati questo ramo d'analisi, ebbe a dire:
„ c'est à Lagrange que l'analyse est redevable de la premiére
„ formule générale de cette espéce (2). Niun Geometra però, s' io ben m' avviso, ha più avanzata una teoria così importante quanto il Sig. Fourier, il quale nel suo trattato del calore (opera che senza un soverchio apparato di calcoli è tutta sparsa di profonde viste analitiche) oltre esser giunto ad alcune grandi scoperte ha, insieme mostrata la via da tenersi pei futuri progressi. Le funzioni discontinue finora assegnate dai Geometri sono tutte espresse o per serie infinite compendiate per mezzo delle sommatorie, o per integrali definiti; ultimamente però il Sig. Guglielmo Libri ha escogitate espressioni di funzioni discontinue formate colle sole quantità trascendenti ordinarie (3); su di che aspetteremo le ulteriori

---

(1) Miscell. Taur. T. 2. pag. 18.

(2) Poisson. Journal de l'Ecole Polyt. Cah. 19. pag. 444.

(3) Memoires de Mathematique et de Physique. Florence 1829.

sue dichiarazioni. Egli è anche felicemente riuscito ad assegnare espressioni analitiche in cui la discontinuità è necessaria conseguenza di quella conosciuta e propria di alcuni integrali definiti; ottima risposta per via di fatto alle difficoltà di coloro che ancor dubitassero dell' esistenza di tali funzioni. A me pare però che per cercare a *priori* queste funzioni discontinue senza attaccarsi ad altri risultamenti già noti, e per mostrare il modo e la ragion metafisica della loro formazione, la via da tenersi sia quella che negli antecedenti numeri ho incominciato a dichiarare.

§. 2.

Si propone un metodo generale che può tenersi in queste ricerche.

11. Mostrerò come si possa dalle equazioni (2), (6) dedurre equazioni contenenti una funzione arbitraria alla quale attribuendo una determinazione opportuna farsi così strada alla ricerca delle funzioni come A_i, nel cui ritrovamento sta tutta la difficoltà della presente teorica.

Denotando $f(x)$ una forma di funzione arbitraria per riguardo alla composizione in x, si moltiplichi la prima delle (2) per $f(a)$, la 2.^{a} per $f(a+\omega)$, la terza per $f(a+2\omega)$ . . . l' $(h+1)$*esima* per $f(a+h\omega)$ . . . . l' $(n+1)$*esima* per $f(a+n\omega)$, poi sommando tutte le dette equazioni, tale somma potrà scriversi (1).

$$\Sigma_0^{n+1}\Delta h.\phi(a+h\omega)f(a+h\omega)=A_1\Sigma_0^{n+1}\Delta h.\psi_1(a+h\omega)f(a+h\omega)$$

$$+A_2\Sigma_0^{n+1}\Delta h.\psi_2(a+h\omega)f(a+h\omega)+\ldots.$$

---

(1) Vedi la Nota posta in fine della presente Memoria, Teor. II.

$$+A_i\Sigma_0^{n+1}\Delta h.\psi_i(a+h\omega)f(a+h\omega)+\ldots\ldots$$

$$+A_{n+1}\Sigma_0^{n+1}\Delta h.\psi_{n+1}(a+h\omega)f(a+h\omega),$$

e siccome per un teorema del calcolo degli integrali finiti definiti (1)

$$\Sigma_0^{m}\Delta m.\mathrm{F}(m\omega)=\Sigma_0^{m\omega}\Delta\alpha.\mathrm{F}(\alpha)$$

quando $\Delta m=1$, e $\Delta\alpha=\omega$; la precedente equazione può anche scriversi

$$\Sigma_0^{b-a+\omega}\Delta\alpha.\phi(a+\alpha)f(a+\alpha)=A_1\Sigma_0^{b-a+\omega}\Delta\alpha\psi_1(a+\alpha)f(a+\alpha)$$

$$+A_2\Sigma_0^{b-a+\omega}\Delta\alpha.\psi_2(a+\alpha)f(a+\alpha)+\ldots\ldots$$

$$+A_i\Sigma_0^{b-a+\omega}\Delta\alpha.\psi_i(a+\alpha)f(a+\alpha)+\ldots\ldots$$

$$+A_{n+1}\Sigma_0^{b-a+\omega}\Delta\alpha.\psi_{n+1}(a+\alpha)f(a+\alpha).$$

Moltiplicata questa equazione in ambi i membri per ω, si può a dirittura avere il risultamento del limite pel caso di n cresciuta fino all'infinito ossia di ω diminuita fino a zero: infatti allora ognuno degli integrali finiti definiti precedenti ha per limite un integrale continuo (2), e si ottiene

$$\int_0^{b-a}d\alpha.\phi(a+\alpha)f(a+\alpha)=A_1\int_0^{b-a}d\alpha.\psi_1(a+\alpha)f(a+\alpha)+$$

---

(1) Vedi la Nota suddetta, Teor. III.

(2) Chi non avesse in pronto altro autore in cui trovare la ragione di questo passo, può consultare la mia Memoria *sull' applicazione dei principj della Meccanica analitica del Lagrange, coronata dall' Istituto,* alla pag. 102. n. 134.

$$+\dot{A}_2\int_0^{b-a} d\alpha.\psi_2(a+\alpha)f(a+\alpha)+\ldots.+\dot{A}_i\int_0^{b-a} d\alpha\psi_i(a+\alpha)f(a+\alpha)+\text{ ec.}$$

la quale per un teorema del calcolo degli integrali definiti assai facile a dimostrarsi (1) si può scrivere

$$(10)\quad \int_a^b d\alpha.\varphi(\alpha)f(\alpha)=\dot{A}_1\int_a^b d\alpha.\psi_1(\alpha)f(\alpha)+\dot{A}_2\int_a^b d\alpha.\psi_2(\alpha)f(\alpha)$$

$$+\dot{A}_3\int_a^b d\alpha\psi_3(\alpha)f(\alpha)+\ldots.+\dot{A}_i\int_a^b d\alpha.\psi_i(\alpha)f(\alpha)+\ldots.. \text{ all' inf.}$$

che può anche compendiarsi nella

$$(11)\qquad \int_a^b d\alpha.\varphi(\alpha)f(\alpha)=\Sigma_1^{\infty}\Delta i.\dot{A}_i\int_a^b d\alpha.\psi_i(\alpha)f(\alpha).$$

Queste equazioni (10), (11) contengono a dirittura le quantità del limite, e sono quelle dietro cui, disponendo della funzione arbitraria $f(\alpha)$, cercare di determinare i coefficienti $\dot{A}_1$ $\dot{A}_2$, $\dot{A}_3$, ec. Si poteva cavare a dirittura la (10) dalla (4) moltiplicandola in ambi i membri per $f(x)$, e poi integrando per

---

(1) Desiderando un libro in cui il calcolo degli integrali definiti sia, come meriterebbe, trattato di proposito in tutta la sua estensione; citerò frattanto per questo teorema il *Cauchy Résumé des leçons données a l'Ecole Palyth. Leçon* 22. *équat.* 17. Anche senza citazioni, il teorema che si legge nella equazione.

$$\int_x^b dx.\varphi(x)=\int_0^{b-a} dx.\varphi(a+x)$$

è subito dimostrato ponendo nel primo integrale $x=a+y$, e poi rimettendo x in luogo di y dopo che, fatte le sostituzioni, si capisce che la y non entra se non in un modo puramente istrumentale, onde può essere supplita da qualsivoglia altra lettera.

x fra i limiti a, b: ma l'analisi precedente ha il vantaggio di provare che i limiti fra cui nella (10) debbono essere definiti gl'integrali, sono quelli stessi fra cui si è stabilita vera l'equazione (3). Di più nel caso del n.° 6, quando tra la prima e l'ultima equazione il primo membro cambia una o più volte di forma, l'adottato metodo di dimostrazione è anche maggiormente opportuno, come ora ora vedrassi.

Un andamento affatto simile di calcolo tenuto sulla (6) conduce alla equazione

$$(12)\quad \int_a^{2b-a} d\alpha.\varphi(\alpha)f(\alpha) = \dot{\mathrm{C}}\int_a^{2b-a} d\alpha f(\alpha) \begin{cases} + \dot{\mathrm{A}}_1 \int_a^{2b-a} d\alpha.\psi_1(\alpha)f(\alpha) + \ldots. \\ + \dot{\mathrm{A}}_i \int_a^{2b-a} d\alpha.\psi_i(\alpha)f(\alpha) + \text{ec.} \\ + \dot{\mathrm{B}}_1 \int_a^{2b-a} d\alpha.\,\theta_1(\alpha)f(\alpha) + \ldots. \\ + \dot{\mathrm{B}}_i \int_a^{2b-a} d\alpha.\,\theta_i(\alpha)f(\alpha) + \text{ec.} \end{cases}$$

che può compendiarsi nella

$$(13)\quad \int_0^{2b-a} d\alpha.\varphi(\alpha)f(\alpha) = \dot{\mathrm{C}}\int_a^{2b-a} d\alpha f(\alpha) + \Sigma_1^{\infty}\Delta i\dot{\mathrm{A}}_i\int_a^{2b-a} d\alpha.\psi_i(\alpha)f(\alpha)$$
$$+ \Sigma_1^{\infty}\Delta i.\dot{\mathrm{B}}_i\int_a^{2b-a} d\alpha.\theta_i(\alpha)f(\alpha)$$

dove la $f(\alpha)$ è parimenti una funzione di forma arbitraria.

12. Comincierò, per dare un esempio, a dedurre dalle precedenti equazioni generali una formola notissima e di grand' uso negli scritti de' moderni analisti. Sia nella (3)

$$\psi_i(x) = \sin.\frac{i\pi x}{r}$$

dove r è una quantità qualunque reale positiva, e vogliasi che l' equazione (4) sia vera fra i limiti 0, r. La (10) diventa

$$\int_0^r d\alpha.\varphi(\alpha)f(\alpha) = \dot{A}_1\int_0^r d\alpha.\sin.\frac{\pi\alpha}{r}f(\alpha) + \dot{A}_2\int_0^r d\alpha.\sin.\frac{2\pi\alpha}{r}f(\alpha) + \ldots.$$

$$\ldots. + \dot{A}_i\int_0^r d\alpha.\sin.\frac{i\pi\alpha}{r}f(\alpha) + \text{ec.}$$

Dispongasi dell'arbitraria $f(\alpha)$ facendola eguale a $\sin.\frac{i\pi\alpha}{r}$; e siccome il calcolo degli integrali definiti (il che si prova facilmente per mezzo dell' integrazione ordinaria) dà

$$\int_0^r d\alpha.\sin.\frac{k\pi\alpha}{r}\sin.\frac{i\pi\alpha}{r} = 0;\quad \int_0^r d\alpha\left(\sin.\frac{i\pi\alpha}{r}\right)^2 = \frac{r}{2};$$

essendo nella prima di queste k un numero intero qualunque diverso da i; tutti i termini nel secondo membro dell'ultima equazione si annullano, tranne quello che ha $\dot{A}_i$ per cofficiente, e si cava

$$\dot{A}_i = \frac{2}{r}\int_0 d\alpha.\varphi(\alpha)\sin.\frac{i\pi\alpha}{r}$$

per cui la (5) diventa

$$(14)\qquad \varphi(x) = \frac{2}{r}\sum_1^\infty \Delta i\int_0^r d\alpha.\varphi(\alpha)\sin.\frac{i\pi\alpha}{r}\sin.\frac{i\pi x}{r}.$$

Se avessimo presa per $\psi_i(x)$ la forma più generale sin. $\left(\mathrm{H}_i\pi\,\frac{x-a}{b-a}\right)$, dove H_i è una funzione qualunque razionale intera di i, e quindi avessimo disposto della $f(\alpha)$ ponendola eguale a sin. $\left(\mathrm{H}_i\pi\,\frac{\alpha-a}{b-a}\right)$: lo stesso andamento di calcolo ci avrebbe somministrata la

$$(15)\quad \phi(x)=\frac{2}{b-a}\Sigma_1^{\infty}\Delta i.\int_a^b d\alpha.\phi(\alpha)\mathrm{sin.}\left(\mathrm{H}_i\pi\frac{\alpha-a}{b-a}\right)\mathrm{sin.}\left(\mathrm{H}_i\pi\frac{x-a}{b-a}\right)$$

che è vera soltanto fra i limiti a, b.

13. Sia il caso del n.° 6., si esprima cioè per $\mathrm{F}(x)$ una funzione discontinua che pel tratto da a a b deve somministrare gli stessi valori della $\phi(x)$, e pel tratto da b a c gli stessi valori della $\chi(x)$. Si potrà egualmente formare una equazione che tenga luogo della (10). Seguendo l'andamento descritto al prec. n.° 11. si formerà primieramente una equazione colle sommatorie finite che sarà

$$\Sigma_0^{m+1}\Delta h.\phi(a+h\omega)f(a+h\omega)+\Sigma_{m+1}^{n+1}\Delta k.\chi(a+k\omega)f(a+k\omega)=$$

$$\mathrm{A}_1\Sigma_0^{m+1}\Delta h.\psi_1(a+h\omega)f(a+h\omega)+\ldots+\mathrm{A}_i\Sigma_0^{m+1}\Delta h.\psi_i(a+h\omega)f(a+h\omega)+\mathrm{ec.}$$

$$+\mathrm{A}_1\Sigma_{m+1}^{n+1}\Delta k.\psi_1(a+k\omega)f(a+k\omega)+\ldots+\mathrm{A}_i\Sigma_{m+1}^{n+1}\Delta k\psi_i(a+k\omega)f(a+k\omega)+\mathrm{ec.}$$

dove h, k sono due lettere denotanti numeri interi introdotte per formare l'espressione delle sommatorie. Da questa si passerà all' altra parimenti colle sommatorie finite,

$$\Sigma_0^{b-a+g\omega}\Delta\alpha.\phi(a+\alpha)f(a+\alpha)+\Sigma_{b-a+g\omega}^{c-a+\omega}\Delta\alpha.\chi(a+\alpha)f(a+\alpha)=$$

$$\mathrm{A}_1\Sigma_0^{b-a+g\omega}\Delta\alpha.\psi_1(a+\alpha)f(a+\alpha)+\ldots+\mathrm{A}_i\Sigma_0^{b-a+g\omega}\Delta\alpha.\psi_i(a+\alpha)f(a+\alpha)+\mathrm{ec.}$$

$$+\mathrm{A}_1\Sigma_{b-a+g\omega}^{c-a+\omega}\Delta\alpha.\psi_1(a+\alpha)f(a+\alpha)+\,..+\mathrm{A}_i\Sigma_{b-a+g\omega}^{c-a+\omega}\Delta\alpha.\psi_i(a+\alpha)f(a+\alpha)+\mathrm{ec.}$$

in virtù del teorema del calcolo degli integrali finiti definiti al n. 11. citato in nota, osservando essere $m\omega = b - a$, $n\omega = c - a$, ed esprimendo per g un numero minore dell'unità. Da tale equazione poi si passerà a quella del limite, che a motivo di due teoremi noti (1) oltre quello già citato in nota al n.° 11 si riduce primieramente

$$\int_{0}^{b-a} d\alpha . \varphi(a+\alpha) f(a+\alpha) + \int_{b-a}^{c-a} d\alpha . \chi(a+\alpha) f(a+\alpha) =$$

$$\dot{A}_1 \int_{0}^{c-a} d\alpha . \psi_1(a+\alpha) f(a+\alpha) + \ldots + \dot{A}_i \int_{0}^{c-a} d\alpha . \psi_i(a+\alpha) f(a+\alpha) + \text{ec.}$$

e poscia

$$(16) \quad \int_{a}^{b} d\alpha . \varphi(\alpha) f(\alpha) + \int_{b}^{c} d\alpha . \chi(\alpha) f(\alpha) = \dot{A}_1 \int_{a}^{c} d\alpha . \psi_1(\alpha) f(\alpha) + \ldots$$

$$\ldots + \dot{A}_i \int_{a}^{c} d\alpha . \psi_i(\alpha) f(\alpha) + \text{ec.}$$

che è l'equazione che tiene luogo della (10), e che vi è al tutto simile nel secondo membro. Quindi nel caso di

$$\psi_i(x) = \sin . \left(i\pi \frac{x-a}{c-a} \right) \text{ prendendo } f(\alpha) = \sin . \left(i\pi \frac{\alpha - a}{c - a} \right)$$

si provano similmente zero tutti i termini del secondo mem-

---

(1) Questi due teoremi sono

$$\int_{\alpha}^{\gamma} dx . \varphi(x) = \int_{\alpha}^{\beta} dx . \varphi(x) + \int_{\beta}^{\gamma} dx . \varphi(x);$$

$$\int_{\beta-\alpha}^{\gamma-\alpha} dx . \varphi(\alpha+x) = \int_{\beta}^{\gamma} dx . \varphi(x)$$

Il primo si prova subito supponendo $F(x)$ l' integrale indefinito $\int dx . \varphi(x)$, e facendo le sostituzioni: il secondo ponendo $\alpha + x = y$, e poi a sostituzione finita, rimettendo x per y, come si disse già in un caso simile potersi eseguire dietro il riflesso che le variabili sotto i segni d' integrali definiti non indicano che il posto di una lettera destinata a scomparire dopo la definizione dell' integrale. Questi teoremi si possono anche vedere dimostrati nell'opera del Cauchy sopra citato.

bro fuori del solo che contiene $\dot{\mathrm{A}}_i$ il quale riesce $\dot{\mathrm{A}}_i\,\frac{c-a}{2}$, laonde

$$\dot{\mathrm{A}}_i=\frac{2}{c-a}\int_a^b d\alpha.\varphi(\alpha)\,\sin.\left(i\pi\frac{\alpha-a}{c-a}\right)+\frac{2}{c-a}\int_b^c d\alpha.\chi(\alpha)\sin.\left(i\pi\frac{\alpha-a}{c-a}\right):$$

epperò la funzione discontinua che denominammo F(x) è

$$(17)\qquad \mathrm{F}(x)=\frac{2}{c-a}\Sigma_1^\infty \Delta i\left[\int_a^b d\alpha.\varphi(\alpha)\sin.\left(i\pi\frac{\alpha-a}{c-a}\right)\right.$$
$$\left.+\int_b^c d\alpha\chi(\alpha)\,\sin.\left(i\pi\frac{\alpha-a}{c-a}\right)\right]\sin.\left(i\pi\frac{x-a}{c-a}\right).$$

14. Per fare una applicazione geometrica, sia F(x) la funzione discontinua che rappresenta simultaneamente le ordinate variabili dei punti di due rette congiunte ad angolo, le quali insieme con una terza che coincide coll' asse delle ascisse chiudono il perimetro di un triangolo. Sia $\varphi(x)=k\,\frac{x-a}{b-a}$ l' equazione della prima retta, e $\chi(x)=k\frac{c-x}{c-b}$ quella della seconda retta, dove k è la perpendicolare abbassata dal vertice del triangolo sull' asse delle ascisse, a è l' ascissa pel punto d' incontro dell' asse colla prima retta, b l' ascissa pel piede della perpendicolare anzidetta, c l'ascissa pel punto d' incontro dell' asse colla seconda retta; sarà per la (17)

$$\mathrm{F}(x)=\frac{2k}{c-a}\,\Sigma_1^\infty \Delta i\left[\int_a^b d\alpha\,\frac{\alpha-a}{b-a}\sin.\left(i\pi\frac{\alpha-a}{c-a}\right)\right.$$
$$\left.+\int_b^c d\alpha\,\frac{c-\alpha}{c-b}\,\sin.\left(i\pi\frac{\alpha-a}{c-a}\right)\right]\sin.\left(i\pi\frac{x-a}{c-a}\right);$$

qui le integrazioni si possono eseguire, giacchè abbiamo la formola d' integrale indefinito

$$\int dx.(\mathrm{A}+\mathrm{B}x)\sin.(\mathrm{C}+\mathrm{D}x) = -\frac{1}{\mathrm{D}}(\mathrm{A}+\mathrm{B}x)\cos.(\mathrm{C}+\mathrm{D}x)$$

$$+\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{D}^2}\sin.(\mathrm{C}+\mathrm{D}x)$$

che ci conduce a trovare

$$\frac{1}{c-a}\int_a^b d\alpha\,\frac{\alpha-a}{b-a}\sin.\left(i\pi\frac{\alpha-a}{c-a}\right) = -\frac{1}{i\pi}\cos.\left(i\pi\frac{b-a}{c-a}\right)$$

$$+\frac{1}{i^2\pi^2}\,\frac{c-a}{b-a}\sin.\left(i\pi\frac{b-a}{c-a}\right);$$

$$\frac{1}{c-a}\int_a^b d\alpha\,\frac{c-\alpha}{c-b}\sin.\left(i\pi\frac{\alpha-a}{c-a}\right) = \frac{1}{i\pi}\cos.\left(i\pi\frac{b-a}{c-a}\right)$$

$$+\frac{1}{i^2\pi^2}\,\frac{c-a}{c-b}\sin.\left(i\pi\frac{b-a}{c-a}\right):$$

laonde sostituendo viene

$$(18)\qquad \mathrm{F}(x) = \frac{2k(c-a)^2}{\pi^2(b-a)(c-b)}\Sigma_1^\infty\,\Delta i.\,\frac{1}{i^2}\sin.\left(i\pi\frac{b-a}{c-a}\right)\sin.\left(i\pi\frac{x-a}{c-a}\right)$$

la quale non contiene più integrali continui ed è, come si vede, una serie infinita di legge manifesta. Nel caso di $a=0$, $k=\frac{1}{2}\pi$, $c=\pi$, la precedente dà

$$\mathrm{F}(x) = \frac{4}{\pi}\Sigma_1^\infty\,\Delta i.\,\frac{1}{i^2}\sin.\frac{i\pi}{2}\sin.ix,$$

ossia

$$\mathrm{F}(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin.x + \frac{1}{3^2}\sin.3x + \frac{1}{5^2}\sin.5x + \frac{1}{7^2}\sin.7x + \text{ec.}\right]$$

elegantissima serie trovata da Fourier.

15. L' integrale finito definito nella (18) si può eseguire: ma allora la formola *una* torna a scomporsi in due per le due parti separatamente continue. È pregio dell'opera il trattenersi un momento a dimostrarlo, perchè ciò primieramente servirà a verificare i calcoli precedenti, e in secondo luogo mostre-

rà con un esempio come le funzioni discontinue vogliono essere espressioni formate con segni integrali simili o continui, talchè questi tolti, esse cessano d'esistere. Scomponendo nella (18) il prodotto dei seni in differenza di coseni essa diventa,

$$F(x)=\frac{k(c-a)^2}{\pi^2(b-a)(c-b)}\left[\Sigma_1^\infty \Delta i\,\frac{1}{i^2}\cos.\left(i\pi\frac{b-x}{c-a}\right)-\Sigma_1^\infty \Delta i\frac{1}{i^2}\cos.\left(i\pi\frac{b+x-2a}{c-a}\right)\right] \tag{19}$$

ma abbiamo (*)

$$\Sigma_1^\infty \Delta i.\frac{\cos. i\xi}{i^2}=\frac{\xi^2}{4}-\frac{\xi\pi}{2}+\frac{\pi^2}{6},$$

purchè la ξ sia compresa fra 0, 2π. Questa condizione si vede adempiuta in entrambi gl'integrali precedenti finchè x è compresa fra a, b: ma se x passa b, diventa negativa la quantità sotto al coseno del primo integrale, e manca la condizione. Però tenendoci al solo corso di x fra a, b, cerchinsi i due integrali colla formola precedente, e la loro differenza sarà

$$\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{b-x}{c-a}\right)^2-\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{b-x}{c-a}\right)-\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{b+x-2a}{c-a}\right)^2+\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{b+x-2a}{c-a}\right)$$

che si raccoglie in $\frac{\pi^2(x-a)(c-b)}{(c-a)^2}$, la quale sostituita nella (19) la riduce $F(x)=k\,\frac{x-a}{b-a}$, cioè l'equazione della prima retta. Quando x passa b, allora per fare che il primo degli integrali finiti della (19) rientri nella condizione, bisogna mutare il segno alla quantità sotto al coseno e scriverla

$$\Sigma_1^\infty \Delta i.\frac{1}{i^2}\cos.\left(i\pi\frac{x-b}{c-a}\right);$$

cercati poscia i due integrali la loro differenza è

(*) Poisson. Journal. Polyt. Chap. 19. pag. 413.

$$\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{x-b}{c-a}\right)^2-\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{x-b}{c-a}\right)-\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{b+x-2a}{c-a}\right)^2+\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{b+x-2a}{c-a}\right)$$

che si compendia in $\frac{\pi^2(b-a)(c-x)}{(c-a)^2}$, per cui la (19) diventa

$F(x)=k\,\frac{c-x}{c-b}$, che è l' equazione della seconda retta.

16. Per fare un caso della serie doppia del n.° 9, sia $\psi_i(x)=\sin.\,\frac{i\pi x}{r}$, $\theta_i(x)=\cos.\,\frac{i\pi x}{r}$, e facciasi $a=-r$, $b=0$: la (12) sarà

$$\begin{aligned}
&+\dot{A}_1\int_{-r}^{r}d\alpha.\sin.\frac{\pi\alpha}{r}f(\alpha)+\dots\dots\\
&+\dot{A}_i\int_{-r}^{r}d\alpha.\sin.\frac{i\pi\alpha}{r}f(\alpha)+\text{ec.}\\
\int_{-r}^{r}d\alpha.\phi(\alpha)f(\alpha)=\dot{C}\int_{-r}^{r}d\alpha.f(\alpha)&\\
&+\dot{B}_1\int_{-r}^{r}d\alpha.\cos.\frac{\pi\alpha}{r}f(\alpha)+\dots\dots\\
&+\dot{B}_i\int_{-r}^{r}d\alpha.\cos.\frac{i\pi\alpha}{r}f(\alpha)+\text{ec.}
\end{aligned}$$

Qui per determinare tutti i coefficienti bisogna fare tre diverse ipotesi della funzione arbitraria $f(\alpha)$. Facciasi primieramente $f(\alpha)=\sin.\frac{i\pi\alpha}{r}$, e a motivo delle formole seguenti che tutte facilmente si provano per mezzo dell' integrazione ordinaria.

$$(20)\left\{\begin{aligned}
&\int_{-r}^{r}d\alpha.\sin.\frac{i\pi\alpha}{r}=0\,; \qquad \int_{-r}^{r}d\alpha.\sin.\frac{k\pi\alpha}{r}\sin.\frac{i\pi\alpha}{r}=0\\
&\int_{-r}^{r}d\alpha.\cos.\frac{k\pi\alpha}{r}\sin.\frac{i\pi\alpha}{r}=0;\ \int_{-r}^{r}d\alpha.\cos.\frac{i\pi\alpha}{r}\sin.\frac{i\pi\alpha}{r}=0\\
&\qquad\qquad\int_{-r}^{r}d\alpha\left(\sin.\frac{i\pi\alpha}{r}\right)^2=r
\end{aligned}\right.$$

si trova

$$\dot{\mathrm{A}}_i = \frac{1}{r}\int_{-r}^{r} d\alpha . \phi(\alpha) \sin . \frac{i\pi\alpha}{r} .$$

Facciasi in seguito $f(\alpha) = \cos . \frac{i\pi\alpha}{r}$, e a motivo delle formole

$$(21)\quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{-r}^{r} d\alpha . \cos . \frac{i\pi\alpha}{r} = 0 \; ; \quad \int_{-r}^{r} d\alpha . \cos . \frac{k\pi\alpha}{r} \cos . \frac{i\pi\alpha}{r} = 0 \\ \qquad\qquad \int_{-r}^{r} d\alpha \left(\cos . \frac{i\pi\alpha}{r} \right)^2 = r \end{array} \right.$$

e della terza e quarta delle precedenti si cava

$$\dot{\mathrm{B}}_i = \frac{1}{r}\int_{-r}^{r} d\alpha \phi(\alpha) \cos . \frac{i\pi\alpha}{r} .$$

Per ultimo facciasi $f(\alpha) = 0$ e per le due prime formole delle precedenti (20), (21), e per la $\int_{-r}^{r} d\alpha . 1 = 2r$, viene

$$\dot{\mathrm{C}} = \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} d\alpha . \phi(\alpha) ;$$

pertanto l'equazione (9) è nel nostro caso

$$\phi(x) = \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} d\alpha . \phi(\alpha) + \frac{1}{r}\Sigma_1^{\infty} \Delta i . \int_{-r}^{r} d\alpha . \phi(\alpha) \times$$

$$\left[\sin . \frac{i\pi\alpha}{r} \sin . \frac{i\pi x}{r} + \cos . \frac{i\pi\alpha}{r} \cos . \frac{i\pi x}{r} \right]$$

che può scriversi

$$(22)\qquad \phi(x) = \frac{1}{r}\int_{-r}^{r} d\alpha . \phi(\alpha) \left[\frac{1}{2} + \Sigma_1^{\infty} \Delta i . \cos . \left(\frac{i\pi}{r}(\alpha - x) \right) \right]$$

celebre formola trovata da Fourier (*); essa è vera per tutti i valori di x compresi fra $-r, +r$.

(*) Théorie de la Chaleur. pag. 272.

17. La proprietà singolare della precedente (22) si è che il valore del suo secondo membro al crescere di r converge verso una quantità finita, epperò sussiste anche per r infinita. In tal caso nel secondo membro sottentra un altro integrale continuo in luogo dell' integrale finito: poichè facendo $\frac{\pi}{r}=\mu$ la formola può scriversi

$$\varphi(x)=\frac{\mu}{2\pi}\int_{-r}^{r}d\alpha.\varphi(\alpha)+\frac{\mu}{\pi}\Sigma_{1}^{\infty}\Delta i.\int_{-r}^{r}d\alpha.\varphi(\alpha)\cos.(i\mu(\alpha-x))$$

dove il secondo termine è un integrale finito che all' impicciolire di μ si accosta come a limiti ad un integrale continuo. Infatti per un teorema degli integrali finiti definiti citato anche al n.° 11 si ha

$$\Sigma_{1}^{\infty}\Delta i.\int_{-r}^{r}d\alpha.\varphi(\alpha)\cos.(i\mu(\alpha-x))$$

$$=\Sigma_{\mu}^{\infty}\Delta p.\int_{-r}^{r}d\alpha.\varphi(\alpha)\cos.(p(\alpha-x))$$

essendo $\Delta i=1$, $\Delta p=\mu$: e

$$\mu\Sigma_{\mu}^{\infty}\Delta p.\int_{-r}^{r}d\alpha.\varphi(\alpha)\cos.(p(\alpha-x))$$

per un altro teorema citato allo stesso numero, ha per limite l' integrale continuo

$$\int_{0}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha.\varphi(\alpha)\cos.(p(\alpha-x)),$$

laonde, scomparendo nel limite anche il primo termine del secondo membro, l' equazione diventa

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha.\varphi(\alpha)\cos.(p(\alpha-x))$$

che può anche scriversi (*)

$$(23)\qquad \varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}da.\varphi(a)\int_{-\infty}^{\infty}dp.\cos.(p(x-a)).$$

Questa è l'insigne formola di Fourier che è vera per tutti i valori di x da $-\infty$ a $+\infty$, Per essa la variabile x è tolta di sotto al simbolo generale φ di una funzione qualunque e posta unicamente sotto un coseno: per essa tutte le derivazioni e integrazioni, anche nel sistema delle differenze finite, che sulla $\varphi(x)$ non si possono che accennare, si eseguiscono invece immediatamente: e si giunge anche ad esprimere le derivate e le primitive d'indice frazionario colla stessa facilità come quelle d'indice intero: il che apre la strada a trattare un infinito numero di trascendenti di nuova specie. Essa è il fondamento di gran parte dei nuovi calcoli, e può veramente riguardarsi per una grande scoperta analitica.

Noterò che anche dalla (14) del n.° 12. con un ragionamento affatto simile al precedente si cava la

$$(24)\qquad \varphi(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}da.\varphi(a)\int_{0}^{\infty}dp.\sin.pa\sin.px$$

la quale però non è vera se non pei valori positivi della x.

18. È noto che la (23) si estende facilmente ad una funzione $\varphi(x, y, z, \ldots.)$ con un numero n di variabili: giacchè si comincia a toglierne la x per sostituirvi una costante den-

---

(*) Due teoremi del calcolo degli integrali definiti, il primo dei quali vale per render ragione dell'attuale passaggio, e l'altro riesce necessario da quì a poche linee, sono i seguenti

$$\int_{-a}^{a}dx.f(x)=2\int_{0}^{a}dx.f(x)$$ se lo sviluppo di $f(x)$ per le potenze intere e crescenti di x non contiene che potenze *pari*.

$$\int_{-a}^{a}dx.f(x)=0$$ se lo sviluppo di $f(x)$ per le potenze intere e crescenti di x non contiene che potenze *dispari*.

Entrambi si dimostrano subito sostituendo a $f(x)$ gli sviluppi in serie.

tro la formola integrale portata dalla stessa (23), ove perciò nel secondo membro sta dopo il primo integrale la funzione $\phi(\alpha, y, z \ldots)$; poi allo stesso modo si elimina da quest'ultima funzione la y, formando così un integrale quadruplicato, poi anche la z formando un integrale sestuplicato ec. L'ultima formola in cui tutte le variabili x, y, z.... sono tolte di sotto alla funzione ϕ e trasportate sotto altrettanti coseni è

$$(25)\quad \phi(x,y,z\ldots)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha_1\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha_2\ldots\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha_n\,\phi(\alpha_1, \alpha_2,\ldots\alpha_n)$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}dp_1\int_{-\infty}^{\infty}dp_2\ldots\ldots\int_{-\infty}^{\infty}dp_n\mathrm{H}$$

essendo

$$\mathrm{H}=\cos.(p_1(x-\alpha_1))\cos.(p_2(y-\alpha_2))\ldots\ldots\cos.(p_n(t-\alpha_n))$$

dove la t esprime l'ultima delle n variabili x, y, z.... Avverto quì un notabile miglioramento che si può introdurre in questa formola, il quale riesce assai vantaggioso nelle applicazioni: ed è che invece di formare la H con un numero n di coseni, si può formare con un coseno solo e scrivere

$$(26)\qquad \mathrm{H}=\cos.[p_1(x-\alpha_1)+p_2(y-\alpha_2)+\ldots\ldots+p_n(t-\alpha_n)]$$

nella quale le p_1, p_2, $p_3 \ldots . p_n$ possono avere tanto il segno $+$ che il segno $-$. Dimostrerò questa trasformazione pel caso di due variabili, cioè che invece della

$$(27)\qquad \phi(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}d\beta.\phi(\alpha,\beta)$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}dq.\cos.(p(x-\alpha))\cos.(q(y-\beta))$$

può prendersi la

$$(28)\qquad \varphi(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}d\beta.\varphi(\alpha,\beta)\int_{-\infty}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}dq.$$
$$\cos.[p(x-\alpha)+q(y-\beta)].$$

Ma sarà facile capire che la dimostrazione è generale e si estende a un qualunque numero di variabili. Riflettasi all'espressione

$$o=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}d\beta.\varphi(\alpha,\beta)\int_{-\infty}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}dq.$$
$$\sin.(p(x-\alpha))\sin.(q(y-\beta))$$

che subito si riconosce osservando che sono zero entrambi gl' integrali

$$\int_{-\infty}^{\infty}dp.\sin.(p(x-\alpha)),\quad \int_{-\infty}^{\infty}dq.\sin.(q(y-\beta))$$

a motivo di un noto teorema citato in nota nel numero precedente: e sottraendo tale equazione dalla (27) si vedrà nascere la (28).

19. Il teorema generale che risulta dal sistema delle due equazioni (25), (26) si può anche dimostrare a *posteriori* alla stessa maniera con cui per una sola variabile è stato dimostrato dal Sig. *Deflers*, secondo riferisce il Sig. Poisson (*). Consiste l'artificio di questa dimostrazione nell'esprimere con lettere qualunque a, b, c.... i limiti nella seconda serie d'integrali della (25), e poi ad operazioni finite porre queste lettere eguali all' infinito. Osservando il teorema seguente, che si prova prontamente per mezzo dell'integrazione ordinaria

$$\int_{-a}^{a}dp.\cos.(\mathrm{A}p+\mathrm{B})=\frac{2}{\mathrm{A}}\sin.\mathrm{A}a\cos.\mathrm{B}$$

si riconosce come sia

(*) Journal Polyt. Cha. 19. pag. 454.

$$\int_{-a}^{a} dp_1 \cos.[p_1(x-\alpha_1)+p_2(y-\alpha_2)+\text{ec.}]$$

$$=\frac{2\sin.(a(x-\alpha_1))\cos.[p_2(y-\alpha_2)+ec]}{x-\alpha_1}$$

e per la continua applicazione dello stesso principio

$$\int_{-a}^{a} dp_1 \int_{-b}^{b} dp_2 .. \int_{-s}^{s} dp_n \cos.[p_1(x-\alpha_1)+p_2(y-\alpha_2)+..+p_n(t-\alpha_n)]$$

$$=\frac{2^n \sin(a(x-\alpha_1))\sin.(b(y-\alpha_2)).....\sin.(s(t-\alpha_n))}{(x-\alpha_1)(y-\alpha_2)(......)(t-\alpha_n)}$$

laonde chiamando X il secondo membro della (25) ove siansi messe le lettere *a*, *b*, *c*.... invece dei secondi limiti infiniti, potrà scriversi

$$\mathrm{X}=\frac{1}{\pi^n}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_1 \frac{\sin.(a(x-\alpha_1))}{x-\alpha_1} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_2 \frac{\sin.(b(y-\alpha))}{y-\alpha_2} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

$$\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_n \frac{\sin.(s(t-\alpha_n))}{t-\alpha_n}\ \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3.....\alpha_n);$$

ma nel luogo ora citato si dimostra come il valore della formola

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{\sin.(a(x-\alpha))}{x-\alpha}\ \mathrm{F}(\alpha)$$

quando si fa $a=\infty$ diventa $\pi\mathrm{F}(x)$: epperò per la continua applicazione dello stesso principio, facendo successivamente infinite tutte le *a*, *b*, *c*.... si toglieranno nella precedente espressione l'uno dopo l'altro tutti gl'integrali, passando ogni volta una delle variabili sotto il simbolo φ, e verrà per ultimo $\mathrm{X}=\varphi(x, y, z, ...t)$ come doveasi dimostrare.

20. Conchiuderò questo secondo paragrafo della memoria con una riflessione importante relativamente ai limiti. Qualche volta la forma della funzione ψ nelle equazioni (2) del n. 3. è tale che di quelle equazioni la prima, o l'ultima o en-

trambe rimangono escluse dal sistema. Così sono escluse entrambe nell'esempio del n. 13. in cui $\psi_i(x)=\sin.\frac{i\pi x}{r}$, $a=0$, $b=r$; perchè è evidente che la prima e l'ultima di quelle equazioni sono false a meno che la forma φ della funzione $\varphi(x)$ sia tale che soddisfaccia alle due condizioni $\varphi(0)=0$, $\varphi(r)=0$. Nondimeno l'equazione (10) del n. 11. contenente la funzione arbitraria $f(\alpha)$ rimane ancora la stessa, perchè generalmente parlando, rimangono gli stessi i limiti degli integrali definiti benchè accresciuti o diminuiti di quantità destinate a divenire minori d'ogni assegnabile. Siccome però si è trovato che integrali definiti, i cui limiti diversificano di quantità minori d'ogni assegnabile, possono differire di valori finiti, si ha di quì il mezzo di spiegare alcune difficoltà che si incontrano nell'apparente differenza di certi risultamenti ottenuti con diversi metodi. Questa parte di analisi è delicata e laboriosa, ond'io cercherò di evitarne il bisogno, non sentendomi per ora forze bastanti per tentarne una chiara esposizione. Farò soltanto osservare dietro quello che ora si è detto, come espressioni simili al secondo membro dell'equazione 14. del n.° 13. danno valori che non tengono la legge di continuità. Infatti quando x è maggiore di zero di una quantità piccola quanto si vuole, il valore di quella espressione è prossimissimo a $\varphi(0)$, ed essendo $x=0$ quel valore è zero; similmente quando x è minore di r di una differenza impercettibile, il valore di quella espressione è prossimissimo a $\varphi(r)$, ed essendo $x=r$ torna a divenir zero. Possono dunque aver luogo dei salti bruschi nei valori di quelle espressioni, epperò se esse rappresenteranno ordinate di curve, l'andamento di queste potrà riuscire spezzato.

§. 3.

Nuovi tentativi di calcolo.

21. Il metodo tenuto negli esempj precedenti per determinare i coefficienti A_i facendo uso della funzione arbitraria

$f(\alpha)$, è quello che il Sig. Fourier discute al n.° 424 della sua opera (1), e consiste nel prendere per $f(\alpha)$ una forma tale che le integrazioni definite facciano sparire tutti i coefficienti A_1, A_2, A_3, ec. a riserva di uno, il quale riesce per tal modo subito noto. Lo stesso Geometra fa vedere ch' esso può estendersi ad altri casi oltre i già trattati, ed uno ne reca altrove più complicato (2). Quantunque però un tal metodo sia un ritrovamento pieno di sagacità e riesca benissimo in alcuni casi, è evidentemente ristretto a un piccolo numero di essi. Havvene un altro generalissimo il quale si presenta spontaneamente, e consiste nel cavare dalla (10) un infinito numero di equazioni dando infiniti valori diversi alla funzione arbitraria, e quindi con queste infinite equazioni tentare la determinazione delle infinite incognite. Veramente l' enunciato di questo problema analitico è tale da spaventare sulle prime e da sembrare affatto superiore alle forze dell' analisi: ma pure nella realtà non è come nell'apparenza; ed è ancora al Sig. Fourier a cui si deve l'idea felice che ce ne somministra in varii casi la soluzione. Leggasi la fine del n.° 207. della sua opera (3), e sebbene si rileverà che il sistema delle sue equazioni è limitato a un caso particolare che si tratta anche coll' altro metodo, mentre quello or ora descritto è tendente a uno scopo generale, vi si vedrà nondimeno chiarissimamente espresso il grandioso principio, che non cessa di essere interamente dovuto a quell' illustre analista, perchè altri possa coglierne un maggior frutto. Ecco in che consiste: invece di prendere a dirittura le infinite equazioni fra infinite incognite, si prenda solamente un numero m di equazioni fra un numero m d' incognite, e siano le prime m equazioni di quelle infinite, ritenendo nei secondi membri i soli primi m termini delle serie. La questione è certamente cambiata e le nuove incognite sono ben diverse dalle prime: esse sono funzioni di m che spesso potranno determinarsi colla teoria della soluzione delle equazioni lineari. Quando però ciò riesca, è evidente che più che si cresce il numero m delle incognite prese e delle equazioni trattate, la nuova questione si avvicina alla primitiva, e con essa finalmente si confonde quando si fa m infinita; pertanto fatta $m=\infty$ nelle funzioni trovate, esse diventano le quantità ricercate. Dunque il problema si riduce ad un altro più trattabile: cioè alla risoluzione di un numero m di equazioni lineari fra un numero m d'incognite. Questo è di gia stato sciolto in qualche caso (1), ed io quì ne darò la soluzione in un altro, il quale oltre il fornire una verità analitica per se stessa interessante, è anche tale che si applica alle presenti questioni. L'andamento del calcolo è piuttosto lungo, ma non per questo ho voluto tralasciare di dargli una sufficiente estensione, perchè possa pienamente conoscersi il metodo di soluzione, ch'io spero debba riuscire egualmente bene in altri casi simili.

---

(1) Theorie de la Chaleur. pag. 566.

(2) Theorie de la Chaleur. pag. 348.

(3) Theorie de la Chaleur. pag. 212.

22. Il sistema delle m equazioni fra m incognite è il seguente

$$
\begin{array}{l}
\frac{1}{g+1}X_1+\frac{1}{2^2g+1}X_2+\frac{1}{3^2g+1}X_3+\ldots+\frac{1}{i^2g+1}X_i+\ldots+\frac{1}{m^2g+1}X_m=H_1\\[2ex]
\frac{1}{g+2^2}X_1+\frac{1}{2^2g+2^2}X_2+\frac{1}{3^2g+2^2}X_3+\ldots+\frac{1}{i^2g+2^2}X_i+\ldots+\frac{1}{m^2g+2^2}X_m=H_2\\[2ex]
\frac{1}{g+3^2}X_1+\frac{1}{2^2g+3^2}X_2+\frac{1}{3^2g+3^2}X_3+\ldots+\frac{1}{i^2g+3^2}X_i+\ldots+\frac{1}{m^2g+3^2}X_m=H_3\\
\quad\vdots\\
\frac{1}{g+h^2}X_1+\frac{1}{2^2g+h^2}X_2+\frac{1}{3^2g+h^2}X_3+\ldots+\frac{1}{i^2g+h^2}X_i+\ldots+\frac{1}{m^2g+h^2}X_m=H_h\\
\quad\vdots\\
\frac{1}{g+m^2}X_1+\frac{1}{2^2g+m^2}X_2+\frac{1}{3^2g+m^2}X_3+\ldots+\frac{1}{i^2g+m^2}X_i+\ldots+\frac{1}{m^2g+m^2}X_m=H_m
\end{array}
$$

---

(1) Vedi Cauchy. Cours d'Analyse. P. 1. Chap. III.

dove le incognite sono X_1, X_2, X_3, ... X_m, e g è una quantità qualunque data, positiva o negativa, reale o immaginaria. Si vuole una formola generale che esprima una qualunque X_i delle m incognite per quantità tutte note e per l'indice i, talchè fatto $i = 1, 2, 3, \ldots m$ la stessa formola dia i valori di tutte le incognite.

23. Si moltiplichi ciascuna delle precedenti equazioni pel denominatore dell' ultimo termine del primo membro, e poi si sottragga all' antecedente: sparirà così l' ultima incognita X_m e avrassi una nuova riunione di $m-1$ equazioni fra $m-1$ incognite. Senza esporre il sistema di tutte queste $m-1$ equazioni basterà scrivere l' (h)*esima* equazione di esso, che si forma coll'(h)*esima* e $(h+1)$*esima* equazione del sistema precedente: anzi basterà trovare il coefficiente dell' incognita X_i in questa (h)*esima* equazione. Detto coefficiente è

$$\frac{m^2g+h^2}{i^2g+h^2} - \frac{m^2g+(h+1)^2}{i^2g+(h+1)^2} = \frac{g(m^2-i^2)((h+1)^2-h^2)}{(i^2g+h^2)(i^2g+(h+1)^2)}$$

e se ne caveranno tutti i coefficienti della menzionata (h)*esima* equazione, facendovi successivamente $i=1, 2, 3 \ldots (m-1)$. Vedesi così che tutti i termini del primo membro di detta equazione hanno il fattor comune $g((h+1)^2-h^2)$, epperò l' equazione si può dividere per esso, e fatta

$$H_{1,h} = \frac{(m\,g+h^2)\,H_h - (m^2g+(h+1)^2)\,H_{h+1}}{g((h+1)^2-h^2)}$$

verrà

$$(29) \quad \frac{m^2-1}{(g+h^2)(g+(h+1)^2)}\,X_1 + \ldots + \frac{m^2-i^2}{(i^2g+h^2)(i^2g+(h+1)^2)}\,X_i + \ldots$$

$$+ \frac{m^2-(m-1)^2}{((m-1)^2g+h^2)((m-1)^2g+(h+1)^2)}\,X_{m-1} = H_{1,h};$$

questa, ove facciasi successivamente $h=1, 2, 3 \ldots m-1$, darà tutte le $m-1$ equazioni, che come si disse, compongono il secondo sistema. Da questo secondo potrà dedursene un terzo fra $m-2$ incognite, in cui manchi anche l'incognita X_{m-1}. A tal fine si formi l'$(h+1)$*esima* equazione del secondo sistema, che riesce subito ponendo nell'antecedente $h+1$ in luogo di h: poi fra queste due si elimini X_{m-1}, moltiplicando una per $(m-1)^2g+h^2$, e l'altra per $(m-1)^2g+(h+2)^2$, e sottraendo al solito. Nella equazione risultante il coefficiente di X_i sarà

$$\left[\frac{(m-1)^2g+h^2}{i^2g+h^2}-\frac{(m-1)^2g+(h+2)^2}{i^2g+(h+2)^2}\right]\frac{m^2-i^2}{i^2g+(h+1)^2}$$

$$=\frac{g((m-1)^2-i^2)(m^2-i^2)((h+2)^2-h^2)}{(i^2g+h^2)(i^2g+(h+1)^2)(i^2g+(h+2)^2)}$$

dove il fattore $g((h+2)^2-h^2)$ è indipendente da i epperò costante in tutti i termini: si divida per esso, e fatta

$$H_{2,h}=\frac{((m-1)^2g+h^2)H_{1,h}-((m-1)^2g+(h+2)^2)H_{1,h+1}}{g((h+2)^2-h^2)}$$

si avrà l'equazione

$$(30)\qquad \ldots\ldots\ldots\frac{((m-1)^2-i^2)(m^2-i^2)}{(i^2g+h^2)(i^2g+(h+1)^2)(i^2g+(h+2)^2)}X_i\ldots\ldots$$

$$+\frac{((m-1)^2-(m-2)^2)(m^2-(m-2)^2)}{((m-2)^2g+h^2)((m-2)^2g+(h+1)^2)((m-2)^2g+(h+2)^2)}X_{m-2}=H_{2,h}$$

che sarà l'(h)*esima* del terzo sistema e fornirà tutte le equazioni di questo sistema facendo successivamente $h=1, 2, 3\ldots\ldots m-2$.

Fra l'antecedente equazione e quella che si cava dalla medesima mettendo $h+1$ invece di h si elimini similmente X_{m-2}, e risulterà un'equazione con sole $m-3$ incognite in cui il coefficiente di X_i sarà

$$\frac{((m-2)^2-i^2)((m-1)^2-i^2)(m^2-i^2)}{(i^2g+h^2)(i^2g+(h+1)^2)(i^2g+(h+2)^2)(i^2g+(h+3)^2)}$$

ed il secondo membro

$$(31)\qquad \mathrm{H}_{3,h}=\frac{((m-2)^2g+h^2)\mathrm{H}_{2,h}-((m-2)^2g+(h+3)^2)\mathrm{H}_{2,h+1}}{g((h+3)^2-h^2)}$$

e fatta in essa $h=1, 2, 3 \ldots m-3$ si avrà il quarto sistema di equazioni fra sole $m-3$ incognite. Seguitando collo stesso metodo si capisce facilmente che quando le incognite saranno ridotte a $m-\mu$ il coefficiente di X_i nella (h)*esima* equazione del $(\mu+1)$*esimo* sistema sarà

$$(32)\qquad \frac{((m-\mu+1)^2-i^2)((m-\mu+2)^2-i^2)\ldots\ldots(m^2-i^2)}{(i^2g+h^2)(i^2g+(h+1)^2)\ldots\ldots(i^2g+(h+\mu)^2)}$$

ed il secondo membro

$$(33)\quad \mathrm{H}_{\mu,h}=\frac{((m-\mu+1)^2g+h^2)\mathrm{H}_{\mu-1,h}-((m-\mu+1)^2g+(h+\mu)^2)\mathrm{H}_{\mu-1,h+1}}{g((h+\mu)^2-h^2)}$$

24. Bisogna ora studiare la forma di questa $\mathrm{H}_{\mu,h}$ in funzione delle prime H_h, H_{h+1}, ec. desumendola con successive sostituzioni dalle precedenti (29), (30), (31), ec. Queste sostituzioni danno

$$\mathrm{H}_{1,h}=\frac{m^2+\frac{h^2}{g}}{(h+1)^2-h^2}\mathrm{H}_h+\frac{m^2+\frac{(g+1)^2}{g}}{h^2-(h+1)^2}\mathrm{H}_{h+1};$$

$$\mathrm{H}_{2,h}=\frac{\left((m-1)^2+\frac{h^2}{g}\right)\left(m^2+\frac{h^2}{g}\right)}{((h+1)^2-h^2)^2((h+2)^2-h^2)}\mathrm{H}_h+\frac{\left((m-1)^2+\frac{(h+1)^2}{g}\right)\left(m^2+\frac{(h+1)^2}{g}\right)}{(h^2-(h+1)^2)((h+2)^2-(h+1)^2)}\mathrm{H}_{h+1}$$

$$+\frac{\left((m-1)^2+\frac{(h+2)^2}{g}\right)\left(m^2+\frac{(h+2)^2}{g}\right)}{(h^2-(h+2)^2)((h+1)^2-(h+2)^2)}\mathrm{H}_{h+2}$$

$$H_{3,h}=\frac{\left((m-2)^2+\frac{h^2}{g}\right)\left((m-1)^2+\frac{h^2}{g}\right)\left(m^2+\frac{h^2}{g}\right)}{((h+1)^2-h^2)((h+2)^2-h^2)((h+3)^2-h^2)}H_h$$

$$+\frac{\left((m-2)^2+\frac{(h+1)^2}{g}\right)\left((m-1)^2+\frac{(h+1)^2}{g}\right)\left(m^2+\frac{(h+1)^2}{g}\right)}{(h^2-(h+1)^2)((h+2)^2-(h+1)^2)((h+3)^2-(h+1)^2)}H_{h+1}$$

$$+\frac{\left((m-2)^2+\frac{(h+2)^2}{g}\right)\left((m-1)^2+\frac{(h+2)^2}{g}\right)\left(m^2+\frac{(h+2)^2}{g}\right)}{(h^2-(h+2)^2)((h+1)^2-(h+2)^2)((h+3)^2-(h+2)^2)}H_{h+2}$$

$$+\frac{\left((m-2)^2+\frac{(h+3)^2}{g}\right)\left((m-1)^2+\frac{(h+3)^2}{g}\right)\left(m^2+\frac{(h+3)^2}{g}\right)}{(h^2-(h+3)^2)((h+1)^2-(h+3)^2)((h+2)^2-(h+3)^2)}H_{h+3}$$

e così di seguito. Quì la legge dei numeratori è manifesta: quella dei denominatori si capisce facilmente osservando che sono composti di tanti fattori binomj, in cui la seconda parte negativa è costante in ogni coefficiente: nel coefficiente di H_h è h^2, nel coefficiente di H_{h+1} è $(h+1)^2$, nel coefficiente di H_{h+2} è $(h+2)^2$, ec. La prima parte poi è formata prendendo l'uno dopo l'altro i termini della serie h^2, $(h+1)^2$, $(h+2)^2$, $(h+3)^2$, ec. ma avendo avvertenza di saltar sempre via quel termine che a motivo della seconda parte costante in quel coefficiente darebbe un fattore zero. Ciò ben assicurato: se pongasi per brevità $m-\mu=k$, e si facciano le denominazioni

$$(34)\quad\left\{\begin{aligned}
\mathrm{M}_h &= \frac{\left((k+1)^2+\frac{h^2}{g}\right)\left((k+2)^2+\frac{h^2}{g}\right)\ldots\ldots\left(m^2+\frac{h^2}{g}\right)}{((h+1)^2-h^2)((h+2)^2-h^2)\ldots\ldots((h+m-k)^2-h^2)}\\
\mathrm{N}_h &= \frac{\left((k+1)^2+\frac{(h+1)^2}{g}\right)\left((k+2)^2+\frac{(h+1)^2}{g}\right)\ldots\ldots\left(m^2+\frac{(h+1)^2}{g}\right)}{(h^2-(h+1)^2)((h+2)^2-(h+1)^2)\ldots\ldots((h+m-k)^2-(h+1)^2)}\\
\mathrm{O}_h &= \frac{\left((k+1)^2+\frac{(h+2)^2}{g}\right)\left((k+2)^2+\frac{(h+2)^2}{g}\right)\ldots\ldots\left(m^2+\frac{(h+2)^2}{g}\right)}{(h^2-(h+2)^2)((h+1)^2-(h+2)^2)\ldots\ldots((h+m-k)^2-(h+2)^2)}\\
&\vdots\\
\mathrm{V}_h &= \frac{\left((k+1)^2+\frac{(h+m-k)^2}{g}\right)\ldots\ldots\left(m^2+\frac{(h+m-k)^2}{g}\right)}{(h^2-(h+m-k)^2)\ldots\ldots((h+m-k-1)^2-(h+m-k)^2)}
\end{aligned}\right.$$

si ha

$$(35)\qquad \mathrm{H}_{\mu,h}=\mathrm{M}_h\mathrm{H}_h+\mathrm{N}_h\mathrm{H}_{h+1}+\mathrm{O}_h\mathrm{H}_{h+2}+\ldots\ldots+\mathrm{V}_h\mathrm{H}_{h+m-k}$$

25. Conosciuta così la $\mathrm{H}_{\mu,h}$, se pongasi anche

$$(36)\qquad \mathrm{L}_{i,h}=\frac{((k+1)^2-i^2)((k+2)^2-i^2)\ldots(m^2-i^2)}{(i^2g+h^2)(i^2g+(h+1)^2)\ldots\ldots(i^2g+(h+m-k)^2)}$$

ove il secondo membro non è che l'espressione (32): il sistema delle $m-\mu$ ovvero k equazioni fra un egual numero d'incognite potrà scriversi

$$\begin{aligned}
&\mathrm{L}_{1,1}\mathrm{X}_1+\mathrm{L}_{2,1}\mathrm{X}_2+\mathrm{L}_{3,1}\mathrm{X}_3+\ldots.+\mathrm{L}_{i,1}\mathrm{X}_i+\ldots+\mathrm{L}_{k,1}\mathrm{X}_k=\mathrm{H}_{\mu,1}\\
&\mathrm{L}_{1,2}\mathrm{X}_1+\mathrm{L}_{2,2}\mathrm{X}_2+\mathrm{L}_{3,2}\mathrm{X}_3+\ldots.+\mathrm{L}_{i,2}\mathrm{X}_i+\ldots+\mathrm{L}_{k,2}\mathrm{X}_k=\mathrm{H}_{\mu,2}\\
&\mathrm{L}_{1,3}\mathrm{X}_1+\mathrm{L}_{2,3}\mathrm{X}_2+\mathrm{L}_{3,3}\mathrm{X}_3+\ldots.+\mathrm{L}_{i,3}\mathrm{X}_i+\ldots+\mathrm{L}_{k,3}\mathrm{X}_k=\mathrm{H}_{\mu,3}\\
&\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
L_{1,h}X_1+L_{2,h}X_2+L_{3,h}X_3+\ldots+L_{i,h}X_i+\ldots\ldots+L_{k,h}X_k=H_{\mu,h}\\
L_{1,h+1}X_1+L_{2,h+1}X_2+L_{3,h+1}X_3+\ldots+L_{i,h+1}X_i+\ldots+L_{k,h+1}X_k=H_{\mu,h+1}\\
\vdots\\
L_{1,k}X_1+L_{2,k}X_2+L_{3,k}X_3+\ldots\ldots+L_{i,k}X_i+\ldots\ldots+L_{k,k}X_k=H_{\mu,k}.
\end{array}$$

Adesso con un andamento di operazione affatto simile bisogna eliminare da questo le prime incognite fino ad un certo numero.

26. Si osservi che per la (36) le funzioni L hanno la seguente proprietà

$$L_{i,h+1}=\frac{i^2g+h^2}{i^2g+(h+m-k+1)^2}\,L_{i,h}. \tag{37}$$

Moltiplicando quindi per $g+h^2$ l'(h)*esima* equazione del sistema precedente e per $g+(h+m-k+1)^2$ l' equazione $(h+1)$*esima*, e poi sottraendo al solito, il coefficiente di X_i nell'equazione che risulta sarà

$$(g+h^2)L_{i,h}-(g+(h+m-k+1)^2)L_{i,h+1}$$

ossia per la proprietà della (37)

$$L_{i,h}\left[g+h^2-\frac{(i^2g+h^2)(g+(h+m-k+1)^2)}{i^2g+(h+m-k+1)^2}\right]$$

che si riduce

$$g((h+m-k+1)^2-h^2)\,\frac{(1-i^2)L_{i,h}}{i^2g+(h+m-k+1)^2}$$

dove il fattore $g((h+m-k+1)^2-h^2)$ è indipendente da i epperò comune a tutti i termini del primo membro di quell'equazione. Dividasi adunque per questo fattore, e ponendo per brevità $h+m-k=p$, l' equazione sarà

$$\frac{(1-2^2)L_{2,h}}{2^2g+(p+1)^2}\,X_2+\ldots+\frac{(1-i^2)L_{i,h}}{i^2g+(p+1)^2}\,X_i+\ldots+\frac{(1-k^2)L_{k,h}}{k^2g+(p+1)^2}\,X_k=K_{1,h}$$

essendo

$$(38)\qquad K_{1,h}=\frac{\left(1+\frac{h^2}{g}\right)H_{\mu,h}-\left(1+\frac{(p+1)^2}{g}\right)H_{\mu,h+1}}{(p+1)^2-h^2}$$

talchè quando facciasi $h=1,\ 2,\ 3\ldots\ldots k-1$ si avranno $k-1$ equazioni in cui manca anche l' incognita X_1.

Fra la precedente equazione (h)*esima* e quella che si cava da essa ponendo $h+1$ in luogo di h si elimini similmente X_2: il che riesce moltiplicando la prima per 2^2g+h^2, e la seconda per $2^2g+(p+1)^2$, indi sottraendo e mettendo per $L_{2,h+1}$ il suo valore dedotto dalla (37) ove facciasi $i=2$. Il coefficiente di X_i nella nuova equazione dopo aver diviso pel fattore costante è

$$\frac{(1-i^2)(2^2-i^2)L_{i,h}}{(i^2g+(p+1)^2)(i^2g+(p+2)^2)}$$

e il secondo membro

$$(39)\qquad K_{2,h}=\frac{\left(2^2+\frac{h^2}{g}\right)K_{1,h}-\left(2^2+\frac{(p+1)^2}{g}\right)K_{1,h+1}}{(p+2)^2-h^2};$$

così proseguendo si vede che nel sistema in cui mancano tutte le prime incognite fino a X_l il coefficiente di X_i è

$$\frac{(1-i^2)(2^2-i\ )\ldots.(l^2-i^2)L_{i,h}}{(i^2g+(p+1)^2)(i^2g+(p+2)^2)\ldots(i^2g+(p+l)^2)}$$

e il secondo membro

$$(40)\qquad K_{l,h}=\frac{\left(l^2+\frac{h^2}{g}\right)K_{l-1,h}-\left(l^2+\frac{(p+1)^2}{g}\right)K_{l-1,h+1}}{(p+l)^2-h^2}$$

e se mettasi per $L_{i,h}$ il suo valore dato dalla (36), il coefficiente di X_i sarà espresso da

$$(41)\qquad \frac{(1-i^2)(2^2-i^2)\ldots(l^2-i^2)((k+1)^2-i^2)((k+2)^2-i^2)\ldots(m^2-i^2)}{(i^2g+h^2)(i^2g+(h+1)^2)\ldots.(i^2g+(p+l)^2)}$$

27. Rimane a dedurre il valore di $K_{l,h}$ nella (40) dalle precedenti (38), (39), ec. e dal valore di $H_{\mu,h}$ dato dal sistema delle (34), (35). Per avviarci a questa ricerca osserviamo le seguenti proprietà delle funzioni M, N, O, . . . V, che prontamente si dimostrano per mezzo delle (34)

$$(42)\qquad \left\{\begin{array}{l} M_{h+1}=\dfrac{h^2-(h+1)^2}{(p+1)^2-(h+1)^2}\,N_h \\[2ex] N_{h+1}=\dfrac{h^2-(h+2)^2}{(p+1)^2-(h+2)^2}\,O_h \\[2ex] O_{h+1}=\dfrac{h^2-(h+3)^2}{(p+1)^2-(h+3)^2}\,P_h\,. \\[1ex] \text{ec.}\qquad\qquad\qquad \text{ec.} \end{array}\right.$$

Per queste e per la (35) si vede che la (38) può scriversi

$$\begin{aligned} K_{1,h}=&\frac{1+\frac{h^2}{g}}{(p+1)^2-h^2}M_h\,H_h \\ &+\left\{\frac{1+\frac{h^2}{g}}{(p+1)^2-h^2}-\frac{1+\frac{(p+1)^2}{g}}{(p+1)^2-h^2}\cdot\frac{h^2-(h+1)^2}{(p+1)^2-(h+1)^2}\right\}N_h\,H_{h+1} \\ &+\left\{\frac{1+\frac{h^2}{g}}{(p+1)^2-h^2}-\frac{1+\frac{(p+1)^2}{g}}{(p+1)^2-h^2}\cdot\frac{h^2-(h+2)^2}{(p+1)^2-(h+2)^2}\right\}O_h\,H_{h+2} \\ &+\left\{\frac{1+\frac{h^2}{g}}{(p+1)^2-h^2}-\frac{1+\frac{(p+1)^2}{g}}{(p+1)^2-h^2}\cdot\frac{h^2-(h+3)^2}{(p+1)^2-(h+3)^2}\right\}P_h\,H_{h+3} \\ &+\text{ ec.} \end{aligned}$$

che si riduce

$$K_{1,h} = \frac{1 + \frac{h^2}{g}}{(p+1)^2 - h^2} \cdot M_h H_h + \frac{1 + \frac{(h+1)^2}{g}}{(p+1)^2 - (h+1)^2} N_h H_{h+1}$$

$$+ \frac{1 + \frac{(h+2)^2}{g}}{(p+1)^2 - (h+2)^2} O_h H_{h+2} + \text{ec.}$$

Sostituiscasi nella (39) questo valore di $K_{1,h}$, dal quale si forma subito quelle di $K_{1,h+1}$, ed eliminando di nuovo le M_{h+1}, N_{h+1}, ec. mediante le (42), verrà

$$K_{2,h} = \frac{1 + \frac{h^2}{g}}{(p+1)^2 - h^2} \cdot \frac{2^2 + \frac{h^2}{g}}{(p+1)^2 - h^2} M_h H_h$$

$$+ \frac{1 + \frac{(h+1)^2}{g}}{(p+1)^2 - (h+1)^2} \cdot \frac{2^2 + \frac{(h+1)^2}{g}}{(p+2)^2 - (h+1)^2} N_h H_{h+1} + \text{ec.}$$

Così proseguendo a trovare $K_{3,h}$, $K_{4,h}$, ec. avrassi per analogia

$$(43) \qquad K_{l,h} = \frac{1 + \frac{h^2}{g}}{(p+1)^2 - h^2} \cdot \frac{2^2 + \frac{h^2}{g}}{(p+2)^2 - h^2} \cdots\cdots \frac{l^2 + \frac{h^2}{g}}{(p+l)^2 - h^2} M_h H_h$$

$$+ \frac{1 + \frac{(h+1)^2}{g}}{(p+1)^2 - (h+1)^2} \cdot \frac{2^2 + \frac{(h+1)^2}{g}}{(p+2)^2 - (h+1)^2} \cdots\cdots \frac{l^2 + \frac{(h+1)^2}{g}}{(p+l)^2 - (h+1)^2} N_h H_{h+1}$$

$$+ \frac{1 + \frac{(h+2)^2}{g}}{(p+1)^2 - (h+2)^2} \cdot \frac{2^2 + \frac{(h+2)^2}{g}}{(p+2)^2 - (h+2)^2} \cdots\cdots \frac{l^2 + \frac{(h+2)^2}{g}}{(p+l)^2 - (h+2)^2} O_h H_{h+2}$$

$$+ \text{ec.}$$

dove la legge è manifesta.

28. Mediante questa equazione (43), e l'espressione (41) abbiamo noto il coefficiente di X_i e il secondo membro nell' (h)*esima* equazione di quel sistema contenente un numero $m-\mu-l$ di equazioni, nel quale delle incognite X_1, X_2, $X_3 \dots X_m$ mancano tutte le prime sino alla X_l inclusiva, e tutte le ultime dalla $X_{m-\mu}$ esclusiva in poi. Essendo arbitrarii i numeri interi l, μ, che mentre si accrescono, diminuiscono sempreppiù il numero delle incognite superstiti, possiamo farli tali che di queste non ne rimanga più che una sola, cioè la X_i: il che riesce ponendo $l=i-1$, $\mu=m-i$. Allora, per le denominazioni accettate a titolo di brevità, abbiamo $k=i$, $p=h+m-i$, che è poi $p=1+m-i$, perchè l'ultimo sistema non contenendo che una sola equazione, la h non può avere che il valore 1. Quest' unica equazione è della forma

$$\Omega X_i = \Psi \tag{44}$$

dove le Ω, Ψ saranno date dalle espressioni (41), (43) nelle quali h, l, k, p prendano gli indicati valori. Sarà così

$$\Omega = \frac{(1-i^2)(2^2-i^2)\dots((i-1)^2-i^2)((i+1)^2-i^2)\dots(m^2-i^2)}{(i^2g+1)(i^2g+2^2)(i^2g+3^2)\dots(i^2g+m^2)} \,. \tag{45}$$

$$\Psi = \frac{1+\frac{1}{g}}{(2+m-i)^2-1} \cdot \frac{2^2+\frac{1}{g}}{(2+m-i)^2-1} \cdots\cdots \frac{(i-1)^2+\frac{1}{g}}{m^2-1}\, M_1\, H_1$$

$$+\frac{1+\frac{2^2}{g}}{(2+m-i)^2-2^2} \cdot \frac{2^2+\frac{2^2}{g}}{(2+m-i)^2-2^2} \cdots\cdots \frac{(i-1)^2+\frac{2^2}{g}}{m^2-2^2}\, N_1\, H_2$$

$$+\frac{1+\frac{3^2}{g}}{(2+m-i)^2-3^2} \cdot \frac{2^2+\frac{3^2}{g}}{(2+m-i)^2-3^2} \cdots\cdots \frac{(i-1)^2+\frac{3^2}{g}}{m^2-3^2}\, O_1\, H_3$$

$$+ \text{ ec.}$$

dove debbono sostituirsi i valori di M_1, N_1, O_1, ... cavati dalle (34) in cui si pongano parimenti $k=i$, $h=1$, cioè

$$M_1 = \frac{\left((i+1)^2+\frac{1}{g}\right)\left((i+2)^2+\frac{1}{g}\right)\ldots\ldots\left(m^2+\frac{1}{g}\right)}{(2^2-1)(3^2-1)\ldots\ldots((1+m-i)^2-1)}$$

$$N_1 = \frac{\left((i+1)^2+\frac{2^2}{g}\right)\left((i+2)^2+\frac{2^2}{g}\right)\ldots\ldots\left(m^2+\frac{2^2}{g}\right)}{(1-2^2)(3^2-2^2)\ldots\ldots((1+m-i)^2-2^2)}$$

$$O_1 = \frac{\left((i+1)^2+\frac{3^2}{g}\right)\left((i+2)^2+\frac{3^2}{g}\right)\ldots\ldots\left(m^2+\frac{3^2}{g}\right)}{(1-3^2)(2^2-3^2)\ldots\ldots((1+m-i)^2-3^2)}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$V_1 = \frac{\left((i+1)^2+\frac{(1+m-i)^2}{g}\right)\ldots\ldots\ldots\left(m^2+\frac{(1+m-i)^2}{g}\right)}{(1-(1+m-i)^2)\ldots\ldots((m-i)^2-(1+m-i)^2)}$$

Facciasi questa sostituzione e il valore finale di Ψ potrà scriversi

$$(46)\qquad \Psi = \frac{1}{i^2+\frac{1}{g}}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{g}\right)\left(2^2+\frac{1}{g}\right)\left(3^2+\frac{1}{g}\right)\ldots\ldots\left(m^2+\frac{1}{g}\right)}{(2^2-1)(3^2-1)(4^2-1)\ldots\ldots(m^2-1)}H_1$$

$$+\frac{1}{i^2+\frac{2^2}{g}}\cdot\frac{\left(1+\frac{2^2}{g}\right)\left(2^2+\frac{2^2}{g}\right)\left(3^2+\frac{2^2}{g}\right)\ldots\ldots\left(m^2+\frac{2^2}{g}\right)}{(1-2^2)(3^2-2^2)(4^2-2^2)\ldots\ldots(m^2-2^2)}H_2$$

$$+\frac{1}{i^2+\frac{3^2}{g}}\cdot\frac{\left(1+\frac{3^2}{g}\right)\left(2^2+\frac{3^2}{g}\right)\left(3^2+\frac{3^2}{g}\right)\ldots\ldots\left(m^2+\frac{3^2}{g}\right)}{(1-3^2)(2^2-3^2)(4^2-3^2)\ldots\ldots(m^2-3^2)}H_3$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$+\frac{1}{i^2+\frac{h^2}{g}}\cdot\frac{\left(1+\frac{h^2}{g}\right)\left(2^2+\frac{h^2}{g}\right)\left(3^2+\frac{h^2}{g}\right)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\left(m^2+\frac{h^2}{g}\right)}{(1-h^2)\ldots\ldots((h-1)^2-h^2)((h+1)^2-h^2)\ldots\ldots(m^2-h^2)}\,H_h$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$+\frac{1}{i^2+\frac{m^2}{g}}\cdot\frac{\left(1+\frac{m^2}{g}\right)\left(2^2+\frac{m^2}{g}\right)\left(3^2+\frac{m^2}{g}\right)\,.\,.\,.\,.\,.\left(m^2+\frac{m^2}{g}\right)}{(1-m^2)(2^2-m^2)(3^2-m^2)\ldots\ldots(m^2-(m-1)^2)}\,H_m$$

espressione assai elegante e di legge ben manifesta: ritenendo che in tutti i denominatori manca quel fattore che renderebbe la quantità zero: così nel termine (h)*esimo* manca il fattore h^2-h^2.

29. Che in conseguenza della (44) la frazione

$$\frac{\Psi}{\Omega}$$

in cui Ω, Ψ hanno i valori (45), (46), sia l'espressione generale dell'incognita X_i, talchè fatto $i=1, 2, 3 \ldots\ldots m$ si abbiano note tutte le incognite nel sistema delle equazioni scritte al n. 22: è questa una verità analitica per se stessa importante che può avere varie applicazioni. Essa lo diventa tanto più in quantochè le trovate forme (45), (46) si adattano prontamente al caso di m infinita, e secondo si è detto al n.° 21, sciolgono il problema per un infinito numero d'incognite, quando i primi membri delle equazioni riferite al n.° 22 sono altrettante serie infinite. Allora i termini delle funzioni che compongono le espressioni delle Ω, Ψ sono altrettanti prodotti infiniti, e quindi le dette Ω, Ψ possono ridursi

$$(47) \qquad \Omega=\frac{1}{i^2}\cdot\frac{(1-i^2)\left(1-\frac{i^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{i^2}{3^2}\right)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.}{(1+gi^2)\left(1+g\frac{i^2}{2^2}\right)\left(1+g\frac{i^2}{3^2}\right)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.},$$

$$(48) \qquad \Psi=\frac{1}{i^2+\frac{1}{g}}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{g}\right)\left(1+\frac{1}{g2^2}\right)\left(1+\frac{1}{g3^2}\right)\,.\,.\,.\,.\,.}{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\,.\,.\,.\,.\,.}\,H_1+$$

$$+\frac{2^2}{i^2+\frac{2^2}{g}}\cdot\frac{\left(1+\frac{2^2}{g}\right)\left(1+\frac{2^2}{g2^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{g3^2}\right)\cdots\cdots}{(1-2^2)\left(1-\frac{2^2}{3^2}\right)\left(1-\frac{2^2}{4^2}\right)\cdots\cdots}\,H_2$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$+\frac{h^2}{i^2+\frac{h^2}{g}}\cdot\frac{\left(1+\frac{h^2}{g}\right)\left(1+\frac{h^2}{g2^2}\right)\left(1+\frac{h^2}{g3^2}\right)\cdots\cdots}{\left(1-\frac{h^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{h^2}{(h-1)^2}\right)\left(1-\frac{h^2}{(h+1)^2}\right)\cdots\cdots}\,H_h$$

$$+\text{ ec.}$$

È chiaro che per avere questa (47) si sono divisi il numeratore e il denominatore della (45) pel prodotto infinito $1^2.2^2.3^2\ldots$, e che non essendovi nel numeratore il fattore i^2-i^2 mentre nel denominatore vi è il fattore i^2g+i^2, per questo motivo compare il fattore $\frac{1}{i^2}$ che moltiplica tutta la frazione per prodotti infiniti; operazioni molto simili spiegano le riduzioni che danno la (48).

30. Le (47), (48) si riducono a forme finite: abbiamo (*)

$$\frac{e^u-e^{-u}}{2}=u\left(1+\frac{u^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{u^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{u^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\cdots$$

dalla quale facendo prima $u=i\pi\sqrt{g}$, poi $u=\frac{h\pi}{\sqrt{g}}$ si deducono

$$(49)\qquad \frac{e^{i\pi\sqrt{g}}-e^{-i\pi\sqrt{g}}}{2}=i\pi\sqrt{g}(1+gi^2)\left(1+g\frac{i^2}{2^2}\right)\left(1+g\frac{i^2}{3^2}\right)\cdots\cdots$$

$$(50)\qquad \frac{e^{\frac{h\pi}{\sqrt{g}}}-e^{-\frac{h\pi}{\sqrt{g}}}}{2}=\frac{h\pi}{\sqrt{g}}\left(1+\frac{h^2}{g}\right)\left(1+\frac{h^2}{g2^2}\right)\left(1+\frac{h^2}{g3^2}\right)\cdots\cdots$$

(*) Eulero. Int. in analysin inf. T. I. n.° 156.

Abbiamo anche (*)

$$\sin.u = u\left(1 - \frac{u^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{u^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{u^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots\ldots$$

si estragga dal secondo membro il fattore $1 - \frac{u^2}{k^2\pi^2}$ che diventa zero per $u = k\pi$, e si cerchi il valore di $\frac{\sin.u}{1 - \frac{u^2}{k^2\pi^2}}$ pel caso di $u = k\pi$. Si trova colla nota regola ch' esso è

$$-\frac{1}{2}k\pi \cos.k\pi;$$

quindi fatto prima $u = i\pi$, poi $u = h\pi$ otteniamo

$$(51)\qquad -\frac{1}{2}i\pi\cos.i\pi = i\pi(1-i^2)\left(1 - \frac{i^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{i^2}{3^2}\right)\ldots\ldots$$

da cui è escluso il fattore $1 - \frac{i^2}{i^2}$ che renderebbe zero il secondo membro;

$$(52)\qquad -\frac{1}{2}h\pi\cos.h\pi = h\pi(1-h^2)\left(1 - \frac{h^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{h^2}{3^2}\right)\ldots\ldots$$

da cui è parimenti escluso il fattore $1 - \frac{h^2}{h^2}$.

Ora le (49), (51) cambiano la (47) nella seguente

$$(53)\qquad \Omega = -\frac{\pi\sqrt{g}.\cos.i\pi}{i\left(e^{i\pi\sqrt{g}} - e^{-i\pi\sqrt{g}}\right)}$$

e le (50), (52) riducono similmente la (48) tale che può scriversi

---

(*) Eulero. Int. in analysin inf. T. I. n.° 158.

$$(54)\qquad \Psi = -\Sigma_i^{\infty}\,\Delta h.\ \frac{\sqrt{g}.h\left(e^{\frac{h\pi}{\sqrt{g}}} - e^{-\frac{h\pi}{\sqrt{g}}}\right)}{\pi\cos.h\pi\left(i^2+\frac{h^2}{g}\right)}\,H_h$$

31. Facciasi $g=s^2$, e dal fin qui detto conchiudasi questa verità interessante. Nel sistema delle infinite equazioni fra un infinito numero d'incognite

$$\begin{array}{l}
H_1 = \frac{1}{s^2+1}X_1 + \frac{1}{2^2s^2+1}X_2 + \frac{1}{3^2s^2+1}X_3 + \ldots + \frac{1}{i^2s^2+1}X_i + \text{ec.}\\[2ex]
H_2 = \frac{1}{s^2+2^2}X_1 + \frac{1}{2^2s^2+2^2}X_2 + \frac{1}{3^2s^2+2^2}X_3 + \ldots + \frac{1}{i^2s^2+2^2}X_i + \text{ec.}\\[2ex]
H_3 = \frac{1}{s^2+3^2}X_1 + \frac{1}{2^2s^2+3^2}X_2 + \frac{1}{3^2s^2+3^2}X_3 + \ldots + \frac{1}{i^2s^2+3^2}X_i + \text{ec.}\\
\qquad\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
H_h = \frac{1}{s^2+h^2}X_1 + \frac{1}{2^2s^2+h^2}X_2 + \frac{1}{3^2s^2+h^2}X_3 + \ldots + \frac{1}{i^2s^2+h^2}X_i + \text{ec.}\\
\qquad\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots
\end{array}$$

L'incognita X_i, da cui si deducono tutte le altre, si trova per la formola

$$(55)\qquad X_i = \frac{1}{\pi^2}\,.\,\frac{i\left(e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}\right)}{\cos.i\pi}\,\Sigma_1^{\infty}\,\Delta h.\ \frac{h\left(e^{\frac{h\pi}{s}} - e^{-\frac{h\pi}{s}}\right)}{\cos.h\pi\left(i^2+\frac{h^2}{s^2}\right)}\,H_h$$

32. Facciasi $g=-s^2$, e con qualche facile riduzione si dedurrà anche quest'altra verità. Nel sistema delle infinite equazioni fra un infinito numero d'incognite

$$H_1 = \frac{1}{1-s^2} X_1 + \frac{1}{1-2^2s^2} X_2 + \frac{1}{1-3^2s^2} X_3 + \ldots + \frac{1}{1-i^2s^2} X_i + \text{ec.}$$

$$H_2 = \frac{1}{2^2-s^2} X_1 + \frac{1}{2^2-2^2s^2} X_2 + \frac{1}{2^2-3^2s^2} X_3 + \ldots + \frac{1}{2^2-i^2s^2} X_i + \text{ec.}$$

$$H_3 = \frac{1}{3^2-s^2} X_1 + \frac{1}{3^2-2^2s^2} X_2 + \frac{1}{3^2-3^2s^2} X_3 + \ldots + \frac{1}{3^2-i^2s^2} X_i + \text{ec.}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$H_h = \frac{1}{h^2-s^2} X_1 + \frac{1}{h^2-2^2s^2} X_2 + \frac{1}{h^2-3^2s^2} X_3 + \ldots + \frac{1}{h^2-i^2s^2} X_i + \text{ec}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

l' incognita generale X_i è determinata per la formola

$$(56) \qquad X_i = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{i\sin.i\pi s}{\cos.i\pi} \Sigma_1^\infty \Delta h. \frac{h\sin.\frac{h\pi}{s}}{\cos.h\pi\left(i^2 - \frac{h^2}{s^2}\right)} H_h.$$

33. Stabiliti questi teoremi, comincierò a mostrarne l'utilità con un esempio in cui si veda ridotto all'atto il metodo teoricamente esposto più sopra al n.° 21; e che conducendo ad un risultamento noto serva di conferma agli stessi teoremi, sulla verità dei quali per la lunghezza dei calcoli precedenti avrebbe potuto per avventura taluno avere qualche inquietudine. Sia nella equazione (4) del n.° 5 $\psi_i(x) = \sin.iax$ si abbia cioè l'equazione

$$\varphi(x) = \dot{A}_1 \sin.ax + \dot{A}_2 \sin.2ax + \ldots + \dot{A}_i \sin.iax + \text{ec.}$$

che può scriversi

$$(57) \qquad \varphi(x) = \Sigma_1^\infty \Delta i. \dot{A}_i \sin.iax;$$

e vogliasi che l' equazione sia vera fra i limiti 0, r. L'equazione (10) del n.° 11. sarà

$$\int_0^r d\alpha.\phi(\alpha)f(\alpha)=\dot{A}_1\int_0^r d\alpha.\sin.a\alpha f(\alpha)+\dot{A}_2\int_0^r d\alpha.\sin.2a\alpha f(\alpha)+\ldots.$$

$$+\dot{A}_i\int_0^r d\alpha\sin.ia\alpha f(\alpha)+\text{ec}.$$

dalla quale, secondo il detto al n.° 21, dando infiniti valori diversi alla funzione arbitraria $f(\alpha)$ si deve cavare un infinito numero di equazioni. Facciasi successivamente

$$f(\alpha)=\sin.\frac{\pi\alpha}{r},\ \sin.\frac{2\pi\alpha}{r},\ \sin.\frac{3\pi\alpha}{r},\ldots\sin.\frac{h\pi\alpha}{r},\ \text{ec}.$$

osservisi essere

$$\int_0^r d\alpha.\sin.ia\alpha\sin.\frac{h\pi\alpha}{r}=\frac{h\pi}{r}.\frac{\sin.iar\cos.h\pi}{a^2i^2-\frac{h^2\pi^2}{r^2}}$$

come subito si dimostra per mezzo dell' integrazione ordinaria: ossia, posto $a=s\frac{\pi}{r}$,

$$\int_0^r d\alpha.\sin.ia\alpha\sin.\frac{h\pi\alpha}{r}=\frac{r}{\pi}h\cos.h\pi\frac{\sin.i\pi s}{\mu^2i^2-h^2}$$

laonde se mettasi

$$\dot{A}_i=\frac{\pi}{r}\frac{X_i}{\sin.i\pi s} \tag{58}$$

si hanno le infinite equazioni

$$\frac{1}{\cos.\pi}\int_0^r d\alpha.\phi(\alpha)\sin.\frac{\pi\alpha}{r}$$

$$=\frac{1}{s^2-1}X_1+\frac{1}{2^2s^2-1}X_2+\ldots\ldots+\frac{1}{i^2s^2-1}X_i+\text{ec.},$$

$$\frac{1}{2\cos.2\pi}\int_0^r d\alpha.\phi(\alpha)\sin.\frac{2\pi\alpha}{r}$$

$$=\frac{1}{s^2-2^2}X_1+\frac{1}{2^2s^2-2^2}X_2+\ldots+\frac{1}{i^2s^2-2^2}X_i+\text{ec.},$$

$$\frac{1}{3\cos.3\pi}\int_0^r d\alpha.\phi(\alpha)\sin.\frac{3\pi\alpha}{r}$$

$$=\frac{1}{s^2-3^2}X_1+\frac{1}{2^2s^2-3^2}X_2+\ldots\ldots+\frac{1}{i^2s^2-3^2}X_i+\text{ec.},$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{1}{h\cos.h\pi}\int_0^r d\alpha.\phi(\alpha)\sin.\frac{h\pi\alpha}{r}$$

$$=\frac{1}{s^2-h^2}X_1+\frac{1}{2^2s^2-h^2}X_2+\ldots\ldots+\frac{1}{i^2s^2-h^2}X_i+\text{ec.},$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

il sistema delle quali confrontato con quello del numero precedente dà

$$H_h=-\frac{1}{h\cos.h\pi}\int_0^r d\alpha.\phi(\alpha)\sin.\frac{h\pi\alpha}{r}$$

epperò per la (56), essendo $(\cos.h\pi)^2=1$

$$X_1=\frac{4i\sin.i\pi s}{\pi^2\cos.i\pi}\int_0^r d\alpha.\phi(\alpha)\Sigma_1^\infty\Delta h\frac{\sin.\frac{h\pi}{s}\sin.\frac{h\pi\alpha}{r}}{\frac{h^2}{s^2}-i^2}$$

e per la (58)

$$\dot{A}_i=\frac{4is^2}{\pi r\cos.i\pi}\int_0^r d\alpha.\phi(\alpha)\Sigma_1^\infty\Delta h\frac{\sin.\frac{h\pi}{s}\sin.\frac{h\pi\alpha}{r}}{h^2-i^2s^2},$$

quindi la (57) in cui per α si metta $\frac{\pi s}{r}$

$$(59)\quad \varphi(x)=\frac{4s^2}{\pi r}\int_0^r d\alpha\,\varphi(\alpha)\,\Sigma_1^\infty \Delta i\,\frac{i\sin.\frac{i\pi s x}{r}}{\cos.i\pi}\,\Sigma_1^\infty \Delta h\,\frac{\sin.\frac{h\pi}{s}\sin.\frac{h\pi\alpha}{r}}{h^2-i^2s^2}$$

34. È notabilissimo come la precedente formola conserva tuttavia l'arbitraria s. L'integrale finito per h si può eseguire: allora si cade in un risultamento noto, e l'indeterminata s per certe condizioni necessarie all'integrazione resta determinata e diventa eguale all'unità: fermiamoci per poco a dimostrarlo. Essendo

$$\sin.\frac{h\pi}{s}\sin.\frac{h\pi\alpha}{r}=\frac{1}{2}\cos.\left(\frac{r}{s}-\alpha\right)\frac{h\pi}{r}-\frac{1}{2}\cos.\left(\frac{r}{s}+\alpha\right)\frac{h\pi}{r}$$

avremo

$$(60)\quad \Sigma_1^\infty \Delta h\,\frac{\sin.\frac{h\pi}{s}\sin.\frac{h\pi\alpha}{r}}{h^2-i^2s^2}=\frac{1}{2}\,\Sigma_1^\infty\Delta h.\,\frac{\cos.\left(\frac{r}{s}-\alpha\right)\frac{h\pi}{r}}{h^2-i^2s^2}$$

$$-\frac{1}{2}\,\Sigma_1^\infty \Delta h.\,\frac{\cos.\left(\frac{r}{s}+\alpha\right)\frac{h\pi}{r}}{h-i^2s^2}$$

Ma si sa essere (*)

$$(61)\quad \Sigma_1^\infty \Delta h.\,\frac{\cos.hx}{h^2-k^2}=\frac{1}{2k^2}-\frac{\pi}{2k}\cdot\frac{\cos.k(\pi-x)}{\sin.k\pi}$$

formola che è vera solamente pei valori di x compresi fra zero e 2π, inclusi anche questi limiti. Applicando questa formola a trovare i due integrali del secondo membro della precedente (60), e rammentandoci che α prende tutti i valori da 0 a r, si vede pel primo che non può essere $s>1$, perchè nei valori di α prossimi ad r verrebbe negativa la quantità sotto al coseno: similmente pel secondo si vede che non può essere $s<1$, perchè pei valori di α prossimi ad r il coefficien-

---

(*) Poisson. Journal. Polyt. Cah. 19. pag. 418.

te di h sotto il coseno passerebbe al di là dell'altro limite 2π: in conseguenza deve essere $s=1$. Aspettiamo però a fare $s=1$ dopo eseguita l'applicazione della formola (61): il che è indifferente, ma riesce comodo: avremo

$$\Sigma_1^\infty \Delta h.\frac{\cos.\left(\frac{r}{s}-\alpha\right)\frac{h\pi}{r}}{h^2-i^2s^2}=\frac{1}{2i^2s^2}-\frac{\pi}{2is}.\frac{\cos.\left(i\pi s-i\pi+\frac{i\pi sa}{r}\right)}{\sin.i\pi s}$$

$$\Sigma_1^\infty \Delta h.\frac{\cos.\left(\frac{r}{s}+\alpha\right)\frac{h\pi}{r}}{h^2-i^2s}=\frac{1}{2i\,s^2}-\frac{\pi}{2is}.\frac{\cos.\left(i\pi s-i\pi-\frac{i\pi sa}{r}\right)}{\sin.i\pi s}$$

Poniamo questi valori nel secondo membro della (60), e chiamandone per un momento I il primo membro, otterremo con pronta riduzione

$$\mathrm{I}=\frac{\pi}{2is}\frac{\sin.(i\pi s-i\pi)\sin.\frac{i\pi sa}{r}}{\sin.i\pi s}$$

e scomponendo il primo seno del numeratore, e insieme avvertendo essere $\sin.i\pi=0$

$$\mathrm{I}=\frac{\pi}{2is}\cos.i\pi\sin.\frac{i\pi sa}{r}$$

valore che sostituito nella (59) la riduce (fatta $s=1$)

$$\phi(x)=\frac{2}{r}\int_0^r da.\phi(a)\,\Sigma_1^\infty\Delta i.\sin.\frac{i\pi x}{r}\sin.\frac{i\pi a}{r}$$

formola assai nota, e anche in questa memoria trovata con altro metodo al n.° 12. e segnata (14).

35 Ho tentato varie altre determinazioni della forma $\psi_i(x)$ nell'equazione (4) del n.° 5, e della forma arbitraria $f(a)$ nell' equazione (10) per cercare nuovi risultamenti col metodo esposto al n°. 21, e coi teoremi dei n.i 31, 32: il che, sicco-

me è manifesto, poteva farsi in moltissimi modi diversi. Debbo però dichiarare d'essere sempre giunto o alle stesse formole di Fourier, o ad altre che da esse si possono dedurre: il qual secondo mezzo di dimostrazione sarà da ognuno preferito a quello di seguire *a priori* calcoli lunghi e intralciati. Per recarne un esempio: una delle formole più curiose a cui venni dopo molto giro di operazioni è la seguente

$$(62)\quad \phi(x)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty d\alpha.\phi(\alpha)\int_0^\infty dp.\left(\frac{a}{a^2-p^2(x-\alpha)^2}-\frac{a}{a^2-p^2(x+\alpha)^2}\right)$$

la quale è molto simile alla (24) che quì richiamo

$$\phi(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha.\phi(\alpha)\int_0^\infty dp\sin.p\alpha\sin.px$$

ma ha queste due singolarità, che la x tolta fuori dal simbolo ϕ non viene a collocarsi sotto trascendenti circolari ma in funzioni razionali assai semplici, e che contiene una indeterminata a che può essere un qualunque numero positivo. Essa però può dedursi dalla formola di Fourier or ora ripetuta, ed ecco come. Pongasi $\phi\left(\frac{x}{u}\right)$ per $\phi(x)$, ciò che non fa difetto, essendo u una lettera esprimente una quantità qualunque positiva, poi facciasi $\frac{x}{u}=y$ avremo

$$\phi(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha.\phi\left(\frac{\alpha}{u}\right)\int_0^\infty dp.\sin.pyu.\sin.p\alpha.$$

Adesso si faccia $\alpha=u\beta$, e verrà

$$\phi(y)=\frac{2u}{\pi}\int_0^\infty d\beta.\phi(\beta)\int_0^\infty dp.\sin.pyu.\sin.p\beta u,$$

si divida per u e si moltiplichi per $\sin.au$, essendo a una quantità qualunque positiva, sarà

$$\varphi(y)\,\frac{\sin.au}{u}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\beta.\varphi(\beta)\int_0^\infty dp.\sin.au.\sin.pyu.\sin.p\beta u\,;$$

osservisi essere per trasformazioni trigonometriche

$$\sin.au.\sin.pyu.\sin.p\beta u$$

$$=\frac{1}{4}\sin.(a+p(y-\beta))u+\frac{1}{4}\sin.(a-p(y-\beta))u$$

$$-\frac{1}{4}\sin.(a+p(y+\beta))u-\frac{1}{4}\sin.(a-p(y+\beta))u$$

epperò se ne faccia la sostituzione nella precedente, e poi si integri per u fra i limiti $0, \infty$. Rammentate le note formole

$$\int_0^\infty dx.\frac{\sin.ax}{x}=\frac{\pi}{2}\,;\qquad \int_0^\infty dx.\sin.ax=\frac{1}{a}$$

verrà, dopo aver moltiplicato per $\frac{2}{\pi}$, e rimesse x, α per y, β

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty d\alpha.\varphi(\alpha)\int_0^\infty dp.\left(\frac{1}{a+px-p\alpha}+\frac{1}{a-px+p\alpha}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{a+px+p\alpha}-\frac{1}{a-px-p\alpha}\right).$$

Qui le quattro frazioni sotto il secondo segno integrale si possono compendiare in varie maniere: due ne distinguo che danno le formole

$$\varphi(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha.\varphi(\alpha)\int_0^\infty dp.\left(\frac{a}{a^2-p^2(x-\alpha)^2}-\frac{a}{a^2-p^2(x+\alpha)^2}\right)$$

$$(63)\quad \varphi(x)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty d\alpha.\varphi(\alpha)\int_0^\infty dp.\left(\frac{p\alpha}{(px+a)^2-p^2\alpha^2}-\frac{p\alpha}{(px-a)^2-p^2\alpha^2}\right)$$

delle quali la prima è la (62).

36. È facile verificare queste formole per qualche caso particolare in cui si sappiano fare le integrazioni. Per un esempio sia $\phi(x)=\frac{1}{x}$, e la (63) potrà scriversi

$$\frac{1}{x}=\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{dp}{p}\int_0^\infty d\alpha.\left(\frac{1}{\alpha^2-\left(\frac{px-a}{p}\right)^2}-\frac{1}{\alpha^2-\left(\frac{px+a}{p}\right)^2}\right),$$

ora l' integrazione ordinaria dimostra prontamente la formola

$$\int_0^\infty\frac{dt}{t^2-k^2}=\pm\frac{1}{2k}\log.(-1)$$

trovata anche dal Poisson con altri metodi più complicati: epperò per la sua applicazione si ha dalla precedente prendendo il segno superiore

$$\frac{1}{x}=\frac{\log.(-1)}{\pi^2}\int_0^\infty dp\left(\frac{1}{px-a}-\frac{1}{px+a}\right)$$

che può ridursi alla espressione

$$\frac{1}{x}=\frac{2a\log.(-1)}{x^2\pi^2}\int_0^\infty dp.\frac{1}{p^2-\frac{a^2}{x^2}};$$

quest'ultimo integrale si ha dalla stessa formola ora usata che, preso il segno inferiore, dà per esso il valore $-\frac{x}{2a}\log.(-1)$. Sostituendo ottiensi

$$\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}\,\frac{[\log.(-1)]^2}{\pi^2}$$

equazione che si riconoscerà identica quando pongasi per log.(—1) il suo valore $\pi\sqrt{-1}$ dato dalla celebre analogia di Giovanni Bernoulli.

37. I due teoremi dei n. 31, 32, anche indipendente-

mente dalla loro applicazione al metodo esposto nel n.° 21 forniscono due formole interessanti. Le (h)*esime* equazioni di quei due sistemi, ove alle X_1, X_2, X_3, ec. sostituiscansi le espressioni date dalle (55), (56), compendiando alla solita maniera le serie infinite dei secondi membri possono scriversi

$$(64) \qquad H_h = \frac{s^2}{\pi^2} \Sigma_1^\infty \Delta i . \frac{i\cos.i\pi\,(e^{i\pi s} - e^{-i\pi s})}{i^2s^2+h^2} \times$$

$$\Sigma_1^\infty \Delta k . \frac{k\cos.k\pi(e^{\frac{k\pi}{s}} - e^{-\frac{k\pi}{s}})}{i^2s^2+k^2} H_k .$$

$$(65) \qquad H_h = \frac{4s^2}{\pi^2} \Sigma_1^\infty \Delta i . \frac{i\cos i\pi \sin.i\pi s}{h^2-i^2s^2} \Sigma_1^\infty \Delta k . \frac{k\cos.k\pi \sin.\frac{k\pi}{s}}{i^2s^2-k^2} H_k$$

dove i coseni cos.$i\pi$, cos.$k\pi$ si pongono indifferentemente nel numeratore o nel denominatore per una ragione sopra accennata. Vedesi che ho mutata la lettera nei due integrali delle (55) (56) il che era lecito entrandovi essa in un modo meramente istrumentale. Così le precedenti (64), (65) sono formate cogli integrali finiti in un modo somigliante a quello con cui le formole di Fourier, o le (62), (63) sono fatte cogli integrali continui: la variabile h è tolta di sotto a un simbolo qualunque H di funzione, e trasportata in un denominatore di una funzione razionale. Però quasi tutte le proprietà di quelle insigni formole si riscontrano anche nelle (64), (65), che come quelle si estendono facilmente a un qualunque numero di variabili.

38. Agevolmente e senza intermedj di altre teoriche si traducono le (64), (65) in integrali continui. Ciò può farsi in varie maniere: eccone una. Si elimini il fattore i.cos.$i\pi$ (e similmete anche l' altro $k$cos.$k\pi$) mediante il teorema

$$(66) \qquad i\cos.i\pi = \left(\frac{g^2}{l^2} - i^2\right) \int_0^{\frac{\pi}{l}} dt. \frac{l\sin.gt\sin.ilt}{\sin.\frac{g\pi}{l}}$$

che prontamente si dimostra coll' integrazione ordinaria : poi pongasi $H_{h\omega}$ invece di H_h, essendo ω una quantità che può diventar piccola quanto si vuole: indi si passi dagli integrali finiti ai continui col metodo noto e già praticato anche in questa memoria. Non mi fermo sui risultamenti che somministrano formole delle quali può ripetersi quanto dissi al n.° 35.

39. Piuttosto trovo meritevole d' attenzione l' uso delle (64), (65) tali come sono, per la ricerca di integrali finiti definiti fra 1 e ∞, che se ne possono dedurre in numero tanto grande quanto si vuole. Serviranno entrambe, ma per la seconda osservo, che quando s è numero intero, s'incontra la circostanza del passaggio per l'infinito: circostanza che esige tutta la cautela (*). Farò un solo esempio sulla (65). Sia

$$H_h = \frac{\sin.hx\cos.h\pi}{\sin.\frac{h\pi}{s}}$$

si ha

$$\frac{\sin.hx\cos.h\pi}{\sin.\frac{h\pi}{s}} = \frac{4s^2}{\pi^2} \Sigma_1^\infty \Delta i. \frac{i\cos.i\pi\sin.i\pi s}{i^2s^2 - h^2} \; \Sigma_1^\infty \Delta k. \frac{k\sin.kx}{k^2 - i^2s^2}.$$

Ammettendo la condizione che x sia compresa fra 0, 2π esclusi i limiti, abbiamo (**)

(*) Poisson. Journal Polyt. Cah. 18. pag. 325.

(**) Poisson. Journal. Polyt. Cah. 19. pag. 418.

$$\Sigma_1^\infty \Delta k.\frac{k\sin kx}{k^2-i^2s^2}=\frac{\pi}{2}\frac{\sin.is(\pi-x)}{\sin.i\pi s}$$

quindi sostituendo si cava

$$\Sigma_1^\infty \Delta i.\frac{i\cos.i\pi\sin.is(\pi-x)}{i^2-\frac{h^2}{s^2}}=\frac{\pi}{2}\frac{\sin.hx\cos.h\pi}{\sin.\frac{h\pi}{s}} \tag{67}$$

formola che facilmente si verifica in molte maniere dando ad x e ad s dei valori particolari.

Non voglio dissimulare che ritenendo s quantità reale, la formola (64) incontrerà le difficoltà cui soggiacciono le serie divergenti: non così la (65), che si risolve in una serie convergente.

NOTA

Sugli integrali finiti definiti.

Essendo P una funzione analitica formata di molte lettere, esprimerò per $\Sigma\Delta x.P$ piuttosto che per ΣP l' integrale finito indefinito preso relativamente alla x, e ciò a fine d'indicare la variabile per cui si è fatta l'integrazione, in perfetta similitudine a quanto si pratica negl'integrali continui. Quì però bisognerà esprimere a parte anche una quantità finita ω cui è eguale la differenza Δx. Immaginando trovata per $\Sigma\Delta x.P$ la funzione $F(x,\omega)$ che vi è eguale, scriverò $\Sigma_a^b \Delta x.P$ invece della differenza $F(b,\omega)—F(a,\omega)$, e chiamerò questa espressione *l' integrale finito della* P *preso per rapporto ad x e definito fra i limiti $x=a$, $x=b$, essendo $\Delta x=\omega$.* Il sig. Fourier segna questo integrale definito colle due equazioni $x=a$, $x=b$ scritte costantemente una sotto e una sopra il simbolo Σ , il che è un po' più lungo per la scrittura e riesce incomodo per la stampa. Questa ragione, e più quella della piena somiglianza colla notazione adottata per gli integrali definiti continui, varrà, spero, perchè mi sia condonata la piccola innovazione introdotta.

Raccolgo alcuni principj e teoremi relativi a questi integrali finiti definiti, di molti dei quali faccio uso nella precedente Memoria.

I. Si possono rovesciare i limiti cambiando il segno all' integrale. Questo principio discende immediatamente dalla definizione.

II. Dalla equazione notissima nel calcolo delle differenze, che subito si costruisce sulla definizione che ne forma il fondamento

$$\Sigma\Delta x.\varphi(x+n\omega)=\varphi(x)+\varphi(x+\omega)+\ldots\ldots+\varphi(x+(n-1)\omega)+\Sigma\Delta x.\varphi(x);$$

mettendo $x=a$ e trasponendo l'ultimo termine, si ha pel detto or ora

$$(\alpha)\quad \Sigma_{a}^{a+n\omega}\Delta x.\varphi(x)=\varphi(a)+\varphi(a+\omega)+\varphi(a+2\omega)+\ldots+\varphi(a+(n-1)\omega)$$

e se $\omega=1$, $a=m$ ponendo n per $m+n$, e cambiando per comodo la x esprimente numero intero in i

$$(\beta)\qquad \Sigma_{m}^{n}\Delta i.\varphi(i)=\varphi(m)+\varphi(m+1)+\varphi(m+2)+\ldots\ldots+\varphi(n-1)$$

che quando $n=\infty$, $m=1$ diventa

$$(\gamma)\qquad \Sigma_{1}^{\infty}\Delta i.\varphi(i)=\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\text{ ec. all' inf.}$$

I primi membri di queste (α), (β), (γ) sono espressioni ora adottate per significare compendiosamente serie finite o infinite e tali equazioni provano ch' esse sono veri integrali finiti e non modi capricciosi di scrivere.

III. Osservisi il seguente teorema

$$\Sigma_{m\omega}^{n\omega} \Delta x.\phi(x) = \Sigma_{m}^{n} \Delta i.\phi(i\omega)$$

dove è $\Delta x = \omega$, $\Delta i = 1$. Esso si prova subito sciogliendo i due membri nelle due serie equivalenti mediante le (α), (β): questo è il teorema usato nella memoria ai n.^{i} 11. 13.

IV. Essendo $b = a + m\omega$, $c = a + n\omega$ è

$$\Sigma_{a}^{b} \Delta x.\phi(x) + \Sigma_{b}^{c} \Delta x.\phi(x) = \Sigma_{a}^{c} \Delta x.\phi(x)$$

come nel caso analogo degli integrali continui: il teorema si prova colla formola (α) precedente.

V. Tutte le serie infinite di cui si conosce la somma (e grandissimo ne è il numero in analisi) somministrano altrettante formole integrali definite fra 1, ∞ date per espressioni finite e note. Per un esempio la notissima

$$\frac{a}{1-a} = a + a^{2} + \ldots\ldots + a^{i} + \text{ec.}$$

si traduce a motivo della (γ) nella formola

$$(\delta) \qquad \Sigma_{1}^{\infty} \Delta i.a^{i} = \frac{a}{1-a}$$

la quale è però soltanto vera quando $a < 1$, ossia quando la serie infinita è convergente.

VI. Il principio della derivazione e integrazione per le costanti, che nel calcolo degli integrali definiti continui conduce a tanti nuovi risultamenti, vale similmente anche per gl' integrali di cui parliamo: si possono addurre ben molti esempj in cui esso somministra formole riconosciute altrimenti per vere.

VII. Non solo dalle serie infinite ma anche dalle espressioni per prodotti infiniti si cavano formole come all' art. V; ciò avviene perchè queste espressioni si riducono a quelle serie derivando logaritmicamente per alcuna delle costanti. A recarne un esempio: dalla espressione

$$\sin.z = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots\ldots$$

ponendo $z=\pi x$, e prendendo i logaritmi si ha

$$\log.\sin.\pi x=\log.x+\log.\pi+\Sigma_1^\infty\Delta i.\log.\left(1-\frac{x^2}{i^2}\right),$$

e derivando per x facilmente si deduce

$$(\varepsilon)\qquad \Sigma_1^\infty\Delta i.\frac{1}{i^2-x^2}=\frac{1}{2x^2}-\frac{\pi}{2x}\cot.\pi x.$$

Se il secondo membro di questa equazione si scrive sotto la forma $\frac{\sin.\pi x-\pi x\cos.\pi x}{2x^2\sin.\pi x}$, diventa $\frac{0}{0}$ per $x=0$: ma colla nota regola si cava il vero valore e quindi la formola

$$\Sigma_1^\infty\Delta i.\frac{1}{i^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

che è conosciuta dietro l' uso di principj analitici differenti.

VIII. Gl' integrali di cui quì si parla si usano talvolta promiscuamente cogli integrali continui, e sono dati gli uni per gli altri. Così il Poisson sul principio di una sua elegantissima memoria (*) dimostra l' equazione ad integrali misti

$$\Sigma_1^\infty\Delta i.\frac{x}{((2i-1)\pi+g)^2+x^2}=\int_0^\infty dt.\frac{e^{-gt}\sin.xt}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}$$

dove g deve essere compresa fra $-\pi,\infty$: eccone un altro

---

(*) Journal Polyt. Cah. 18. pag. 296.

esempio. Dalla

$$\Sigma_1^{\infty} \Delta i . e^{-ix} = \frac{1}{e^{x} - 1}$$

che si ottiene subito dalla (δ) col porre $a = e^{-x}$; moltiplicando per sin.kx, cos.kx, e poi integrando per x da 0 all'∞, si hanno per formole assai note (*)

$$\Sigma_1^{\infty} \Delta i \cdot \frac{k}{k^2 + i^2} = \int_0^{\infty} dx . \frac{\sin kx}{e^{x} - 1}$$

$$\Sigma_1^{\infty} \Delta i . \frac{i}{k^2 + i^2} = \int_0^{\infty} dx . \frac{\cos . kx}{e^{x} - 1} .$$

Di questi integrali finiti il primo è conosciuto (**) per una formola che si cava anche subito dalla (ε) ove pongasi $x = k\sqrt{-1}$, e si conchiude

$$\int_0^{\infty} dx . \frac{\sin kx}{e^{x} - 1} = \frac{\pi}{2} . \frac{e^{k\pi} + e^{-k\pi}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} - \frac{1}{2k} .$$

IX. Notabilissima per questi integrali, come per gl'integrali continui, è la circostanza che spesso ha luogo, di potere assegnare il valore dell' integrale definito fra certi limiti, mentre non se ne saprebbe trovare l' integrale indefinito. Così mentre il calcolo delle differenze non sa dare l' integrale indefinito $\Sigma \Delta i . \frac{a^i}{i}$ si ha da una serie nota

$$\Sigma_1^{\infty} \Delta i . \frac{a^i}{i} = - \log.(1 - a)$$

(*) Poisson. Journal Polyt. Cah. 16. pag. 219.
(**) Poisson. Journal Polyt. Cah. 19. pag. 416.

formola che potevasi prontamente dedurre anche dalla precedente (δ) integrando per la costante a fra o, a dopo averla tutta divisa per la stessa a.

X. La precedente osservazione non toglie che il mezzo più ovvio per la ricerca degli integrali definiti sia quello di tentare il passaggio per l'integrale indefinito. Pertanto dimostrerò quì due formole d'integrali finiti indefiniti che sono fecondissime di applicazioni, e tanto più volentieri in quanto che il metodo usato riesce egualmente bene in varii altri casi analoghi. Pongo

$$X = \Sigma\Delta x . p^{x} \cos . ax\,; \qquad Y = \Sigma\Delta x . p^{x} \sin . ax,$$

prendo dal calcolo delle differenze i quattro dati seguenti

$$\Delta \sin . ax = (\cos . a\omega - 1) \sin . ax + \sin . a\omega . \cos . ax$$

$$\Delta \cos . ax = (\cos . a\omega - 1) \cos . ax - \sin . a\omega \sin . ax$$

$$\Sigma\Delta x . p^{x} = \frac{p^{x}}{p^{\omega} - 1}$$

$$\Sigma\Delta x . (U_{x} Z_{x}) = U\Sigma\Delta x . Z - \Sigma\Delta x . [(Z + \Sigma\Delta x . Z)\Delta U]$$

coi quali le due equazioni di posizione si cambiano nelle seguenti

$$X = \cos . ax \frac{p^{x}}{p^{\omega} - 1} - \Sigma\Delta x .$$

$$\left[[(\cos . a\omega - 1) \cos . ax - \sin . a\omega \sin ax] \frac{p^{x+\omega}}{p^{\omega} - 1} \right]$$

$$\mathrm{Y} = \sin.ax\,\frac{p^{x}}{p^{\omega}-1} - \Sigma\Delta x.$$

$$\left[[(\cos.a\omega - 1)\sin.ax + \sin.a\omega\cos.ax]\,\frac{p^{x+\omega}}{p^{\omega}-1}\right],$$

e queste (osservando che gl' integrali dei secondi membri, sgombrati più che è possibile dei fattori costanti, sono quegli stessi designati colle lettere X, Y) danno con facili riduzioni le due equazioni

$$(p^{\omega}\cos.a\omega - 1)\mathrm{X} - p^{\omega}\sin.a\omega\mathrm{Y} = p^{x}\cos.ax$$

$$p^{\omega}\sin.a\omega\mathrm{X} + (p\cos.a\omega - 1)\mathrm{Y} = p^{x}\sin.ax.$$

Si risolvano queste col metodo elementare, e sostituendo ad X, Y, le formole rappresentate, si avranno

$$(\eta)\quad \begin{aligned} \Sigma\Delta x.p^{x}\cos.ax &= p^{x}\,\frac{p^{\omega}\cos.[a(x-\omega)]-\cos.ax}{1-2p^{\omega}\cos.a\omega+p^{2\omega}} \\ \Sigma\Delta x.p^{x}\sin.ax &= p^{x}\cdot\frac{p^{\omega}\sin.[a(x-\omega)]-\sin.ax}{1-2p^{\omega}\cos.a\omega+p^{\omega}} \end{aligned}$$

Quindi si deducono le espressioni generali per $\Sigma_{\alpha}^{\beta}\Delta x.p^{x}\cos.ax$ $\Sigma_{\alpha}^{\beta}\Delta x.p^{x}\sin.ax$ qualunque siano i limiti α, β: e moltiplicando la prima per $\cos.q$, la seconda per $\sin.q$ e sottraendo, poi la prima per $\sin.q$ e la seconda per $\cos.q$ e sommando, si hanno quelle anche più generali di

$$\Sigma_{\alpha}^{\beta}\Delta x.p^{x}\cos.(ax+q),\ \Sigma_{\alpha}^{\beta}\Delta x.p^{x}\sin.(ax+q).$$

Non iscrivo queste formole per amore di brevità, e perchè ognuno lo può fare.

Dalle (η), definendo le integrazioni fra $1, \infty$, messa $\omega = 1$, e quindi surrogata la lettera i alla x, si hanno subito

$$(\Theta)\quad \begin{cases} \Sigma_1^\infty \Delta i . p^i \cos . ai = \frac{p(\cos . a - 1)}{1 - 2p\cos . a + p^2} \\ \Sigma_1^\infty \Delta i . p^i \sin . ai = \frac{p\sin . a}{1 - 2p\cos . a + p^2} \end{cases}$$

le quali suppongono $p < 1$. Queste formole che il Poisson trova coll'uso delle serie (*) ed altre che ne conseguono, sono manifestamente casi assai particolari delle

$$\Sigma_\alpha^\beta \Delta x . p^x \cos . ax, \qquad \Sigma_\alpha^\beta \Delta x . p^x \sin . ax$$

che insegnammo a trovare.

Si determinano per le premesse anche le formole integrali indefinite

$$\Sigma \Delta x . p^x \sin . ax \sin . bx, \qquad \Sigma \Delta x . p^x \sin . ax \cos . bx,$$

$$\Sigma \Delta x . p^x \cos . ax \cos . bx$$

scomponendo per trasformazioni trigonometriche i prodotti di seni e coseni in seni e coseni semplici, il che le riduce alla forma delle trovate: così si determinano anche formole integrali contenenti un qualunque prodotto di seni e coseni, e quindi anche le

$$\Sigma \Delta x . p^x (\sin . ax)^m, \qquad \Sigma \Delta x . p^x (\cos . ax)^m,$$

essendo m numero intero. In seguito passando a definizioni fra limiti scelti ad arbitrio si dedurrà un grandissimo nu-

---

(*) Journal Polyt. Cah. 19. pag. 405.

mero di formole integrali finite definite che saranno eguali ad espressioni note.

E se dopo aver introdotto sotto i segni integrali un numero qualunque di fattori formanti un prodotto

$$\cos.ax\cos.bx\cos.cx\ldots.., \text{ ovvero } \sin.ax\cos.bx\cos.cx\ldots., \text{ec.}$$

si rifletta che le lettere a, b, c,... sono quantità che rimangono affatto arbitrarie, si capirà che potendo derivare o integrare a piacimento per queste costanti le equazioni formate dalle formole integrali e dai loro valori trovati come sopra, si estende all'infinito il numero di altri nuovi integrali finiti definiti che possono aversi dai precedenti.

RIFRAZIONI ASTRONOMICHE

OSSERVATE

A PICCOLE ALTEZZE SU L'ORIZZONTE

MEMORIA

DEL PROFESSOR GIUSEPPE BIANCHI

Ricevuta adì 27. *Aprile* 1830.

1. Uno degl' importanti oggetti dell'astronomia egli è senza dubbio quello delle rifrazioni. O si consideri la necessaria parte che hanno le rifrazioni in tutte, generalmente parlando, le osservazioni; o si rifletta che la teoria e l' osservazione pienamente ancora non s'accordano su le quantità precise della rifrazione per le piccole altezze; o si ponga mente che molta oscurità rimane tuttora in quest' ultimo caso; per la osservazione riguardo ai cangiamenti irregolari della densità dell'aria presso l' orizzonte, e per la teoria relativamente all' ignota legge della diminuzion del calore negli strati atmosferici; o l' attenzione rivolgasi alle gravi e singolari quistioni, che dalle rifrazioni dipendono, o ne possono ricever lume; e più mirando insieme a tutte queste ragioni sarà forza convenire, che in realtà la pratica ricerca delle rifrazioni e la soluzion teorica dell'analogo problema offron argomento del maggior interesse. Di qui ebber motivo e impulso commendevolissimo gli sforzi de' primi e più valenti Geometri moderni per assegnar la vera formula della rifrazione; e di quì pure il consiglio dato agli osservatori di ciascuna Specola di non ommettere un' accurata e diretta indagine delle rifrazioni concrete e al proprio luogo appartenenti. Sono abbastanza conosciute e debitamente apprezzate fra le operazioni del primo

genere la formula di *Simpson*, o più veramente di *Bouguer*, e le profonde analitiche disquisizioni in proposito di *Eulero*, di *Kramp*, di *Oriani*, di *Laplace* e più recentemente, per tacer di altri, dell' illustre Sig. professore *Plana* nell' ampia e dottissima di lui memoria premessa al I.° Volume delle osservazioni della R. Specola di Torino. E per le determinazioni del secondo genere note pur sono, e non meno degne di plauso le cure che vi posero *Cassini*, *Mayer*, *Bradley*, *Piazzi*, e fra i più recenti gli esimii astrononii *Carlini* e *Bessel*. Nè tante fatiche falliron lo scopo ed anzi perfettamente quasi il raggiunsero per le distanze allo zenit non maggiori di 80.° Un poco più al di sotto cominciano le discordanze, come, a recarne un esempio, il ch. Sig. *Nicollet* giudicava non ha guari che all' altezza di 7.° $\frac{1}{2}$,, les efforts rèunis des Gèomè- ,, tres et des Astronomes n' ont pas encore rèussi à se ren- ,, dre maîtres des irrègularitès des rèfractions ,, alla quale opinione però non assentiva per alcuni riguardi e argomenti il lodato prof. e cavaliere *Plana*. Ma nelle altezze ancora minori, ossia pei primi gradi sopra l' orizzonte, niuna formula poi risponde fin quì con sicurezza e approssimazion sufficiente ai valori osservati delle rifrazioni; e solo giova sperare che novelli sforzi di esperienze e di analisi potranno meglio riuscire all' intento, come un rimarchevol passo, già fatto e che in seguito accennerò, sembra promettere.

2. Appena la fabbrica di questo R. osservatorio fu compiuta, e in esso collocati si trovarono gli stromenti per le osservazioni, sentita io pure la forza de' precedenti riflessi mi avvisai d'intraprendere fra le altre fondamentali ricerche quella eziandio delle rifrazioni; al che mi spronarono vieppiù le opportunità de' mezzi, del sito, e della stagione. Quanto in primo luogo ai mezzi, il circolo meridiano di *Reichenbach* parvemi essere lo stromento il più acconcio ad una simile investigazione; perocchè sebbene la stabile posizion del cannocchiale di esso in un solo piano tolga di profittar delle occa-

sioni di un' atmosfera propizia per osservar in un breve tempo un grande numero di rifrazioni prossime all'orizzonte, come ciò potrebbe farsi con un circolo verticale mobile; tuttavia per la fiducia maggiore da riporsi ne' risultamenti la stabilità medesima costituisce invece una condizion vantaggiosa. L'osservazione inoltre delle altezze meridiane somministra le rifrazioni con un minor numero di dati o elementi di quello che si richiede a desumerle dalle altezze osservate fuori del meridiano, e quindi le osservazioni meridiane sono da preferir per la semplicità, che vale a scemar il numero e l'influenza degli errori. E lo svantaggio infine di non poter istituire col circolo meridiano le osservazioni, fuorchè sopra due punti dell'orizzonte, è nullo o indifferente all' oggetto di cui ci occupiamo; e pel quale, anzichè raccogliere in una notte sola una serie copiosa di rifrazioni osservate, interessa principalmente, come vedremo, di confrontare e discutere le rifrazioni determinate in epoche e circostanze le più diverse. Riguardo secondariamente al sito, il meridiano di questa Specola mi offeriva condizioni assai favorevoli per la ricerca delle rifrazioni, onde mi tenni quasi in dovere di assumerla e non rinunziare ad un favor di posizione, che non è ad ogni Specola conceduto. Al Sud il detto meridiano termina coi monti alla base dell'apennino, e al Nord coi monti veronesi; ma quelli non sorgono più elevati di 1.° 2'., e questi, per la maggiore distanza, s' innalzano appena oltre 12'; cosicchè in questa ultima plaga, che è la più interessante, come quella delle stelle circompolari, di pochissimo non rimane scoperto e contro il ciel projettato l'orizzonte razionale. Di più questa parte della pianura lombarda, ove mi trovo, non è da molte acque irrigata, e soffre anzi agevolmente la siccità estiva; laonde i vapori non debbon sollevarsene in quantità enorme a ingombrar l' orizzonte. Vero è nondimeno che la mia linea meridiana orizzontale verso il Nord attraversa le valli e gli umidi terreni alle rive del Po; e infatti da questo lato l'atmosfera mi si offre più rare volte serena, e dalle basse nebbie non occupata che in altri punti: allo spirare però di certi venti le nebbie quivi pur si disperdono e l' aria vi divien limpida e quieta come al Sud. Nè tacerò che gli stromenti delle mie osservazioni sono collocati notabilmente al di sopra dei tetti della Città, e che il meridiano passa per la parte di questa meno popolata, verso il Nord specialmente; il perchè dal fumo che sollevasi dalle case, nell' inverno sopratutto, le osservazioni di altezza non sono fortemente alterate; comecchè io m' accorsi talora di qualche salto non picciolo, a tal cagione per avventura dovuto, nelle stelle più australi e durante la fredda stagione. Ma io dissi in terzo luogo che anche il tempo mi fu assai propizio allo scopo di riconoscere le rifrazioni; e ognuno di leggieri si rammenterà quanto lungamente si mantenne la serenità dell' atmosfera negli ultimi due anni passati; durazione di serenità così memorabile appunto nel 1828, pei nostri paesi almeno, come lo è stato il rigor dell' inverno in quest' anno; per lo che di conseguenza quanto le osservazioni astronomiche riuscirono scarse e dubbiose nell' ultima di tali epoche, altrettanto poterono esser copiose e ben accertate nella prima.

3. Questi cenni premessi, che reputai al mio scopo non estranei o indifferenti, vengo all' oggetto stesso immediato della presente Memoria, che è di esporre le quantità della rifrazione da me osservate nelle piccole altezze, e di limitarmi per ora su di esse ad alcune pratiche riflessioni. Io non presi perciò di mira che le altezze meridiane delle stelle non maggiori di 30.°: poichè assolutamente la diversità delle ipotesi dai Geometri assunte per esprimere le rifrazioni, e quella delle tavole dai moderni astronomi addottate per lo stesso elemento sono trascurabili affatto nelle altezze all' accennato limite superiori. Quindi è che, senza incorrere la taccia logica di supporre ciò che trattasi di determinare, nella ricerca delle rifrazioni si può far uso delle migliori tavole o formole note per le grandi altezze; e così per queste io sempre ho

adoperato le tavole di rifrazione, quanto esatte altrettanto per l' uso comode, che il Sig. Cav. *Carlini* sulle proprie osservazioni calcolò, dopo averne ingegnosamente fissato i valori delle tre costanti della formola di *Laplace* pel suo clima di Milano (V. Effem. di Milano per gli anni 1807. e 1808. nelle appendici). A seguir poi le rifrazioni, ove ne insorgon più forti i dubbii, cioè nelle piccole altezze, il ch. Astronomo Sig. Ab. *Oriani* si pose a darne stimolo ed esempio colla sua interessante Memoria, inserita nell'appendice dell'effemeridi milanesi per l'anno 1816, e nella quale confrontando egli le migliori tavole con alcune di lui osservazioni delle altezze circommeridiane di *α* del cocchiere sotto il polo ne dedusse la tavola del Sig. *Carlini* rappresentar meglio d'ogni altra le rifrazioni, così di estate come d'inverno, conchiudendo egli però: ,, tuttavia per accertare con maggior esattezza gli errori ,, delle diverse tavole di rifrazione, principalmente in estate, ,, converrà replicare più volte le stesse osservazioni ed aggiungere quelle di altre stelle circompolari. ,, Anche il ch. professore *Bessel*, dopo aver nell'insigne di lui opera = *Astronomiae Fundamenta* = analizzata con profonda sagacità la formula differenziale della rifrazione, costrutta indi su di essa la propria tavola ivi pubblicata, e paragonata questa con una serie di osservazioni di picciole altezze fatte dal *Bradley*, esprimeva il vóto ,, Iucundum quidem fuisset, tabulas istas ,, cum observationum in alia Specula factarum continua, neque minus accurata serie conferre, quoniam eo modo, quod ,, est verisimile confirmaretur quaestio, parine instrumentorum meteorologicorum gradui pares ubique conveniant refractiones. ,, Contuttochè pertanto abbia dipoi l' indefesso astronomo di Könisberg soddisfatto egli medesimo il proprio e ben ragionevole desiderio, pubblicando ed esaminando nella VII. e VIII. parte della grande collezione delle sue osservazioni nuove e numerose serie di rifrazioni osservate in prossimità dell' orizzonte; cionondimeno inutil opera non sarà certamente il ripetere in altri luoghi somiglianti ricerche, e prepararne i materiali che valgano a perfezionar l'astronomica dottrina delle rifrazioni. Tanto più l'astronomia essendo oggimai quella scienza avanzatasi fino alle difficoltà, che sono bensì le più minute e sfuggevoli ai nostri mezzi, ma che perciò riescono a superarsi altresì le più ardue, e sembran esigere a tal fine gli sforzi e l' opera combinata di un maggior numero di coltivatori.

4. Il noto metodo più diretto e semplice di ottener le rifrazioni dalle altezze meridiane osservate delle stelle suppone per dati la latitudine del luogo terrestre, la declinazione di ogni stella osservata, e che inoltre le altezze meridiane siano stabilite colla più scrupolosa precisione. Ciascuno di questi dati formò partitamente l' oggetto delle mie anteriori determinazioni, e posi le cure per me possibili di fissarlo conforme alla verità. Sul valor della latitudine, che trovai e ritengo: 44.° 38', 52", 75, niun dubbio finora ho concepito, e se pure dovrò in appresso apportarvi alcun cangiamento, non sarà, spero, che di qualche decimo di secondo tutto al più. Per le declinazioni delle stelle circompolari ho potuto io medesimo procurarmele e definirle al principio del 1828. L'accordo che mi risultò sulle piccole quantità dei moti proprii di tali stelle, secondo le mie determinazioni e quelle di altri, mi serve ora di criterio e fondamento a credere che le declinazioni stesse da me ottenute poco si scostin dal vero, e quindi ad appoggiarmivi con fiducia nell' attuale argomento. Riguardo però alle stelle australi (essendomi prefisso di determinar le rifrazioni sì al Nord come al Sud) io non poteva similmente procacciarmene le declinazioni, e dovendo perciò desumerle dai cataloghi, ho preferito il catalogo del cel. P. Piazzi, come quello che riunisce al pregio della moderna esattezza la circostanza per me significante di essere stato costrutto in una latitudine meno boreale che altri. Intorno al terzo dato finalmente delle altezze meridiane osservate, ad escluderne ogni minimo dubbio di errore io doveva istituir un esame diligente e minuto delle parti del mio istromento, che

su quel dato influiscono, quali sono gli errori delle divisioni o della lettura, la flessione del cannocchiale, l'eccentricità e la posizione del piano del circolo; ma non avendo io sin quì avuto il tempo di procedere a siffatto esame, ho creduto poi anche di potermelo risparmiar senza pregiudizio delle attuali ricerche. Imperciocchè ne' circoli meridiani di *Reichenbach* gl' indicati errori furon già dimostrativamente riconosciuti in parte nulli, e in parte così tenui che quasi non metterebbe il rintracciarli e correggerne le osservazioni; come per esempio la flession del cannocchiale si trovò dal prof. *Bessel* non ascendere, nel suo massimo valore all' orizzonte che a 1'', 11; onde a ragione il medesimo astronomo intitolava il suo nuovo circolo „ *un istromento atto a far progredire la Scienza.* „ E che anche nel mio circolo i detti errori siano, se non del tutto rimossi, insensibili almeno, io me ne persuadeva, sebbene con prova indiretta, dacchè per le declinazioni delle 28 stelle fondamentali più elevate mi accordai col Sig. *Bessel* entro il limite di 1'', 5 circa; il qual accordo in ripetuti confronti, anzichè a fortuite combinazioni, mi sembrò di dover ascrivere alla perfezion esimia dei due stromenti.

Gli elementi poi del calcolo delle rifrazioni così predisposti e assicurati, non mi rimaneva che usar le necessarie avvertenze all' atto d' istituir le osservazioni delle altezze, cioè appuntar bene il cannocchiale alle stelle, collocare e fermar queste sotto il filo orizzontale nel sito proprio del meridiano, legger attentamente i nonii e il livello del circolo, e infine per le stelle all' orizzonte vicinissime notar anche lo stato dell' atmosfera da quella parte; a tutte le quali cautele io mi studiai ogni volta di soddisfare.

5. Ne' quadri de' risultamenti, che darò quì appresso, con Δ' per ogni stella circompolare osservata ho espressa la sua distanza meridiana vera allo zenit, affetta cioè dall'aberrazione e nutazione, sotto il polo, e quale si ha dalla formula

$$\Delta' = 180^\circ - (L + D')$$

L rappresentando la latitudine e D' la declinazione apparente da me data e riferita nell' effemeridi di Milano 1830 alla pag. 114. dell' appendice: di modo che Δ' è presa, come D' al principio del 1828. Chiamata Δ'' la distanza meridiana vera di una stella australe allo zenit, e D'' la sua declinazion apparente, si ha

$$\Delta''=L+D''$$

Alle declinazioni australi del catalogo di Piazzi (1814) applicando la precessione, il moto proprio, l'aberrazione e nutazione, e tenuto conto anche del piccol termine della precessione relativo al quadrato del tempo, io ne composi i valori D'', dai quali ho formato quelli di Δ'' per l'epoca stessa del principio del 1828. Per ogni stella circompolare li numeri della 2.ª colonna, sotto il titolo di altezza ne' passaggi inferiori, sono gli archi letti del nonnio I del mio cerchio, presa riguardo ai minuti secondi la media delle letture dei quattro nonii, e fatte ai detti archi le correzioni sì del livello del circolo come dello zero o principio di numerazione. Altrettanto indicano i numeri della colonna medesima per le stelle australi ; se non che il nonnio I per queste , contandosi gli archi di altezza dal punto Nord dell' orizzonte , somministra le distanze allo zenit, ommessone il costante di 90.° che quelli contengono. Il principio di numerazione, prima di applicarlo, fu sempre da me riconosciuto e confermato per diverse osservazioni di alcune stelle, e talvolta pure coll'inversion dell' istromento; nè su di esso mi nascerebbe dubbio quasi non più che sopra il valor della latitudine. Ma le osservazioni eran poi da ridurre al principio del 1828 per confrontarle con Δ' e Δ'', e dedurne le rifrazioni. A questo fine calcolai e ho riportato nella terza colonna dei seguenti quadri le variazioni o differenze delle declinazioni fra l'epoca di ciascuna osservazione e il principio del 1828. Sia z la quantità dell'aberrazione e nutazion luni-solare, ovvero la differenza fra la declinazion media e l'apparente nella detta epoca di paragone.

Chiamata z' la simile quantità di aberrazione e nutazione per la data di una osservazione, con aggiuntavi la parte proporzionale della precessione e del moto proprio corrispondentemente all' intervallo fra questa data e quell' epoca, sarà $i - z$ la variazion accennata e da applicarsi, coi segni convenienti, all' osservazione di altezza o di distanza al vertice. Per le osservazioni successive o vicine di una medesima stella basta poi calcolar $z' - z$ coll' intervallo di dieci o quindici giorni e prenderne, come ho fatto, le parti proporzionali nell' epoche intermedie. Dall' applicare così i numeri della terza colonna a quelli della 2.ª risultano le distanze vere allo zenit osservate e poste nella 4.ª colonna, e le differenze fra queste e il valore di Δ' o di Δ'', per ogni stella rispettivamente, sono le rifrazioni esposte nella colonna quinta.

6. Ad ogni rifrazione osservata e vera ho scritto di fianco le notate quantità del barometro, del termometro a questo annesso, e del termometro esterno. Il barometro situato a canto al circolo e mantenuto ben verticale fu cangiato durante la serie delle osservazioni, al primo di *Grindel* avendone io sostituito uno appositamente costrutto da *Sgarbi*, macchinista della Specola. Coll' opportunità quindi che ebbi di confrontare li due barometri mi accorsi dell' errore di uno di essi, ed era il primo, in cui lo zero della scala e il segno del galleggiante più non si corrispondevano. Ad esserne vieppiù certo io mi procurai da Milano un campione di misura lineare, e rinnovati con esso i confronti, e corretto poscia il primo barometro ne ottenni il mio intento; poichè dopo la correzione i due barometri vanno benissimo d'accordo, nè sussiste altra differenza fra essi che quella della varia loro capillarità (*).

(*) Nota. Le scale dei miei barometri sono in pollici del piede di Parigi. Quello di Grindel, che ho adoperato fino al 17 Febbrajo 1829, ha il diametro interno della sua canna di linee 2,6. L' altro di Sgarbi, adoperato sempre dopo il detto giorno, ha la canna del diametro interno di linee 2,88. Alle quantità che riporterò di questi due barometri non è stata applicata la correzion capillare.

Nei termometri pure, dei quali mi son servito, riscontrai piccole differenze dai termini esatti della scala di *Reaumur*, e ne fissai la correzione di ognuno. Le indicazioni pertanto dei detti strumenti meteorologici, che nelle tavole ho riportate, sono già state ridotte al più giusto loro valore, con che le rifrazioni osservate rendonsi comparabili alle calcolate. E ninno cred'io giudicherà le diligenze in proposito eccessive o troppo minute al riflettere che, trattandosi di rifrazioni prossime all'orizzonte, ossia molto grandi, ogni sensibil divario di barometro e di termometro deve considerabilmente influire ne' confronti e nelle conclusioni.

7. Stimando che le rifrazioni accuratamente determinate pel clima di Milano possano ben convenire, attesa la vicinanza de' luoghi, alla mia situazione, ho preferito di confrontar con esse ciascuna delle analoghe quantità osservate; così nell'ultima colonna dei quadri esporrò le differenze fra l'osservazione e la tavola del Sig. Carlini, col segno + indicato l'eccesso della tavola e col segno — il difetto di essa dalla osservazion corrispondente. Di contro in fine ad ogni linea di osservazione, per le stelle meno alte nel meridiano e quindi più soggette all'influenza de' vapori, ho creduto utile di accennar brevemente lo stato dell'atmosfera mediante le iniziali *m*, *s*, *b*, *o* delle parole *male*, *sufficientemente*, *bene*, *ottimamente*, destinate ad esprimere le relative condizioni atmosferiche da me avvertite e conservate ne' miei registri originali. Tali condizioni mi apparivano dalla luce più o meno chiara delle stelle, dalla figura o grandezza loro sì o no alterata, e dall'attraversar che facevano più o meno tranquillamente il cannocchiale. Concorrendo tutti gl' indizii favorevoli così distinti, l'osservazione riputavasi ottima, e non poche volte la riconobbi tale anche nelle altezze minori di 1.° E quì poi all'attuale uso è manifesto un vantaggio del circolo meridiano; mentre il cannocchiale di esso tenendosi fisso alla stella, e questa in uno stato quieto di atmosfera dovendo scorrere orizzontalmente, se ne ha tosto la prova che ciò accada e quin-

di che sussista la condizion favorevole delle atmosferiche densità permanenti; dal vedere cioè la stella non uscir dal filo orizzontale, come nelle migliori osservazioni è stato sempre accertato che avveniva. In alcuna delle più belle notti le stelle all' orizzonte splendevano chiare e placide, quasi non altrimenti che osservate fossero vicine allo zenit.

8. Ora nel produrre gli ottenuti risultamenti debbo prevenire che nei lunghi e nojosi calcoli delle riduzioni eseguiti da un solo, nè riveduti, può essere sfuggito qualche errore, ad onta dell'attenzione che vi ho impiegata per non commetterne. Ma chiunque il voglia, o a cui prema, potrà senz' altro assicurarsene cogli elementi e processi di sopra dichiarati.

Nella colonna prima invece del nome di ogni stella osservata posi la rispettiva distanza apparente allo zenit; segue a lato di essa nella tavola il numero delle osservazioni corrispondentemente fatte; nella terza colonna ho registrati i medii delle surriferite e singole differenze per ogni stella fra la rifrazione osservata e la calcolata secondo la tavola del Sig. Carlini; è notata nella quarta colonna la massima oscillazion in più e in meno che riscontrasi fra le suddette singole differenze e il rispettivo medio per ogni stella, in modo che la somma delle due oscillazioni porge la variazion totale ottenuta nel confronto colla tavola di rifrazione per la medesima distanza allo zenit e nelle date circostanze atmosferiche; alla massima oscillazione in meno corrisponde nella colonna quinta il primo degli accennati mesi, e alla massima oscillazione in più il secondo; e finalmente la sesta colonna presenta, collo stess' ordine in riguardo alla doppia mentovata oscillazione, le ore delle corrispondenti osservazioni in tempo vero prossimamente, avendo io per tal fine considerate le osservazioni siccome instituite alla metà del mese in cui furono realmente fatte, e ciò per ottenere l'ora prossima speditamente in tutta la serie.

10. Ora è manifesto che i medii delle differenze fra l'osservazion e la tavola del Sig. *Carlini* procedono con qualche regolarità e similmente per le stelle boreali ed australi. Fino a due in tre gradi di altezza la rifrazion osservata eccede costantemente la calcolata e l'eccesso di quella su di questa è tanto più forte, quanto la piccola altezza è minore; ma dai tre ai dieci gradi di altezza la tavola poi supera inversamente l'osservazione di una quantità che sembra costante, però alquanto diversa nelle plaghe opposte Nord e Sud; ed è anzi a questo riguardo che ho detto procedere le differenze medie boreali ed australi similmente, non ugualmente. Le differenze positive maggiori al Sud che al Nord indicherebbero che ad uguale altezza la rifrazione è più debole nella prima che nella seconda plaga, e ciò confermerebbe l'analoga conclusio-

ne altre volte stabilita dal Sig. *Carlini* (*), non che il dubbio in genere su la diversità della rifrazione spettante alle due plaghe, quale movevalo pel primo l'astronomo *Cassini de Thury* negli atti dell'Accademia di Berlino 1773. E quì rifletto che ove tale diversità realmente sussista e come si è trovato, ne viene un' altra prova di fatto che lo stato igrometrico o la copia dei vapori acquosi dell'atmosfera non influisce nè influir può su la quantità della rifrazione, giusta quanto il celebre Laplace dimostrava. Li meridiani infatti delle due Specole di Milano e di Modena presentan cambiate ed alterne dall' una all' altra le circostanze de' vapori più o meno copiosi rispettivamente alle opposte plaghe suddette, distendendosi la valle per Milano al mezzogiorno e sorgendo le non lontane alpi a settentrione; laddove per Modena si distende la valle a settentrione, e s'innalza il terreno a mezzogiorno verso gli appennini. Quindi, se i vapori sensibilmente influissero ad alterar le quantità della rifrazione per le picciole altezze, le differenze nelle contrarie plaghe meridiane delle nostre Specole, a parità di altre circostanze, risultar dovrebbero di segno contrario, o non conformi almeno quali abbiam veduto che risultano. Al di sopra infine dei dieci gradi di altezza il picciol valore e il vario segno delle differenze medie fra l' osservazion e la tavola per le stelle boreali e avuto altresì riguardo al numero delle osservazioni, dimostrano che la tavola ossia la formula di rifrazione fino a questo limite rappresenta bene le quantità osservate, nel che gli astronomi sono tutti d'accordo. Se altrettanto non sembra potersi dire delle stelle aûstrali, convien tuttavia richiamarsi che le declinazioni di queste furon prese dal catalogo per l' epoca del 1800, e quindi che le dubbiezze dei piccioli moti proprii spiegar potrebbero in parte le differenze maggiori.

11. Passiamo a considerar le massime deviazioni delle singole dalle differenze medie. E primieramente notiamo che nel-

---

(*) (V. Appendice di Milano dell' anno 1808. pag. 56.)

le maggiori vicinanze all' orizzonte, ai mesi di temperatura più alta corrispondono le massime deviazioni in meno, e a quelli di bassa temperatura le massime deviazioni in più, così verso il Nord come al Sud, e qualunque d' altronde sia stata l' ora della notturna osservazione. Ciò vuol dire che le rifrazioni estive per la medesima altezza superano le jemali più di quello che importi la correzion termometrica della tavola; e già il Sig. *Carlini* avvertiva egli pure certe irregolarità un po' forti „ che forse dipendono da una diversità nella diminuzion del calore in inverno ed in estate „ (*). A poca differenza poi di temperatura, ma sempre per picciole altezze boreali o australi, la massima deviazione in meno cade nelle ore mattutine, e quella in più nelle ultime ore vespertine; onde se ne inferirebbe che a parità d'altre circostanze la rifrazion è più forte di buon mattino e innanzi l' alba che a tarda sera. Forse alla combinazione o ad una specie di compensamento delle circostanze estreme di temperatura e dell'ora è dovuta l' eguaglianza delle due deviazioni massime di α Auriga, per la quale stella circompolare il copioso numero delle osservazioni m' induce a credere che tali deviazioni siano appunto i limiti naturali e veri delle differenze colla tavola, e che la differenza media ottenuta fra questa e l' osservazione rappresenti con qualche precisione il difetto della prima, ossia della formula da cui essa è dedotta. Di quì si avrebbe la regola per accertarsi il meglio della quantità di media rifrazione osservata a picciolissima altezza, e sarebbe di desumerla da una coppia di buone osservazioni fatte a stagioni o temperature le più diverse, una di sera e l'altra di mattina. È importante dopo ciò, se mal non m'avviso, il mettere attenzione alla variazion totale delle singole dalle differenze medie, che è quanto dire alla somma delle deviazioni massime in meno e in più. Questa somma che giunge quasi a 2 d'arco presso l' orizzonte verso il Nord va scemando

---

(*) (Eff. cit. di Milano 1808. pag. 53. dell'app.)

ma poco sensibilmente al crescere dell'altezza ne' primi due gradi, oltre il qual termine offre una diminuzion rapida e come per salto. La discontinuità di un simile fenomeno sfugge per avventura ai nostri mezzi di rintracciarne la legge e sottometterla al calcolo: nulladimeno raccogliendone le osservazioni ed i risultati di più anni, pare a me che non sia fuor di speranza l' ottenerne un qualche più fondato criterio che faccia, empiricamente almeno, traveder la detta legge, alla quale come a cagione duopo è si congiunga quella dei cangiamenti della densità dell'aria per la varia diminuzion del calore negli strati atmosferici a elevazioni diverse. Il perseverare perciò in questo genere di determinazioni, scegliendo sempre e notandone le propizie circostanze di atmosfera, non può se non raccomandarsi allo zelo degli osservatori forniti de' grandi e migliori stromenti; e quindi pure ne inferirei che possa un giorno aversene il frutto di una cognizion sicura e più esatta su l' indicata diminuzion del calore, donde inversamente dipende, come è noto, il perfezionamento della teorica delle rifrazioni. Tali per lo meno sono le due vie che guidar possono a questo bramato perfezionamento; cioè ulteriori progressi della teorica del calore, che è la via diretta, e indirettamente le indaggini ulteriori su le quantità osservate della rifrazione a piccolissime altezze. Le stelle australi poi ci confermano anch'esse l'avvertita variazion totale delle singole dalle differenze medie di rifrazione, e ne troviam quasi l'eguale quantità per le due stelle *o*2 Cigno e *δ*1 Gru, australe questa e quella circompolare. Ma io insisto del rimanente su la necessità che simili confronti si raccolgano da più anni di osservazioni; poichè in una sola notte, comecchè l'aria sia creduta favorevolissima, possono emergere nelle varie altezze e dalle varie parti dell' orizzonte ineguaglianze e anomalie inesplicabili. Così mi avvenne per esempio la notte del 30 Ottobre 1829. durante la quale osservai parecchie stelle al Nord e al Sud, ma con forti discordanze ne' risultamenti, come dai quadri delle osservazioni apparisce.

Per le rifrazioni di Piazzi ho usato la tavola delle rifrazioni medie che il celebre Autore determinò appoggiandola interamente alle proprie osservazioni, e che trovasi nel libro V della *Specola astronomica di Palermo*. Chiamata x tale rifrazion media, b l'altezza del barometro in pollici inglesi, t il grado del termometro unito colla scala di *Fahrnheit*, ed r la rifrazione vera corrispondente, la formula di *Bradley* addottata da *Piazzi*, e che mi ha servito per l' attuale confronto è

$$r = \frac{x.\ b.\ 400}{29{,}6(350+t)}$$

Le rifrazioni secondo il *Delambre* mi sono state somministrate dalla tavola pubblicatane fra quelle del Burò delle longitudini. Ho riprodotto poscia il confronto colla tavola di *Carlini* onde offerirne il paralello colle altre tavole per le medesime osservazioni. Segue il confronto colla tavola di *Bessel* nella sullodata opera *Astronomiae Fundamenta;* e per le stelle all'orizzonte più vicine, sì boreali che australi, ho voluto confrontar eziandio le rifrazioni osservate con quelle ulteriormente date dal medesimo astronomo nella VII *Abtheilung* delle sue osservazioni, ed espresse dalla formula

$$r=\rho.1{,}003282\left[\frac{b}{333{,}28}\cdot\frac{5550+10}{5550+10}\cdot\frac{53700+\tau'}{53700+10}\right]^{A}\left[\frac{180+16{,}75.0{,}36438}{180+(f-32)0{,}36438}\right]^{\lambda}$$

ove le quantità ρ, A, e λ sono prese dalla tavola dei *Fondamenti*, b è l' altezza del barometro in linee di Parigi, τ' il termometro unito a scala centigrada, f il termometro esterno a scala di Fahrnheit; ed il coefficiente 5550 essendo poi stato introdotto ed ammesso dall' autore in seguito di alcune sperienze de' Signori *Dulong* e *Petit*. Dai commentarii astronomici del ch. *Brioschi* T. I. parte 1.^{a} pag. 150-51 ho ricavato il confronto della penultima colonna, e quello dell' ultima proviene dalle rifrazioni che ho calcolato col metodo e sulla tavola dell' illustre Sig. *Jvory* nelle *Transactions Philosophical* del 1823. parte 2.^{a} pag. 491.

13. Ebbi riguardo nel paragone or ora istituito di scegliere le osservazioni credute le migliori, e per ogni stella o distanza allo zenit ne scelsi avvedutamente una coppia che presentasse notabili differenze di temperatura fra l'una e l'altra di esse. All'ispezione pertanto dei confronti ottenuti si rileva: 1.° che nelle picciolissime altezze al Nord ed in estate le varie tavole danno tutte il valor della rifrazione al di sotto del vero, qual più qual meno, eccettuata solamente l'ultima calcolata formula di *Bessel*, che appunto nelle temperature alte sembra ben accordarsi colla osservazione: 2.° che al Sud nelle analoghe circostanze le tavole superano al contrario il valor osservato, comparativamente almeno dalle alte alle basse temperature e coll' eccezione medesima della formula di *Bessel*: 3.° che in tutte le tavole o formule contemplate passa una forte diversità coll' osservazione, e sempre nel senso medesimo, per le temperature anche più differenti e sino alle più picciole altezze: 4.° che fra gli estremi considerati della temperatura in ciascuna coppia delle trovate differenze la tavola e quindi la formula di *Bessel* nei *fondamenti* rappresenta per un medio le rifrazioni osservate meglio di ogni altra, così al Nord come al Sud, e nelle stesse maggiori vicinanze all' orizzonte: 5.° che le tavole e quindi le formule della rifrazione secondo li Signori *Brioschi* ed *Jvory* si accordan bene e quasi esattamente coll' anzidetta di *Bessel* al di sopra di due gradi e mezzo di altezza, ma se ne discostano fortemente ed ugualmente nelle altezze minori: 6.° che per le distanze allo zenit minori di 80.° le moderne tavole rappresentan tutte ugualmente bene le rifrazioni osservate, come sapevasi e abbiam già ricordato. Anche il lodato Sig. prof. *Plana* avvertiva nella sopracitata sua Memoria congiunta alle osservazioni di Torino, che la piccola divergenza delle varie formole di rifrazione propriamente non si fa sentire se non al di là di 80.° di distanza allo zenit, e spiegava poi ottimamente come tali diverse formule possano ugualmente rappresentar le rifrazioni osservate. „ Variando, egli dice, le ipotesi su

Tavola I.

RIFRAZIONI OSSERVATE

STELLE CIRCOMPOLARI

Ψ Orsa maggiore Δ' = 89.° 55'. 40", 54

Mesi e giorni	Altezza ne' passaggi infer.	Variaz. in decl.	Distanza allo Zen. al principio del 1828	Rifrazione osservata	Barom.	Termometro		Tav. di Carl.	
						unito	esterno		
1828. Ott. 7.	0.°32'.27",80	— 0",40	89.° 27'.32",60	28', 7",84	28P. 1',03	+15°,0	+15°,1	—156",9	*m.*
10.	8, 38	+ 0, 58	27. 51, 04	27. 49, 50	28. 4, 18	+14, 0	+14, 2	—108, 0	*m.*
15.	15, 57	+ 2, 33	27. 42, 10	27. 58, 44	28. 0, 60	+11, 9	+11, 9	—101, 7	*s.*
Dic. 5.	35. 26, 61	+14, 59	24. 18, 80	31. 21, 74	28. 3, 77	+ 2, 5	+ 2, 5	—171, 6	*m.*
1829. Agos. 22	32. 22, 23	+ 5, 43	27. 32, 34	28. 8, 20	28, 2, 75	+18, 2	+18, 5	—197, 1	*b.*
Ottob. 10.	32. 36, 02	+18, 04	27. 5, 94	28. 34, 60	28. 4, 60	+10, 6	+11, 0	—109, 5	*s.*
30.	32. 15, 14	+23, 48	27. 21, 38	28. 19, 16	28. 2, 20	+ 7, 4	+ 7, 6	— 59, 0	*o.*
Nov. 14.	33. 50, 83	+27, 27	25. 41, 90	29. 58, 54	28. 2, 55	+ 5, 6	+ 5, 9	—137, 3	*s.*

λ Andromeda Δ' = 89.° 49'. 10", 55

1829. Marzo 7.	0.°38'.39",67	— 3",52	89.°21'. 23",85	27'.46",70	27. 11, 35	+ 4, 0	+ 4, 0	— 30",0	*m.*
Aprile 11.	37. 24, 19	+ 3, 54	22. 32, 27	26. 38, 28	27. 11, 10	+10, 7	+11, 2	— 54, 6	*b.*
20.	37. 38, 23	+ 4, 63	22. 17, 14	26. 53, 41	28. 0, 45	+12, 3	+12, 5	— 83, 5	*b.*
23.	37. 14, 97	+ 5, 00	22. 40, 03	26. 30, 52	28. 0, 10	+13, 1	+13, 4	— 71, 5	*s.*

α Auriga Δ' = 89.° 32'. 25", 19.

1828. Marzo 11.	0.°53'.23",74	— 4",84	89.° 6'.41",10	25'.44",09	28. 2, 35	+ 6, 3	+ 4, 7	— 18",6	*m.*
Aprile 29.	52. 55, 59	+ 0, 12	7. 4, 29	25, 20, 90	28. 4, 60	+12, 7	+12, 7	— 79, 5	*s.*
Magg. 25.	51. 53, 83	+ 3, 49	8. 2, 68	24. 22, 51	28. 1, 18	+16, 5	+16, 1	— 70, 0	*s.*
Giugno 5.	51. 53, 68	+ 5, 22	8. 1, 10	24. 24, 09	27. 11, 35	+19, 0	+19, 0	—113, 1	*m.*
6.	51. 22, 00	+ 5, 41	8. 32, 59	23. 52, 60	27. 11, 43	+18, 8	+18, 6	— 73, 6	*s.*
8.	51. 49, 29	+ 5, 72	8. 4, 99	24. 20, 20	28. 1, 60	+17, 7	+17, 5	— 82, 0	*b.*
10.	51. 30, 30	+ 6, 01	8. 23, 69	24. 1, 50	28. 2, 60	+17, 1	+17, 1	— 52, 8	*m.*
19.	51. 12, 00	+ 7, 39	8. 40, 61	23. 44, 58	28. 3, 27	+20, 3	+20, 3	— 68, 8	*s.*
Luglio 3.	50. 58, 50	+ 8, 70	8. 52, 80	23. 32, 39	28. 1, 27	+21, 6	+20, 7	— 68, 1	*b.*
5.	50, 45, 28	+ 8, 87	9. 5, 85	23. 19, 34	28. 1, 03	+22, 3	+21, 9	— 78, 7	*s.*
9.	50. 48, 27	+ 8, 98	9. 2, 75	23. 22, 44	28. 0, 18	+23, 1	+23, 2	— 90, 3	*s.*
16.	51. 23, 22	+ 9, 27	8. 27, 51	23. 57, 68	27. 11, 10	+19, 5	+19, 7	— 87, 6	*b.*
17.	50. 35, 87	+ 9, 31	9. 14, 82	23. 10, 37	28. 0, 27	+20, 8	+20, 9	— 50, 6	*m.*
30.	51. 11, 85	+ 9, 97	8. 38, 18	23. 47, 01	27. 11. 27	+19, 1	+18, 7	— 69, 4	*b.*
31.	50. 46, 94	+10, 02	9. 3, 04	23. 22, 15	28. 0, 77	+19, 3	+19, 0	— 39, 3	*b.*
Agosto 1.	50. 57, 61	+10, 07	8. 52, 32	23. 32, 87	28. 1, 18	+20, 6	+20, 3	— 64, 3	*s.*
1829. Marzo 19.	53. 46, 45	— 7, 03	6. 20, 58	26. 4, 61	28. 1, 05	+ 5, 1	+ 5, 3	— 54, 7	*b.*
Aprile 11.	53. 3, 05	— 5, 92	7. 2, 87	25. 22, 32	27. 8. 85	+ 8, 7	+ 9, 0	— 72, 0	*s.*
25.	52. 24, 77	— 4, 20	7. 39. 43	24. 45, 76	28. 0, 90	+13, 0	+13, 1	— 61, 4	*s.*
Maggio 13.	51. 54, 04	— 1, 22	8. 7, 18	24. 18, 01	27. 11, 75	+14, 4	+14, 6	— 53, 5	*s.*
Giugno 1.	51. 34, 28	+ 1, 42	8. 24, 30	24. 0, 89	28. 0, 80	+16, 7	+16, 7	— 54, 8	*s.*
6.	52. 40, 81	+ 2, 19	7. 17, 00	25. 8, 19	27, 11, 60	+13, 4	+13, 5	— 96, 4	*m.*
10.	51, 37, 43	+ 2, 56	8. 20, 01	24. 5, 18	28. 2, 15	+14, 8	+15, 1	— 34, 9	*b.*
14.	52. 0, 63	+ 3, 05	7. 56, 32	24. 28, 87	28. 3, 55	+16, 2	+15, 9	— 64, 4	*m.*
15.	51, 53, 81	+ 3, 17	8. 3, 02	24. 22, 17	28. 3, 00	+17, 4	+17, 2	— 74, 8	*b.*
19.	52. 9, 62	+ 3, 66	7. 46, 72	24 38, 47	28. 1, 15	+16, 7	+16, 5	— 92, 2	*s.*
20.	51, 37, 26	+ 3, 78	8. 18, 96	24. 6, 23	28. 0, 40	+17, 3	+17, 5	— 71, 6	*s.*
22.	51. 50, 48	+ 3, 95	8. 5, 57	24. 19, 62	28. 1, 75	+17, 4	+17, 2	— 77, 3	*b.*
29.	51. 53, 58	+ 4, 75	8. 1, 67	24. 23, 52	27. 11, 20	+17, 0	+16, 4	— 82, 1	*o.*
Luglio 4.	51. 18, 70	+ 5, 10	8. 36, 20	23. 48, 99	28. 0, 50	+20, 7	+21, 1	— 94, 3	*s.*
6.	51. 26, 69	+ 5, 28	8. 28, 03	23. 57, 16	28. 0, 95	+20, 7	+20, 3	— 91, 8	*m.*
7.	51. 34, 00	+ 5, 39	8. 20, 61	24. 4. 58	28. 1, 20	+20, 5	+20, 0	— 96, 1	*o.*
10.	50. 55, 55	+ 5. 62	8. 58, 83	23. 26. 36	27. 11, 30	+20, 2	+20, 3	— 65, 3	*o.*
12	51. 28, 77	+ 5, 74	8. 25, 40	23. 59, 70	27. 11, 35	+19, 6	+19, 6	— 93, 4	*b.*
13.	50. 36, 77	+ 5, 81	9. 17, 42	23. 7, 77	28. 1. 80	+21, 0	+21, 5	— 48, 4	*b.*
14.	50. 53, 34	+ 5, 89	9. 0, 77	23. 24, 42	28. 2, 70	+21, 7	+21, 9	— 67, 3	*o.*
15.	50. 49, 90	+ 5, 96	9. 4, 14	23. 21, 05	28. 2, 40	+22, 7	+23, 1	— 78, 5	*b.*
21.	52. 0, 47	+ 6, 32	7. 53, 21	24. 31, 98	28. 2, 95	+19, 8	+19, 7	—113, 7	*b.*
22.	51. 45, 01	+ 6, 37	8. 8, 62	24. 16, 57	28. 3, 75	+19, 7	+19, 0	— 86, 9	*s.*
23.	51. 3, 42	+ 6, 41	8. 50, 17	23. 35, 02	28. 2, 40	+20, 5	+20, 1	— 59, 0	*s.*
25.	51. 3, 57	+ 6, 51	8. 49. 92	23, 35, 27	28 2, 35	+21, 8	+21, 9	— 80, 6	*b.*
29.	51. 3, 36	+ 6, 70	8. 49, 94	23. 35, 25	28. 0, 35	+19, 8	+19, 2	— 57, 9	*b.*
31.	50. 54, 14	+ 6, 76	8. 59, 10	23. 26, 09	28. 1. 00	+19, 9	+19, 8	— 51, 8	*b.*

l Ercole. Δ' = 89.° 14'.56",59 *Tavola II.*

Mesi e giorni	Altezza ne' passaggi inf.	Variaz. in decl.	Distanza allo Zen. al principio del 1828	Rifrazione osservata	Barom.	Termometro		Tav. di Carl.	
						unito	esterno		
1828. Dic. 5.	1.°10'.12",11	— 7",75	88.°49'.55",64	25'. 0",95	28.^{p} 4.^{l}10	+ 1.°9	+ 2.°3	— 59",7	o.
1829. Genn. 9.	9. 17, 53	+ 4, 09	50. 38, 38	24. 18, 21	27. 9. 18	+ 0, 8	+ 1, 2	— 29, 0	m.
25.	9. 38, 44	+ 8, 91	50. 12, 65	24. 43, 94	27. 10, 65	+ 1, 3	+ 1, 0	— 52, 1	s.
Febb. 23.	8. 4, 44	+15, 01	51. 40, 55	23. 16, 04	27. 8, 60	+ 3, 4	+ 3, 9	+ 8, 4	b.
26.	7. 56, 96	+15, 30	51. 47, 74	23. 8, 85	28. 1, 50	+ 5, 6	+ 6, 5	+ 8, 9	s.
Marzo 7.	7. 50, 60	+16, 17	51. 53, 23	23. 3, 36	27. 11, 30	+ 5, 3	+ 6, 5	+ 6, 0	b.
Ott. 30.	9. 40, 38	—15, 90	50, 35, 52	24. 21, 07	28. 1, 45	+ 6, 8	+ 7, 2	— 78, 9	s.

o 2 Cigno Δ' = 89.° 7'. 30', 42

1828. Dic. 5.	1.°16'.54",73	—16",84	88.°43'.22",11	24'. 8",31	28 4. 05	+ 2,°0	+ 2.°2	— 50",2	o.
1829. Febb. 23.	15. 25, 14	+ 5. 53	44. 29, 33	23. 1, 09	27. 9, 00	+ 3. 3	+ 3, 5	— 17, 4	o.
Marzo 7.	14. 41, 03	+ 8, 12	45. 10, 85	22. 19, 57	27. 11, 45	+ 4, 7	+ 5, 1	+ 22, 1	b.
18.	14. 42, 65	+ 9, 87	45. 7, 48	22. 22, 94	28. 0, 50	+ 6, 6	+ 7, 1	+ 2, 5	o.

7 Ercole Δ' = 88.° 37'. 34", 74

1828. Febb. 5.	1. 42'.24",46	+ 9",37	88.° 17'.26",17	20'. 8",57	28. 3, 77	+ 3.°6	+ 1°.8	— 3",2	m.
Dic. 2.	43. 21, 15	— 2, 64	16. 41, 49	20. 53, 25	28. 4, 93	+ 2, 2	+ 2, 6	— 15, 4	s.
5.	43. 26, 46	— 1, 62	16. 35, 16	20. 59, 58	28, 4, 18	+ 2, 1	+ 2, 4	— 23, 4	o.
1829. Genn. 3.	43. 14, 24	+ 8, 21	16. 37, 56	20. 57, 18	27. 10, 18	+ 1, 5	+ 1, 8	— 37, 3	s.
9.	42. 48, 67	+ 9, 96	17. 1, 37	20. 33, 37	27. 9, 10	+ 1, 0	+ 1, 4	— 12, 0	b.
16	43. 17, 04	+12, 01	16. 30, 95	21. 3, 79	27. 8, 93	+ 0, 6	+ 1, 0	— 42, 2	s.
25.	42. 39, 14	+14, 05	17. 6, 81	20. 27, 93	27. 9, 85	+ 1, 3	+ 1. 0	— 0, 0	b.
Febb. 2.	42. 39, 01	+15, 87	17. 5, 12	20. 29, 62	28. 3, 52	+ 1, 8	+ 2, 1	+ 9, 7	b.
3.	43. 20, 09	+16, 01	16. 23, 90	21. 10, 84	28. 3, 68	+ 1, 0	+ 1, 3	— 27, 7	s.
5.	43. 15, 99	+16, 30	16. 27, 71	21. 7, 03	28. 1, 77	— 0, 4	+ 0, 2	— 21, 6	s.
12.	43. 18, 19	+17, 30	16. 24, 51	21. 10, 23	28. 1, 43	— 1, 4	— 0, 7	— 18, 6	b.
16.	42. 30, 02	+17, 87	17. 12, 11	20. 22, 63	28. 1, 93	+ 0, 5	+ 1, 0	+ 20, 6	s.
Ottob. 30.	42. 55, 02	+ 4, 28	17. 0, 70	20. 34, 04	28. 1, 75	+ 7, 1	+ 7, 4	— 45, 6	o.

λ Boote Δ' = 88.° 28'. 28", 60

1828. Dic. 2.	1.°51'. 9",68	+ 5",83	88.° 8'.44",49	19'.44",61	28. 4. 18	+ 2.°8	+ 3°,2	+ 4",1	m.
5.	51. 21, 58	+ 6, 81	8. 31, 61	19. 56, 99	28. 4. 02	+ 2, 4	+ 2, 5	— 5, 4	o.
6.	51. 12, 85	+ 7, 13	8. 40, 02	19. 48, 58	28. 4, 27	+ 3, 1	+ 3, 4	+ 2, 5	b.
10.	50. 31, 95	+ 8, 43	9. 19, 62	19. 8, 98	28. 4, 68	+ 4. 6	+ 4, 7	+ 31, 6	s.
1829. Genn. 3.	50, 40, 66	+15, 00	9. 4, 34	19. 24, 26	27. 10, 02	+ 1, 8	+ 2, 0	+ 13, 1	s.
9.	50, 51, 73	+16, 18	8. 52, 09	19. 36, 51	27. 9, 10	+ 1, 6	+ 1. 8	— 1, 7	b.
16.	51, 8, 73	+17, 56	8. 33, 71	19. 54, 89	27. 8, 52	+ 0, 9	+ 1, 1	— 17, 9	s.
Ottob. 12	50. 33, 45	+ 3. 08	9. 23, 47	19. 5, 13	28. 3, 60	+10, 2	+ 9, 9	— 7, 9	s.
30.	50. 52, 13	+ 8, 89	8. 58, 98	19. 29. 62	28. 2, 00	+ 7, 7	+ 8, 0	— 25, 4	o.
Nov. 10.	50. 46, 75	+12, 67	9. 0, 58	19. 28, 02	28. 3, 10	+ 7, 6	+ 7, 9	— 19, 4	b.
21.	51. 59, 86	+16, 45	7. 43, 69	20, 44. 91	28. 4, 65	+ 1. 1	+ 1, 3	— 45. 2	s.

δ Perseo Δ' = 88.° 7'. 18", 79.

1829. Giug. 14	2.° 9.'13",06	+ 3",66	87.° 50'.43",28	16.'35",51	28. 3, 50	+16.°6	+16.°7	+ 11",6	s.
15.	9. 4, 42	+ 3, 71	50. 51, 87	16. 26, 92	28. 3, 10	+17, 8	+18, 0	+ 11. 3	s.
19.	9. 22, 66	+ 3, 91	50. 33, 43	16. 45, 36	28, 1, 05	+17. 4	+17, 5	— 11, 8	s.
20.	9. 8, 05	+ 3, 96	50. 47, 99	16. 30, 80	28, 0, 40	+17, 7	+17, 7	+ 0, 9	m.
22.	9. 16, 34	+ 4, 05	50. 39, 61	16. 39, 18	28. 1, 70	+17, 8	+17, 6	— 3, 6	b.
24.	9. 6, 56	+ 4, 15	50. 49, 29	16. 29, 50	28. 2, 50	+19, 3	+19, 0	+ 0, 5	s.
29.	9. 19, 03	+ 4, 39	50. 36. 58	16. 42, 21	27. 11, 20	+17, 1	+16, 9	— 10, 7	b.
30.	8. 59. 54	+ 4, 40	50, 56, 06	16. 22, 73	28. 0, 50	+17, 9	+18, 0	+ 8, 1	s.
Luglio 1.	9. 4. 37	+ 4, 41	50. 51, 22	16. 27, 57	28. 1, 10	+18, 8	+19, 5	— 5, 0	s.
4.	8. 57, 59	+ 4, 43	50, 57, 98	16. 20, 81	28. 0, 45	+21, 3	+21. 4	— 11, 7	m.
5.	8. 55, 85	+ 4, 44	50. 59, 71	16. 19, 08	27. 11, 60	+21, 5	+21, 6	— 13, 4	m.
7.	8. 56, 91	+ 4, 45	50, 58, 64	16. 20, 15	28. 1, 25	+21, 3	+20, 7	— 3, 9	b.
8.	8. 54, 51	+ 4, 46	51. 1, 03	16. 17, 76	27. 11, 70	+21, 8	+21, 5	— 11, 0	s.
10.	8. 46, 26	+ 4, 47	51. 9, 27	16. 9, 52	27, 11. 05	+20, 7	+21, 0	— 1, 2	s.
12.	8. 55, 69	+ 4, 48	50. 59, 83	16. 18, 96	27. 11, 10	+19, 7	+19, 9	— 4, 4	s.
13.	8. 40, 26	+ 4, 49	51. 15, 25	16. 3, 54	28. 1, 50	+21, 3	+22, 0	+ 6, 7	s.

Mesi e giorni	Alte ne' pa inf
1828. Febb. 6.	2.°40'.
Magg. 25.	38.
Giugno 2.	38. .

r' Andromeda Δ'= 87.° 35'. 41", 92.

Mesi e giorni	Altezza ne' passaggi infer.	Variaz. in decl.	Distanza allo Zen. al principio del 1828	Rifrazione osservata	Barom.	Termometro		Tav: di Carl.	
						unito	esterno		
1828. Febb. 6.	2.°40'.31",60	+ 2",24	87.° 19'.26",16	16'.15",76	28.^{p} 3^{l},85	+ 2.°1	— 0°,5	+ 16".4	*m.*
Magg. 25.	38. 58, 64	+20, 57	20. 40, 79	15. 1, 13	28. 1, 10	+16, 7	+16, 6	— 9, 4	*s.*
Giugno 2.	38. 42, 95	+20, 62	20. 56, 43	14. 45, 49	28. 2. 27	+17, 9	+17, 4	+ 6, 1	*s.*
3.	38. 39, 05	+20, 62	21. 0, 33	14. 41, 59	28. 1, 18	+19, 0	+18, 9	— 0, 7	*s.*
5.	38. 17, 33	+20, 64	21, 22, 03	14. 19, 89	27, 11, 18	+19, 6	+19, 6	+ 13, 2	*s.*
6.	38. 37, 99	+20, 65	21, 1, 36	14. 40, 56	27, 11, 35	+19, 4	+19, 2	— 6, 1	*m.*
1829. Apr. 24.	39. 17, 85	+ 0, 43	20, 41, 72	15, 0, 20	28. 0, 95	+13, 5	+14, 0	+ 5, 1	*b.*
25.	39. 13, 21	+ 0, 59	20. 46, 20	14. 55, 72	28. 0, 55	+14, 9	+15, 3	+ 1, 6	*s.*
Maggio 8.	39. 20, 12	+ 2, 71	20. 37, 17	15. 4, 75	28. 2, 30	+14, 1	+14, 2	+ 2, 9	*s.*
12.	39. 19, 15	+ 3, 36	20. 37, 49	15. 4, 43	27. 11, 20	+13, 7	+13, 9	— 3, 6	*b.*
23.	39. 16, 33	+ 4, 16	20. 39, 51	15. 2, 41	28. 2, 60	+14, 7	+14, 9	+ 2, 5	*m.*
29.	39. 1, 74	+ 4, 60	20. 53, 66	14. 48, 26	27. 11, 95	+14, 8	+15, 1	+ 8, 5	*b.*
Giugno 2	38. 57, 47	+ 4, 60	20. 57, 93	14. 43, 99	28. 1, 50	+17, 4	+17, 9	+ 2, 4	*b.*
5.	38. 27, 47	+ 4, 60	21. 27, 93	14. 13, 99	27. 8, 10	+19, 4	+19, 7	+ 9, 7	*m.*
10.	38. 44, 72	+ 4, 59	21. 10, 69	14. 31, 23	28. 1, 50	+15, 5	+15, 9	+ 26, 4	*s.*

ϑ Perseo Δ'= 86.° 51'. 20", 33.

1828. Febb. 6.	3.°22'.37",84	— 1",82	86.° 37'.23",98	13'.56",35	28. 3, 85	+ 2°,0	— 0,°7	— 21",3	*m.*
1829. Magg. 29.	21. 28, 65	+ 3, 47	38. 27, 88	12. 52, 45	27. 11, 90	+14, 7	+15, 0	+ 0, 5	*b.*
30.	21. 15, 93	+ 3, 43	38, 40, 54	12. 39. 79	27. 9, 70	+16, 2	+16, 3	+ 2, 4	*s.*
Giug. 14.	21. 12, 91	+ 4, 41	38. 42, 68	12. 37, 65	28. 3, 50	+17, 2	+17, 5	+ 12, 7	*b.*
15.	21. 13, 76	+ 4, 43	38. 41, 81	12. 38, 52	28. 3, 10	+18, 1	+18, 2	+ 8, 1	*b.*
19.	21. 16, 50	+ 4, 51	38. 38, 99	12. 41, 34	28. 1, 00	+17, 9	+17, 9	+ 1, 7	*o.*
21.	21. 15, 16	+ 4, 54	38. 40, 30	12. 40, 03	28. 1, 25	+18, 8	+18, 7	+ 0, 2	*s.*
22.	21. 16, 44	+ 4, 56	38. 39, 00	12. 41, 33	28. 1, 70	+18, 2	+17. 8	+ 3, 7	*b.*

l Orsa maggiore Δ'= 86.° 38'. 49",00.

1828. Sett. 17.	3.°33'.44",50	+ 3",67	86.° 26'.11",83	12'.37",17	28. 4, 43	+14, 7	+14 ,6	— 3",9	*m.*
24.	26, 58	+ 5, 00	28, 42	20, 58	28. 3, 27	+15, 9	+15, 9	+ 6, 2	*b.*
25.	23, 60	+ 5, 19	31, 21	17, 79	28. 3, 35	+16, 3	+16, 0	+ 7, 9	*b.*
26.	15, 97	+ 5, 38	38, 65	10, 35	28. 3, 10	+17, 1	+17, 1	+ 10, 5	*s.*
30.	15, 61	+ 6, 14	38, 25	10, 75	28. 1, 35	+16, 6	+16, 3	+ 9, 5	*b.*
Ottob. 1.	10, 77	+ 6, 33	42, 90	6, 10	28. 0, 93	+17, 0	+16, 8	+ 9, 9	*s.*
7.	17, 37	+ 7, 47	35, 16	13, 84	28. 0, 85	+15, 6	+15, 0	+ 10, 7	*b.*
10.	29, 01	+ 7, 98	23, 01	25, 99	28. 3, 77	+14, 4	+14, 5	+ 6, 7	*s.*
11.	24, 19	+ 8, 14	27, 67	21, 33	28. 4, 10	+14, 4	+14, 5	+ 12, 4	*s.*
12.	31, 89	+ 8, 31	19, 86	29, 20	28. 4, 60	+14, 0	+14, 0	+ 7, 2	*b.*
15.	40, 77	+ 8, 80	10, 43	38, 57	28. 0, 02	+12, 5	+12, 5	— 6, 5	*m.*
20.	41, 91	+ 9, 62	8, 47	40, 53	28. 5, 43	+11, 3	+11, 2	+ 9, 3	*o.*
22.	28, 51	+ 9, 94	21, 55	27, 45	28. 4, 35	+12, 2	+12, 4	+ 15, 1	*b.*
31.	34. 0, 52	+11, 14	25. 48, 34	13. 0, 66	28. 0, 27	+ 7, 4	+ 7, 4	— 4, 0	*b.*
Nov. 1.	33. 55, 24	+11, 27	53, 49	12. 55, 51	28. 0, 27	+ 7, 3	+ 7, 4	+ 0, 7	*s.*
3.	46, 95	+11, 54	26. 1, 51	47, 49	28. 3, 35	+ 7, 1	+ 7, 5	+ 13, 4	*o.*
4.	51, 96	+11, 67	25. 56, 37	52, 63	28. 3, 35	+ 7, 0	+ 7, 1	+ 9, 8	*s.*
5.	34. 4, 55	+11, 81	43, 64	13. 5, 36	28. 5, 27	+ 5, 9	+ 6, 0	+ 5, 9	*b.*
6.	8, 93	+11, 94	39, 13	9, 87	28. 4, 93	+ 5, 3	+ 5, 3	+ 3, 6	*m.*
17.	33. 22, 86	+13, 56	26. 23, 58	12. 25, 42	28. 0, 52	+11, 0	+11, 1	+ 14, 4	*b.*
1829. Lug. 19.	12, 03	+ 3, 62	44, 35	4, 65	27, 11, 80	+21, 3	+20, 5	— 4, 7	*m.*
21.	39, 47	+ 4, 00	16, 53	32, 47	28. 3, 70	+18, 2	+17, 6	— 14, 0	*m.*
23.	22, 02	+ 4, 38	33, 60	15, 40	28. 2, 40	+19, 8	+20, 0	— 7, 6	*b.*
24.	25, 11	+ 4, 56	30, 33	18, 67	28. 2, 25	+20, 7	+20, 5	— 13, 2	*b.*
25.	15, 54	+ 4, 75	39, 71	9, 29	28. 2, 45	+21, 4	+21, 5	— 7, 5	*o.*
29.	11, 21	+ 5, 49	43, 30	5, 70	28. 0, 35	+19, 2	+19, 0	+ 1, 5	*b.*
31.	17, 44	+ 5, 87	36, 69	12, 31	28. 1, 45	+19, 2	+18, 8	— 2, 0	*s.*
Agosto 2.	22, 42	+ 6, 27	31, 31	17, 69	28. 3, 60	+18, 6	+18, 5	— 1, 3	*b.*
14.	6, 78	+ 8, 70	44, 52	4, 48	27. 11, 60	+21, 3	+20, 7	— 5, 7	*s.*
15.	0, 33	+ 8, 90	50, 77	11. 58, 23	27. 11, 30	+19, 7	+19, 6	+ 4, 2	*b.*
26.	31, 88	+11, 07	17, 05	12. 31, 95	28. 3, 25	+16, 8	+16, 9	— 9, 9	*b.*
Sett. 1.	16, 74	+12, 34	30, 92	18, 08	27. 11, 95	+16, 4	+16, 4	— 1, 4	*m.*
4.	21, 31	+12, 97	25, 72	13, 28	28. 2, 20	+16, 7	+16, 5	+ 8, 1	*o.*
15.	10, 49	+15, 29	34, 22	14, 78	28. 1, 60	+16, 9	+17, 1	+ 2, 7	*o.*
Ottob. 5.	10, 86	+19, 29	29, 85	19, 15	27. 11, 75	+14, 7	+14, 8	+ 3, 7	*s.*
Nov. 10.	37, 64	+24, 29	25. 58, 07	50, 93	28. 3, 10	+ 8, 4	+ 8, 6	+ 5, 9	*o.*
19.	34. 3, 66	+25, 28	31, 06	13. 17, 94	28. 2, 75	+ 3, 1	+ 3, 6	+ 0, 3	*s.*
20.	4, 38	+25, 39	30, 23	18, 77	28. 3. 45	+ 2, 5	+ 2, 8	+ 4. 7	*o.*

Tavola. IV.

X. Orsa maggiore Δ'= 86.° 37.' 31", 05.

Mesi e giorni	Altezza ne' passaggi infer.	Variaz. in decl.	Distanza allo Zen. al principio del 1828	Rifrazione osservata	Barom.	Termometro		Tav. di Carl.	
						unito	esterno		
1828. Nov. 1.	3.°35'.28",86	+ 5",31	86.° 24'.25",83	13'. 5",22	28.p 1l,68	+ 6.°7	+ 7.°1	— 11",3	*m.*
17.	34. 57, 57	+ 9, 79	52, 64	12. 38, 41	28. 1, 18	+ 9, 7	+10, 0	+ 1, 8	*s.*
23.	35. 13, 96	+11, 26	34, 78	56, 27	28. 2, 35	+ 6, 5	+ 6, 9	— 0, 2	*s.*
Dic. 2.	33, 43	+13, 46	13, 11	13. 17, 94	28. 3, 10	+ 3, 7	+ 3, 8	— 6, 3	*m.*
3.	43, 59	+13, 64	2, 77	28, 28	28. 6, 18	+ 1, 5	+ 1, 6	+ 0, 6	*m.*
5.	15, 82	+14, 01	30, 17	0, 88	28. 3, 85	+ 2, 5	+ 2, 6	+ 17, 9	*b.*
6.	17, 98	+14, 19	27, 83	3, 22	28. 4, 27	+ 3, 5	+ 3, 7	+ 11, 7	*b.*
10.	14, 12	+14, 92	30, 96	0, 09	28. 4, 60	+ 5, 0	+ 5, 1	+ 9, 4	*b.*
15.	26, 08	+15, 84	18, 08	12, 97	28. 3, 18	+ 2, 4	+ 2, 5	+ 4, 7	*s.*
19.	4, 30	+16, 57	39, 13	12. 51, 92	28. 0, 68	+ 2, 7	+ 3, 3	+ 16, 3	*m.*
30.	5, 02	+17, 74	37, 24	53, 81	28. 3, 68	+ 5, 5	+ 5, 4	+ 12, 2	*b.*
1829. Genn. 3.	0, 52	+18, 16	41, 32	49, 73	27. 9. 85	+ 1, 9	+ 2, 2	+ 16, 8	*s.*

α Perseo Δ'= 86.° 6,. 34", 76.

1828. Genn. 26.	4.° 6. 0",42	— 1',97	85.° 54'. 1",55	12'.33',21	28. 5, 18	+ 2, 6	— 3, 0	— 1",8	*m.*
Febb. 6.	5. 32, 09	— 3, 78	31, 69	3, 07	28. 3, 77	+ 1, 9	— 1, 1	+ 18, 4	*m.*

141. Lucerta Δ'= 85.° 56'. 47", 67.

1827. Nov. 28.	4.°14'.53",24	— 3",03	85.°45'. 9",79	11'.37",88	28. 0, 60	+ 0.°6	— 2.°4	+ 22".4	*m.*
1829. Marzo 18	26, 00	+ 2, 80	31, 20	16, 47	28. 0, 80	+ 6, 1	+ 6, 0	+ 11, 2	*o..*
Aprile 1.	13. 53, 45	+ 5, 26	46. 1, 29	10. 46, 38	27. 4, 85	+ 9, 1	+ 9. 2	+ 13, 3	*b.*
8.	14. 8, 77	+ 6, 59	45. 44, 64	11. 3, 03	27. 11, 70	+10, 3	+10, 5	+ 5, 9	*m*
10.	7, 71	+ 6, 78	45, 51	2, 16	27. 9, 45	+10, 0	+10, 0	+ 3, 9	*b.*
11.	3, 71	+ 6, 88	49, 41	10. 58, 26	27. 11, 00	+11, 0	+11, 6	+ 5, 0	*s.*
18.	13. 59, 58	+ 7, 53	52, 89	54, 78	28. 0, 00	+11, 4	+12, 1	+ 8, 8	*s.*
23.	55, 33	+ 8, 01	56, 66	51, 01	27. 11, 90	+13, 3	+13, 7	+ 6, 8	*b.*
24.	58, 86	+ 8, 03	53, 11	54, 56	28. 0, 85	+14, 2	+14, 5	+ 2, 1	*b.*
25.	43, 96	+ 8, 05	46. 7, 99	39, 68	28. 0, 60	+15, 7	+16, 5	+ 9, 5	*b.*
28.	50, 65	+ 8, 10	1, 25	46, 42	27. 10, 00	+14, 5	+14, 6	+ 4, 4	*b.*
Maggio 1.	57, 04	+ 8, 17	45, 54, 79	52, 88	27. 11, 75	+12, 2	+12, 5	+ 8, 6	*s.*
5.	48, 74	+ 8, 24	46. 3, 02	44, 65	28. 2, 55	+14, 5	+15, 0	+ 13, 6	*s.*

θ Cigno Δ'= 85.° 31'. 21", 98.

1829. Febbr 23.	4.°39. 3",24	+ 8",07	85.°20'.48",69	10'.33",29	27. 8. 90	+ 3°,4	+ 3.°6	+ 6",9	*s.*
Marzo 6.	1, 84	+10, 07	48, 09	33, 89	27. 11, 50	+ 3, 7	+ 4, 1	+ 9, 5	*s.*
7.	38. 59, 15	+10, 25	50, 60	31, 38	27. 11, 40	+ 4, 8	+ 5, 3	+ 7, 8	*b.*
8.	54, 50	+10, 43	55, 07	26, 91	27. 11, 50	+ 5, 5	+ 6, 3	+ 9, 0	*s.*
11.	39. 1, 63	+10, 97	47, 40	34, 58	27. 10, 90	+ 5, 4	+ 5, 3	+ 3, 7	*s.*
14.	38. 48, 54	+11, 52	59, 94	22, 04	27. 9, 85	+ 7, 6	+ 8, 1	+ 4, 5	*s.*
18.	50, 52	+11, 81	57, 67	24, 31	28. 0, 40	+ 6, 7	+ 7, 3	+ 9, 9	*o.*
19.	46, 71	+11, 88	21. 1, 41	20, 57	28. 1, 80	+ 7, 7	+ 8, 8	+ 11, 1	*s.*
21.	41, 09	+12, 03	6, 88	15, 10	28. 1, 60	+ 9, 7	+10, 8	+ 9, 5	*s.*
27.	41, 29	+12, 47	6, 24	15, 76	27. 10, 90	+ 9, 6	+10, 0	+ 6, 5	*b.*
Aprile 1.	28, 53	+12, 84	18, 63	3, 35	27. 4, 50	+ 9, 4	+ 9, 6	+ 8, 3	*b.*

η Orsa maggiore Δ'= 85.° 10', 56", 91.

1827. Dic. 27.	4.°59'.22",07	— 0",58	85.° 0',38",51	10.'18",40	28. 5, 43	+ 3.°4	+ 2°.3	+ 6",1	*m.*
29.	15, 54	— 0, 89	45, 35	11, 56	28. 2, 27	+ 3, 3	+ 2, 0	+ 8, 2	*s.*
1828. Genn. 20.	9, 51	+ 3, 29	47, 20	9, 71	28. 5, 60	+ 2, 5	+ 1, 3	+ 18, 8	*m.*
22.	6, 98	+ 3, 41	49, 61	7, 30	28. 5, 18	+ 4, 2	+ 4, 0	+ 11, 4	*b.*
25.	0, 85	+ 3, 59	55, 56	1, 35	28. 5, 52	+ 4, 8	+ 3, 3	+ 20, 5	*b.*
26.	59. 4, 53	+ 3, 65	51, 82	5, 09	28. 4, 85	+ 4, 5	+ 3, 5	+ 14, 7	*b.*
1829. Genn. 3.	58. 49, 93	+16, 82	53, 25	3, 66	27. 9, 93	+ 1, 7	+ 2, 1	+ 7, 9	*b.*
4.	58, 81	+16, 93	44, 26	12, 65	27. 8, 93	+ 1, 0	+ 1, 2	+ 0, 1	*s.*
9.	55, 57	+17, 49	46, 94	9, 97	27. 9, 10	+ 1, 6	+ 1, 9	+ 0, 7	*m.*
16.	54, 00	+18, 27	47, 73	9, 18	27. 8, 43	+ 1, 0	+ 1, 4	+ 2, 0	*s.*
28.	58. 52, 86	+19, 61	0. 47, 53	9, 38	27. 9. 27	+ 1. 9	+ 2, 5	— 0, 4	*m.*

Mesi e giorni	Al ne'

95. Lucerta Δ'= 83.° 58'. 41",49.

Mesi e giorni	Altezza ne' passaggi infer.	Variaz. in decl.	Distanza allo Zen. al principio del 1828.	Rifrazione osservata	Barom.	Termometro		Tav. di Carl.	
						unito	esterno		
1827. Nov. 19.	6.° 9.'55",88	— 3",23	83.° 50'. 7",35	8'.34",14	28.p 3',02	+ 4°,9	+ 3°,8	+ 0",3	*s.*
21.	51, 38	— 3, 36	11, 98	29, 51	28. 0, 52	+ 3, 7	— 0, 1	+ 11, 7	*s.*

β Dragone Δ'= 82.° 55'. 13", 14.

1828. Marzo 4.	7. 11'.34",70	+15',65	82. 48'. 9",65	7'. 3",49	27. 9, 27	+ 7, 4	+ 5, 0	+ 14",8	*b.*
5.	29, 68	+15, 62	14, 70	6. 58, 44	27. 6, 93	+ 8, 0	+ 7, 6	+ 11, 0	*m.*
8.	47, 50	+15, 50	47. 57, 00	7. 16, 14	28. 2, 18	+ 4. 8	+ 1, 9	+ 15, 5	*b.*
11.	36, 33	+15, 38	48. 8, 29	7. 4, 85	28. 2, 43	+10, 1	+11, 1	+ 6, 6	*s.*
12.	37, 80	+15, 35	6, 85	7, 6, 29	28. 2, 77	+ 9, 6	+10, 0	+ 7, 9	*s.*
13.	33, 56	+15, 32	11, 12	7. 2, 02	28. 3, 43	+10, 5	+10, 6	+ 12, 0	*s.*

ϑ Orsa maggiore Δ'= 82.° 54'. 6", 94.

1828. Sett. 24.	7. 12'.49",79	+ 3', 77	82. 47'. 6",44	7.' 0',50	28. 3, 35	+15, 7	+15, 7	+ 2",0	*b.*
25.	46, 95	+ 4, 00	9, 15	6. 57, 79	28. 3, 35	+16, 0	+16, 1	+ 3, 5	*b.*
26.	43, 57	+ 4, 23	12, 20	54, 74	28. 3, 10	+17, 0	+17, 0	+ 4, 5	*b.*
30.	42, 11	+ 5, 15	12, 74	54, 20	28. 1, 35	+16, 6	+16, 3	+ 4, 2	*b.*
Ottob. 1.	38, 61	+ 5, 38	16, 01	50, 93	28. 0, 93	+16, 9	+16, 8	+ 6, 0	*b.*
7.	45, 72	+ 6, 76	7. 52	59, 42	28. 0, 93	+14, 9	+15, 0	+ 1, 1	*b.*

ϑ Boote Δ'= 82°. 42'. 26", 10.

1827. Dic. 29.	7. 24'.40",81	— 0",35	82. 35'.13",94	7'.12",56	28. 2, 27	+ 3, 3	+ 2, 0	+ 7",1	*s.*
1828. Genn. 20.	43, 37	+ 4, 03	12, 60	13, 50	28. 5, 60	+ 2, 5	+ 1, 3	+ 12, 3	*s.*
25.	46, 14	+ 4, 91	8, 95	17, 15	28. 5, 52	+ 4, 8	+ 3, 3	+ 3, 8	*b.*

ζ Cassiopea Δ'= 82.° 23'. 50", 54.

1827. Dic. 28.	7. 43'.13",18	— 0",18	82. 16'.48",00	7'. 2",54	28. 4, 93	+ 2, 5	+ 0, 3	+ 8",3	*b.*

γ Orsa maggiore Δ'= 80.° 42'. 24.", 21.

1827. Nov. 18.	9. 23'.30",02	— 6",53	80. 36',36",51	5'.47",70	28. 3. 35	+ 6, 1	+ 4, 0	+ 2",6
20.	24, 91	— 6, 05	41, 14	43, 07	28. 1, 85	+ 5, 8	+ 3, 7	+ 6, 2
25.	26, 49	— 4, 84	38, 35	45, 86	28. 2, 02	+ 2, 6	— 0, 2	+ 10, 7
27.	29, 05	— 4, 36	35, 31	48, 90	28, 1, 85	+ 1, 6	— 1. 0	+ 8, 8
Dicemb. 5.	31, 32	— 3, 30	31, 98	52, 23	28. 2, 60	+ 2, 1	+ 1, 6	+ 1, 7
8.	30, 44	— 2, 76	32, 32	51, 89	28. 3, 43	+ 3, 6	+ 3, 0	+ 0, 3
18.	24, 50	— 0, 96	36, 46	47, 75	28. 3, 10	+ 4, 5	+ 4, 0	+ 2, 3
19.	19, 60	— 0, 78	41, 18	42, 03	28. 3, 10	+ 3, 7	+ 3, 0	+ 9, 9
20.	2[illegible], 22	— 0, 60	39, 38	44, 83	28. 2, 10	+ 3, 2	+ 2, 6	+ 6, 7
21.	27, 38	— 0, 42	33, 04	51, 17	28. 1, 68	+ 3. 1	+ 2, 5	0, 0
24.	11, 88	0 00	48, 12	36, 09	28. 2, 43	+ 5, 8	+ 5, 5	+ 10, 7
25.	16, 95	+ 0, 01	43, 04	41, 17	28 2, 60	+ 4, 2	+ 3, 6	+ 9, 0
27.	25, 11	+ 0, 04	34, 85	49, 36	28. 5, 43	+ 3. 5	+ 2, 6	+ 5, 6
29.	20, 24	+ 0, 07	39, 69	44, 52	28. 2, 10	+ 3, 4	+ 2, 7	+ 6, 8
30.	20, 47	+ 0, 08	39, 45	44, 76	28. 3, 27	+ 2, 7	+ 2, 1	+ 8, 8
1828. Genn. 5.	13, 88	+ 0, 18	45, 94	38, 27	27. 10, 52	+ 3, 2	+ 2, 8	+ 9, 1

α Cassiopea Δ'= 79.° 45'. 21", 41.

1828. Apr. 26.	10. 19. 22",66	+16",30	79. 40'.21",04	5'. 0",37	28. 2, 68	+14, 4	+15, 2	+ 2",2
27.	24, 92	+16, 53	18, 55	5. 2, 86	28. 3, 60	+14, 5	+14, 8	+ 1, 1
28.	30, 73	+16, 77	12, 50	8, 91	28. 5, 02	+14, 0	+14, 3	— 2, 9
29	26, 58	+17, 00	16, 42	4, 99	28. 4, 93	+13, 5	+13, 7	+ 1, 7
Magg. 12.	18. 40	+20, 06	21, 54	4. 59, 87	28. 1, 02	+16, 7	+17, 2	— 1, 6
25.	16, 91	+22, 45	20, 64	5. 0, 77	28. 1, 02	+17, 2	+17, 0	— 2, 2

Mesi	Al

Tavola VI.

β Orsa maggiore Δ'= 78.° 31'. 23", 87.

Mesi e giorni	Altezza ne' passaggi infer.	Variaz. in decl.	Distanza allo Zen. al principio del 1828	Rifrazione osservata	Barom.	Termometro		Tav. di Carl.
						unito	esterno	
1828. Ottob. 10.	12°. 0'.59"92	+ 1",87	77.° 58.58",21	4'.25",66	28. 4, 18	+14, 0	+14, 2	— 2",3
11.	1. 0, 48	+ 2, 17	57, 35	26, 53	28. 4. 18	+14, 1	+14, 3	— 3, 2
12.	3, 62	+ 2, 47	53, 91	29, 96	28. 4, 93	+13, 5	+13, 7	— 5, 4
15.	2, 57	+ 3, 57	54, 06	29, 81	28. 0, 60	+11, 9	+11, 9	— 6, 4
20.	3, 43	+ 4, 86	51, 71	32, 16	28. 5, 52	+11, 0	+11, 1	— 3, 9
28.	4, 95	+ 7. 25	47, 80	36, 07	18. 5, 43	+10, 4	+10, 6	— 7, 2

ζ Cefeo Δ'= 77.° 59'. 27", 27.

1827. Nov. 19.	12. 5'.13",73	— 3'.55	77. 54'.51",82	4'.35".45	28. 3, 02	+ 4, 9	+ 3, 8	— 1",4
21.	10, 34	— 3, 64	53, 30	33, 97	28. 0, 52	+ 3, 7	— 0, 1	+ 3, 3
28.	10, 33	— 3, 95	53, 62	33, 65	28. 0, 60	+ 0, 6	— 2, 4	+ 6, 9

δ Orsa maggiore Δ'= 77.°22'. 9", 56.

1827. Ott. 26.	12.42'.9",67	—15",73	77. 18'. 6",06	4'. 3",50	28. 3, 11	+11, 2	. . . . .	+ 8',6
Nov. 18	21, 03	— 8, 59	17. 47, 56	22, 00	28. 3, 35	+ 6, 1	+ 4, 0	— 0, 9
20.	16, 09	— 7, 98	17. 51, 89	17, 67	28. 1, 68	+ 5, 1	+ 2, 6	+ 3, 8

β Cassiopea Δ'= 77°. 8'. 45", 14.

1827. Dic. 28.	12.55',38",92	— 0",22	77. 4.'21",30	4.'23",84	28. 4, 93	+ 2, 5	+ 0,3	— 1",4

ϑ Dragone Δ'= 76°. 19'. 38", 13.

1827. Febb. 8.	13. 44'.8",53	+ 9",20	76. 15'.42",27	3'.55",86	27. 10, 77	+ 3, 5	+ 2, 0	+ 5",1
11.	15, 30	+ 9, 57	35, 13	4. 3, 00	27. 10, 10	+ 1, 5	— 2, 9	+ 2, 8

δ Cassiopea Δ' = 76.° 0'. 41", 09.

1828. Magg. 25.	14. 2'.44",76	+17",78	75. 56'.57",46	3'.43",63	28. 1, 10	+16, 7	+16, 6	— 2",6
28.	37, 68	+18, 40	57. 3, 92	37, 17	28. 0, 52	+17, 1	+17, 1	+ 2, 9
31.	40, 80	+19, 02	57. 0, 18	40, 91	28. 1, 10	+18, 6	+18, 6	— 1, 9
Giugno 2.	45, 08	+19, 43	56. 55, 49	45, 60	28. 2, 27	+18, 1	+17, 6	— 4, 5
3.	42, 08	+19, 64	56. 58, 30	42, 79	28. 1, 10	+19, 3	+19, 3	— 4, 9
5.	39, 44	+20, 05	57. 0, 51	40, 58	27. 11, 18	+19, 6	+19, 6	— 3, 7
6.	36, 21	+20, 26	57. 3, 53	37, 56	27. 11, 35	+19, 4	+19, 2	— 0, 4

l Dragone Δ'= 75°. 47'. 3", 63.

1828. Genn. 26.	14.16'.44",41	+ 6".92	75. 43'. 8",67	3'.54",96	28. 4, 68	+ 4, 3	+ 2, 3	+ 0",0
Febb. 5.	43, 58	+ 7, 62	8, 86	54, 83	28. 3, 77	+ 3, 6	+ 1, 8	+ 0, 1
11.	43, 83	+ 8, 19	7, 92	55; 71	27. 10, 10	+ 1, 5	— 2, 9	+ 0, 7

η Cefeo Δ'= 74.° 10'. 29", 61.

1827. Nov. 19.	15.53'.12",24	— 7",59	74. 6'.55",35	3'.34",26	28. 3, 10	+ 5, 2	+ 2, 9	— 5",0
21.	12, 29	— 7, 48	55, 19	3. 34, 42	28. 0, 60	+ 4, 1	0, 0	— 3, 7

o Orsa maggiore Δ'= 74.° 4'. 26", 40.

1828. Ott. 16.	15. 58'.42"20	+12",21	74. 1'. 5",59	3'.20",81	28. 2, 52	+12. 5	+12, 6	— 2",5
20.	43, 51	+12. 72	3, 77	3 22, 63	28. 5, 52	+11, 4	+11, 3	— 1, 3

α Cefeo Δ'= 73. °29'. 18", 35.

1827. Nov. 19.	16.34'.13",91	— 5",84	73. 25.51",93	+3'.26",47	28. 3, 10	+ 5, 2	+ 2, 9	— 6",0
21.	11, 86	— 5, 77	53, 91	24, 44	28. 0, 60	+ 4, 1	0, 0	— 2, 6
28.	12, 74	— 5, 54	52, 80	25, 55	28. 0, 68	+ 0, 8	— 2, 0	— 1, 8

η Dragone Δ'= 73.° 26'. 55"99.

Mesi e giorni	Altezza ne' passaggi infer.	Variaz. in decl.	Distanza allo Zen. al principio del 1828	Rifrazione osservata	Barom.	Termometro		Tav. di Carl.
						unito	esterno	
1828. Febb. 5.	16°36'.13",88	+ 9",48	73.°23'. 36",64	3'.19",35	28^p 3^l,77	+ 3, 6	+ 1, 8	+ 2",0
8.	10, 29	+10, 26	39, 45	3.16, 54	27. 10, 77	+ 3, 5	+ 2, 0	+ 1, 1

α Orsa maggiore Δ'= 72.° 40'.53, 27.

1827. Nov. 5.	17°.22'.25",46	— 7",58	72. 37'.42",12	3'.11",15	28. 4, 85	+ 6, 6	+ 4, 3	— 1",1
11.	21, 46	— 6, 33	44, 87	8. 40	28. 0, 60	+ 6, 6	+ 4, 6	— 0, 5
18.	26, 96	— 4, 87	37, 91	15, 36	28. 3, 35	+ 6, 3	+ 4, 4	— 5, 8
20.	21, 26	— 4, 45	43, 19	10, 08	28. 1, 85	+ 5, 8	+ 3, 7	— 0, 7
25.	17, 37	— 3, 41	46, 08	7, 19	28. 2, 02	+ 2, 6	— 0, 2	+ 5, 9
27.	22, 48	— 2, 99	40, 51	12, 76	28. 1, 85	+ 1, 6	— 1, 0	+ 1, 0

ε Cassiopea Δ'= 72.° 31'. 47", 82.

1828. Giug. 14.	17.30'.41",20	+25",52	72. 28'.53",28	2'.54",54	28. 2, 77	+20, 0	+20, 0	— 0, 4
15.	42, 44	+25, 59	51, 97	55, 85	28. 2, 18	+20, 8	+21, 1	— 2, 6
17.	41, 92	+25, 72	52, 36	55, 46	28. 0, 27	+20, 1	+20, 1	— 2, 4

h Orsa maggiore Δ' = 71.° 33'. 6", 27.

1828. Ott. 10.	18.29'.37",20	+ 8",80	71. 30'.14",00	2'.52",27	28. 3, 77	+14, 4	+14, 5	— 2, 8
11.	37, 48	+ 9, 01	13, 51	52, 76	28. 4, 10	+14, 2	+14, 1	— 2, 9
12.	39, 73	+ 9, 22	11, 05	55, 22	28. 4, 68	+13, 7	+13, 6	— 4, 6

α Dragone Δ'= 70.° 9'. 26", 32.

1827. Dic. 29.	19.53'21",35	— 0",38	70. 6'.39",03	2'.47",29	28. 2, 27	+ 3. 3	+ 2, 0	— 1, 6
1828. Genn. 5.	19, 50	+ 0, 69	39, 81	46, 51	27. 10, 43	+ 3, 0	+ 1, 7	— 2, 4
18.	21, 67	+ 2, 68	35, 65	50, 67	28. 8, 77	+ 1, 6	— 0, 5	+ 0, 3
20.	15, 15	+ 2, 99	41, 86	44, 46	28. 5, 60	+ 2, 5	+ 1, 3	+ 3, 5

l Cefeo Δ' = 70.° 2'. 56", 71.

1827. Nov. 28.	19.59'.52",65	— 1",39	70. 0'. 8",74	2'.47",97	28. 0', 60	+ 0, 6	— 2, 4	— 0, 4

δ Dragone Δ'= 67.° 59'. 24", 99.

1828. Marzo 3.	22. 2',38",26	+19",08	67. 57'. 2",66	2'.22",33	27. 9, 10	+ 6, 6	+ 4, 5	+ 1, 9
9.	41, 17	+20, 15	56. 58, 68	26, 31	28. 3, 10	+ 6, 3	+ 6, 0	— 0, 6

β Cefeo Δ'= 65.° 32'. 23", 32.

1827. Nov. 19.	24.29'.57",08	— 4", 82	65. 30'. 7",74	2'.15",58	28. 3. 10	+ 5, 2	+ 2, 9	— 3, 7
21.	56, 78	— 4, 81	8, 03	15, 29	28. 0, 60	+ 4, 1	0, 0	— 2, 5
28.	56, 24	— 4, 78	8, 54	14, 78	28. 0, 68	+ 0, 8	— 2, 0	— 0, 7

λ Dragone Δ'= 65.° 4'. 47", 54

1827. Nov. 5.	24.57.'36",52	— 8",75	65. 2'.32",23	2'.15",31	28. 4, 85	+ 6, 6	+ 4, 3	— 6, 4
11.	26, 46	— 7, 35	40, 89	6, 65	28. 0, 60	+ 6, 6	+ 4, 6	+ 0, 4
18.	31, 96	— 5, 71	33, 75	13, 79	28. 3, 35	+ 6, 3	+ 4, 4	— 5, 6
20.	27, 69	— 5, 44	37, 75	9, 79	28. 1, 85	+ 5, 8	+ 3, 7	— 1, 7
25.	25, 57	— 4, 27	38, 70	8, 84	28. 2, 02	+ 2, 6	— 0, 2	+ 1, 8
Dic. 5.	27, 76	— 2, 86	35, 10	12, 44	28. 2, 60	+ 2, 1	+ 1, 6	— 2, 7
18.	23, 85	— 0, 61	36, 76	10, 78	28. 3, 10	+ 4, 5	+ 4, 0	— 2. 4
19.	23, 56	— 0, 47	36, 91	10, 63	28. 3, 10	+ 3, 7	+ 3, 0	— 1, 6

ϰ Dragone Δ′=64.° 37′. 16″,83.

Mesi e giorni	Altezza ne' passaggi infer.	Variaz. in decl.	Distanza allo Zen. al principio del 1828	Rifrazione osservata	Barom.	Termometro		Tav. di Carl.
						unito	esterno	
1827. Nov. 18.	25.°25′. 4″,05	— 9″,13	64.° 35′. 5″,08	2′.11″,75	28. 3, 35	+ 6, 1	+ 4, 0	— 5″,9
20.	1, 71	— 8, 52	6, 81	10, 02	28. 1, 68	+ 5, 1	+ 2, 6	— 3, 9
25.	24. 57, 37	— 7, 00	9, 63	7, 20	28. 2, 45	+ 2, 3	— 0, 8	+ 1, 3
27.	57, 05	— 6, 39	9, 34	7, 49	28. 1, 60	+ 1, 2	— 1, 9	+ 1, 4

γ Cefeo Δ′= 58.° 40′. 23″, 11.

1827. Dic. 28.	31. 21′.23″,95	+ 0″,16	58. 38. 35, 89	1.47, 22	28. 4, 93	+ 2, 5	+ 0, 3	— 6, 6

STELLE AUSTRALI.

ϰ Fenice Δ″= 89.° 17′.4″,48 P.

Mesi e giorni	Distanza allo Zen. osserv.	Variaz. in decl.	Distanza allo Zen. al principio del 1828	Rifrazione osservata	Barom.	Termometro		Tav. di Carl.	
						unito	esterno		
1828. Ott. 10.	88.53′.13″,41	+30″,77	88. 53′.44″,18	23′.20″,30	28. 4, 27	+13. 8	+14. 0	— 57″,9	*b.*
15.	36, 62	+29, 60	54. 6, 22	22. 58, 26	0, 77	+11, 5	+12, 0	— 27, 0	*s.*
1829. Ott. 30.	52. 31, 13	+43, 69	53. 14, 82	23. 46, 80	2, 20	+ 7, 4	+ 7, 7	— 28, 8	*m.*
Nov. 2.	15, 37	+42, 77	52. 58, 14	24. 3, 48	1, 85	+ 6, 6	+ 6, 5	— 35, 8	*s.*
10.	12, 43	+40, 33	52, 76	24. 8, 86	3, 10	+ 7, 8	+ 8, 0	— 53, 0	*s.*
22.	51. 9, 24	+36, 67	51. 45, 91	25, 18, 57	2, 25	+ 0, 6	+ 1, 0	— 57, 9	*b.*

δ2 Gru Δ″= 89.° 15′. 30″, 78. P.

1829. Luglio 5.	88. 53′.58″,10	+49, 57	88. 54. 47, 67	21. 43, 11	28. 2, 70	+20, 6	+20, 6	— 28, 9	s.

λ Centauro Δ″= 89.° 15′. 12″, 34. P.

1829. Giug. 14.	88. 53. 31, 37	—37, 60	88. 52. 53, 77	22. 18, 57	28. 3, 50	+16, 6	+16, 7	— 29, 1	*s.*
19.	53, 13	—38, 12	53. 15, 01	21. 57, 33	1, 05	+17, 4	+17, 5	— 24, 7	*s.*
20.	37, 36	—38, 22	52. 59, 14	22. 13, 20	0. 35	+17, 9	+18, 2	— 50, 8	*o.*

τ2. Lupo Δ″=89.° 14′. 22″,28. P.

1829. Giug. 14.	88. 53. 7, 91	—44, 53	88. 52. 23, 38	21. 58, 90	28. 5, 35	+17, 2	+16, 8	— 9, 0	*o.*

δ1 Gru Δ″=89.° 1′. 11″, 18. P.

1828. Nov. 6.	88. 38. 23, 38	+17, 34	88. 38. 40, 72	22. 30, 46	28. 4, 93	+ 4. 4	+ 4, 6	— 2, 5	*s.*
1829. Agos. 22.	39, 12, 51	+45, 99	39. 58, 50	21. 12, 68	2, 75	+17, 3	+16, 6	— 38, 7	*o.*
Ottob. 30.	4, 71	+34, 21	38, 92	21. 32, 26	2, 15	+ 7, 3	+ 7, 7	+ 20, 7	*s.*
Nov. 2.	14, 81	+33, 92	48, 73	21. 22, 45	1, 70	+ 7. 0	+ 7, 4	+ 32, 1	*s.*
14.	38. 12, 09	+32, 76	38. 44, 85	22. 26, 33	2, 65	+ 5, 7	+ 6, 2	— 16, 5	*s.*
21.	37. 7, 98	+32, 07	37. 40, 05	23. 31, 13	4, 35	+ 1, 0	+ 0, 4	— 29, 7	*s.*
22.	15, 99	+31, 97	47, 96	23. 23, 22	2, 70	+ 1, 2	+ 1, 4	— 37. 8	*b.*

γ Fenice Δ″= 88.° 51′. 0″, 92. P.

Mesi e giorni		Distanza allo Zent. osserv.	Variaz. in decl.	Distanza allo Zen. al principio del 1828	Rifrazione osservata	Barom.	Termometro		Tav. di Carl.	
							unito	esterno		
1828. Ott.	10.	88.29. 45, 96	+33, 42	88. 30. 19, 38	20.41, 54	28. 4, 27	+13, 1	+13, 2	— 22, 2	*s.*
	11.	30. 6, 01	+33, 17	39, 18	20.21, 74	4, 10	+13, 6	+13, 6	— 4, 8	*s.*
	20.	29. 51, 52	+30, 91	22, 43	20.37, 49	5, 52	+10, 2	+10, 2	+ 13, 1	*b.*
Dic.	3.	28. 40, 23	+20, 53	29. 0, 76	22. 0, 16	6, 18	+ 1, 7	+ 2, 0	— 4, 7	*s.*
	6.	28. 54, 43	+19, 83	29. 14, 26	21. 46, 66	4, 27	+ 3, 3	+ 3, 5	— 7, 5	*b.*
1829. Ott.	11.	29. 27, 07	+49, 89	30. 16, 96	20. 43, 96	4, 15	+10, 2	+10, 5	— 1, 4	*s.*
	12.	27, 92	+49, 64	17, 56	43, 36	3, 55	+10, 7	+10, 9	— 6, 8	*o.*
	13.	32, 44	+49, 39	21, 83	39, 09	3, 25	+10, 9	+11, 0	— 3, 6	*b.*
	30.	10, 38	+45, 20	29. 55, 58	21. 5, 34	2, 10	+ 7, 6	+ 7, 8	— 10, 4	*s.*
Nov.	10.	2, 52	+42, 46	44, 98	15, 94	3, 10	+ 7, 7	+ 8, 0	— 18, 8	*b.*
	21.	28. 7, 51	+39, 73	28. 47, 24	22. 13, 68	4, 60	+ 1, 2	+ 1, 4	— 15, 8	*o.*

ε Lupo Δ″= 88.° 41′. 25″, 70. P.

1829. Giug.	24.	88. 23. 57, 22	—36, 30	88. 23. 20, 92	18. 4, 78	28. 4, 35	+19, 7	+19, 1	+ 50, 2	*o.*

e Eridano Δ″= 88.° 23′. 51″, 92. P.

1829. Gen.	3.	88. 3. 38, 07	+11, 13	88. 3. 49, 20	20. 2, 72	27. 10, 10	+ 1, 7	+ 2, 3	— 53, 8	*s.*

α Fenice Δ″= 87.° 53′. 23″, 66. Cacciatore

1827. Dic.	8.	87.36′.52″,17	+ 1, 50	87. 36. 53, 67	16, 29, 99	28. 3, 43	+ 3, 4	+ 2, 7	+ 50, 5	*s.*
	18.	41, 75	+ 0, 59	42, 34	41, 39	3, 10	+ 4, 1	+ 3, 3	+ 33, 6	*m.*
	19.	27, 19	+ 0, 50	27, 29	56, 37	3, 10	+ 3, 6	+ 2, 9	+ 20, 0	*b.*
	20.	31, 17	+ 0, 41	31, 58	52, 08	2, 18	+ 3, 1	+ 1, 9	+ 28, 5	*s.*
	24.	37. 3. 88	+ 0, 26	37. 4, 14	19, 52	2, 60	+ 5, 6	+ 4, 7	+ 45, 4	*m.*
	27.	36. 25, 66	+ 0, 15	36. 25, 81	57, 85	5, 43	+ 3, 5	+ 2, 6	+ 27, 7	*m.*
	29.	54, 55	+ 0, 08	54, 63	29, 03	2, 10	+ 3, 4	+ 2, 7	+ 47, 4	*m.*
	30	40, 24	+ 0, 04	40, 28	43, 38	3, 27	+ 2, 7	+ 2, 1	+ 39, 8	*m.*
	31.	32, 81	0, 00	32, 81	50, 85	1, 43	+ 3, 0	+ 2, 6	+ 22, 9	*m.*
1828. Gen.	5.	37, 3, 39	— 0, 18	37. 3, 21	20, 45	27. 10, 52	+ 3, 2	+ 2. 8	+ 45, 3	*o.*
Sett.	24.	36. 52, 41	+34, 16	26, 57	15. 57, 09	28. 3, 52	+15, 6	+15, 5	+ 2, 4	*s.*
	25.	56, 81	+33, 94	30, 75	52, 91	3, 27	+15, 7	+15, 7	+ 5, 1	*o.*
	26.	54, 21	+33, 72	27, 93	55, 73	3, 18	+16, 0	+15, 9	+ 0, 5	*s.*
	29.	37. 1, 73	+33, 07	34, 80	48, 86	0, 93	+15, 9	+16, 0	+ 0, 5	*s.*
	30.	36. 57, 76	+32, 85	30, 61	53, 05	1, 43	+16, 0	+15, 4	+ 3, 6	*o.*
Ott.	1.	37. 2, 82	+32, 64	35, 46	48, 20	0, 93	+16, 5	+16, 5	— 1, 7	*m.*
Nov.	1.	36. 20, 94	+25, 60	36. 46, 54	16. 37, 12	1, 85	+ 6, 2	+ 6, 8	+ 11. 8	*b.*
	23.	16, 35	+21, 27	37, 62	46, 04	2, 35	+ 6, 6	+ 6, 9	+ 3, 0	*s.*
Dic.	5.	6, 92	+19, 68	26, 60	57, 06	3, 93	+ 2, 6	+ 2, 7	+ 23, 2	*o.*
	6.	7, 91	+19, 55	26, 46	57, 20	4, 27	+ 3, 5	+ 3, 9	+ 16. 4	*o.*
	13.	0, 39	+18, 62	19, 01	17. 4, 65	4, 77	+ 2, 5	+ 2, 7	+ 18, 1	*m.*
	15.	0, 13	+18, 51	18, 64	5, 02	3, 27	+ 2, 4	+ 2, 6	+ 13, 9	*s.*
	19.	38, 64	+18, 29	56, 93	16. 26, 73	1, 02	+ 3, 0	+ 3, 6	+ 40, 7	*m.*
	30.	32, 75	+17, 67	50, 42	33, 24	3, 68	+ 5, 5	+ 5, 5	+ 30. 1	*s.*

v Argo Δ″= 87.° 41′. 57″, 90. P.

1828. Mar.	3.	87. 26. 31, 49	—16, 02	87. 26. 15, 47	15 42, 43	27. 9. 10	+ 6, 6	+ 4, 5	+ 26, 8	*o.*
	4.	38, 77	—16, 11	22, 66	35, 24	9, 35	+ 7, 1	+ 4, 1	+ 38, 1	*s.*
	8.	18, 35	—16, 49	1, 86	56, 04	28. 2, 43	+ 4, 7	+ 1, 7	+ 45, 8	*m.*
	9.	19, 12	—16, 59	2, 53	55, 37	3, 10	+ 6, 3	+ 6, 0	+ 22, 4	*s.*
	11.	45, 76	—16, 78	28, 98	28, 92	2, 52	+10, 0	+11, 1	+ 17, 2	*s.*
	12.	53, 85	—16, 87	36, 98	20, 92	2, 77	+ 9, 7	+ 9, 9	+ 32, 9	*s.*
	13.	53, 37	—16, 97	36, 40	21, 50	3, 43	+10, 0	+10, 0	+ 33, 7	*b.*
	16.	59, 72	—17, 26	42, 46	15, 44	2, 60	+11, 6	+10, 5	+ 34, 5	*s.*
1829. Mar.	7.	27, 07	—20, 19	6, 88	51, 02	27. 11, 30	+ 5, 0	+ 5, 6	+ 17, 8	*s.*
	10.	50, 10	—20, 41	29, 69	28, 21	7, 55	+ 6, 8	+ 7, 3	+ 20, 1	*s.*
	11.	25, 21	—20, 48	4, 73	53, 17	10, 80	+ 6, 0	+ 6, 0	+ 12, 3	*b.*
	18.	43, 10	—20, 99	22, 11	35, 79	28. 0, 20	+ 6, 7	+ 7, 1	+ 26, 9	*o.*

Tavola X.

η. Scorpione   Δ″= 87.° 38′. 37″, 18.   P.

Mesi e giorni	Distanza allo Zen. osserv.	Variaz. in decl.	Distanza allo Zen. al principio del 1828.	Rifrazione osservata	Barom.	Termometro		Tav. di Carl.	
						unito	esterno		
1829. Giug. 19.	87°23′.58″ 16	—13″,49	87.° 23 ′44″,67	14′.52″,51	28. 1, 15	+16°,7	+16°,5	+ 13′,0	*s.*
20.	24. 8, 68	—13, 60	55, 08	42, 10	0, 40	+17, 3	+17, 5	+ 15, 9	*s.*
29.	7, 39	—14, 62	52, 77	44, 41	27, 11, 20	+17, 0	+16, 4	+ 16, 2	*o.*
Luglio 10.	32, 43	—15, 86	24. 16, 57	20, 61	11, 30	+20, 2	+20, 3	+ 19, 5	*o.*

σ Argo nella poppa   Δ″= 87.° 36′. 39.″, 86.   P.

1829. Febb. 16.	87.20. 37, 94	—21, 86	87. 20. 16, 08	16. 23, 78	28. 1, 93	+ 0, 5	+ 1, 0	+ 1, 4	*b.*
23.	21. 11, 66	—23, 27	48, 39	15. 51, 47	27, 8, 90	+ 3, 4	+ 3, 6	+ 3, 7	*o.*
Mar. 8.	22, 73	—25, 89	56, 84	43, 02	11, 50	+ 5, 5	+ 6, 3	+ 4, 1	*b.*
11.	7, 63	—26, 27	41, 36	58, 50	10, 90	+ 5, 4	+ 5, 3	— 7, 4	*s.*
18.	38, 00	—27, 14	21. 10, 86	29, 00	28. 0, 40	+ 6, 7	+ 7, 3	+ 14, 9	*o.*
21.	46, 31	—27, 52	18, 79	21, 07	1, 60	+ 9, 7	+10, 8	+ 6, 3	*s.*

λ Argo nelle vele   Δ″= 87.° 23′. 23″, 44.   P.

1829. Aprile 8.	87. 9. 37, 48	—40, 59	87. 8. 56, 89	14. 26, 55	27. 11, 45	+10, 6	+11, 0	+13, 8	*m.*

β Lupo   Δ″= 87.° 4′. 31″, 88.   P.

1829. Giug. 14.	86.52. 4, 16	—38, 18	86. 51, 25, 98	13. 5, 92	28. 3, 50	+17, 2	+17, 5	+ 10, 3	*s.*
15.	10, 24	—38, 29	31, 95	12. 59, 93	3, 10	+18, 1	+18, 2	+ 22, 1	*o.*
19.	5, 58	—38, 73	26, 85	13. 5, 03	1, 00	+17, 9	+17, 9	+ 13, 4	*o.*
20.	7, 00	—38, 84	28, 16	13. 3, 72	0, 35	+17, 9	+18, 2	+ 11, 7	*o.*

μ Centauro   Δ″= 86°. 15′. 22″, 71.   P.

1828. Apr. 26.	86. 4. 19, 57	—24, 56	86. 3. 55, 01	11. 27, 70	28. 2, 68	+13, 9	+14, 0	+ 14, 2	*s.*
27.	14, 57	—24, 73	49, 84	32, 87	3, 77	+14, 1	+14, 4	+ 9, 8	*s.*
28.	6, 46	—24, 90	41, 56	41, 15	5, 27	+13, 6	+13, 9	+ 6, 5	*s.*
29.	9, 19	—25, 08	44, 11	38, 60	4, 93	+13, 1	+13, 5	+ 9, 9	*m.*
Marzo 12.	39, 00	—27, 31	4. 11, 69	11, 02	1, 10	+16, 6	+16, 9	+ 16, 7	*b.*
1829. Aprile 24.	30, 73	—39, 83	3. 50, 90	31, 81	0, 95	+13, 5	+14, 0	+ 6, 6	*b.*
25.	42, 10	—40, 01	4. 1, 09	21, 62	0, 55	+14, 9	+15, 3	+ 11, 1	*o.*
Maggio 12.	34, 21	—43, 02	3. 51, 19	31, 52	27. 11, 20	+13, 7	+13, 9	+ 3, 5	*s.*
23.	28, 46	—44, 34	54, 12	28, 59	28. 2, 60	+14, 7	+14, 9	+ 9, 8	*s.*
29.	41, 94	—45, 06	56, 88	25, 83	27. 11, 95	+14, 8	+15, 1	+ 6, 4	*b.*
Giugno 2.	53, 91	—45. 54	4. 7, 37	15, 34	28. 1. 50	+17, 4	+17, 9	+ 9, 5	*b.*
5.	5. 12, 45	—45, 90	26, 55	10. 56, 16	27. 8, 10	+19, 4	+19, 7	+ 11, 2	*m.*
10.	4. 33, 22	—46, 51	3. 46, 71	11. 36, 00	28. 1, 50	+15, 5	+15, 9	— 3, 7	*b.*
13.	34, 72	—46, 87	47, 85	34, 86	28. 3, 00	+15, 4	+15, 3	+ 2, 8	*b.*

X Centauro   Δ″ = 86.° 3′. 6″, 74.   P.

1828. Febb. 6.	85.51. 13, 45	— 2, 25	85. 51. 11, 20	11. 55, 54	28. 3, 85	+ 2, 0	— 0, 7	+ 18, 7	*m.*
1829, Giug. 21.	52. 49, 78	—38, 60	52. 11, 18	10. 55, 56	1, 25	+18, 8	+18, 7	+ 1, 4	*o.*
22.	52, 34	—38, 68	13, 66	53, 08	1, 70	+18, 2	+17, 8	+ 7, 8	*o.*
24.	51, 99	—38, 84	13, 15	53, 59	2, 50	+19, 7	+20, 0	+ 1, 3	*o.*
Luglio 1.	53. 0, 72	—39, 38	21, 34	45, 40	1, 00	+18, 9	+19, 7	+ 7, 7	*o.*
2.	5, 63	—39, 46	26, 17	40, 57	0, 90	+20, 0	+20, 6	+ 9, 1	*s.*

η Centauro   Δ″= 86°.2′. 14″, 78.   P.

1828. Febb. 6.	85.50. 44, 67	— 4, 52	85. 50. 40, 15	11. 34, 63	28. 3, 85	+ 2, 0	— 0, 7	+ 38, 5	*s.*
1829. Giug. 14.	52. 7, 87	—41, 36	51. 26, 51	10. 48, 27	3, 50	+17, 2	+17, 5	+ 15, 9	*b.*
19.	52. 20, 88	—41, 23	51. 39, 65	10. 35, 13	1, 00	+18, 1	+18. 5	+ 21, 1	*o.*

Mesi e giorni	Di all os
1829. Aprile 8.	85.°4
10.	
11.	
18.	
24.	
25.	

q Argo nelle vele Δ"= 85.° 55'. 5", 15. P.

Mesi e giorni	Distanza allo Zen. osserv.	Variaz. in decl.	Distanza allo Zen. al principio del 1828	Rifrazione osservata	Barom.	Termometro		Tav. di Carl.	
						unito	esterno		
1829. Aprile 8.	85.°45.' 8",42	—44".44	85.° 44.'23",98	10.'41",17	27.p11,'70	+10°,3	+10°,6	+ 26".1	s.
10.	1, 24	—44, 73	16, 51	48, 64	9, 45	+10, 1	+10, 5	+ 14, 8	s.
11.	9, 10	—44, 88	24. 22	40, 93	11, 00	+11, 0	+11, 6	+ 21, 4	s.
18.	6, 36	—45, 90	20, 46	44, 69	28, 0, 30	+12, 9	+13, 6	+ 13, 1	s.
24.	6, 64	—46, 46	20, 18	44, 97	0, 85	+14, 2	+14, 6	+ 10, 3	o.
25.	19, 78	—46, 55	33, 23	31, 92	0, 60	+15, 7	+16, 6	+ 15, 9	s.
Maggio 1.	5, 08	—47, 12	17, 96	47, 19	27, 11, 75	+12, 2	+12. 5	+ 13, 4	o.

ϑ Eridano prec. Δ"= 85.° 39'. 0", 98. P.

1828. Genn. 20.	85.27.58, 61	— 2, 69	85. 27.55, 92	11. 5, 06	28. 5, 60	+ 2, 5	+ 1, 3	+ 15, 6	b.
22.	28. 8, 03	— 2, 79	28. 5, 24	10.55, 74	5. 18	+ 4, 2	+ 4, 0	+ 14, 0	o.
26.	15, 01	— 2, 98	12, 03	48, 95	4, 68	+ 4, 3	+ 2, 3	+ 26, 1	s.
Febb. 5.	6, 09	— 3, 46	2, 63	58, 35	3, 68	+ 3, 7	+ 2, 5	+ 14, 2	m.
1829. Genn. 3.	0, 78	+11, 61	12, 39	48, 59	27. 10, 10	+ 1, 7	+ 2, 3	+ 13, 5	b.
9.	27. 49, 48	+10, 81	0, 29	59, 69	9, 10	+ 1, 4	+ 1, 7	+ 2, 7	s.
16.	46, 87	+ 9, 88	27. 56, 75	11. 4, 23	8, 60	+ 0, 6	+ 1, 0	— 0, 2	s.

γ Lupo Δ"=85.° 13'. 25", 09. P.

1829. Lugl. 1.	85. 4.42, 09	—32, 66	85. 4. 9, 43	9. 15, 66	28. 1, 00	+18, 9	+19, 7	+ 13, 7	o.
5.	54, 73	—31, 71	23 02	2, 07	27. 11, 60	+21, 5	+21, 9	+ 18, 5	s.
8.	48, 51	—31, 00	17, 51	7, 58	27. 11, 70	+21, 8	+21, 7	+ 13, 8	o.
13.	46, 40	—29, 81	16, 59	8, 50	28. 1, 50	+21, 3	+22, 0	+ 15, 1	o.

δ Lupo Δ"= 84.° 39'. 37", 22. P.

1829. Luglio 1.	84.31. 38, 72	—36, 24	84. 31. 2, 48	8. 34, 74	28. 1, 00	+18, 9	+19, 7	+ 6, 6	o.
5.	49, 88	—36, 06	13, 82	23, 40	27. 11, 60	+21, 5	+21, 9	+ 10, 9	s.
7.	45, 86	—35, 97	9, 89	27, 33	28. 1, 25	+21, 3	+21, 5	+ 10, 7	s.
8.	44, 91	—35, 93	9, 98	28, 24	27. 11, 70	+21, 8	+21, 7	+ 6. 7	o.

ς Argo nella poppa Δ"=84°. 10'. 20",65. P.

1829. Aprile 8.	84. 2. 39, 93	—32, 58	84. 2. 7, 35	8. 13, 30	27. 11, 10	+11, 0	+11, 6	+ 10, 6	s.

κ Scorpione Δ"= 83.° 34'. 31", 57. P.

1828. Magg. 25.	83. 26. 58, 70	— 2, 06	83. 26. 56, 64	7. 34, 93	27. 1, 18	+16, 5	+16, 0	+ 1, 1	m.
Giugno 5.	27. 4, 89	— 3, 02	27. 1, 87	29, 70	27. 11, 35	+19, 0	+19, 0	— 2, 8	s.
19.	10, 62	— 4, 30	6, 32	25, 25	28. 3, 27	+20, 3	+20, 3	+ 3, 9	b.
Luglio 16.	14, 44	— 6, 79	7, 65	23, 92	27. 11, 10	+19, 5	+19, 2	+ 2, 1	s.
30.	8, 86	— 7, 91	0, 95	30, 62	27. 11, 35	+19, 0	+18, 8	— 3, 3	s.
31.	10, 78	— 7, 99	2, 79	28, 78	28. 1, 85	+19, 3	+19, 3	— 0, 6	s.
1829. Marzo 12.	26. 26, 13	+ 0, 57	26. 26, 70	8. 4, 87	27. 11, 55	+ 4, 2	+ 4, 4	— 3, 9	s.
19.	38, 01	+ 0, 31	38, 32	7. 53, 25	28. 1, 25	+ 5, 2	+ 5, 4	+ 7, 7	b.
Aprile 11.	46, 83	— 0, 60	46, 23	45, 34	27. 8, 80	+ 8, 6	+ 8, 9	+ 1, 1	s.
25.	54, 24	— 1, 39	52, 85	38, 72	28. 0, 90	+12, 7	+13, 0	+ 3, 8	o.
Magg. 13.	59, 54	— 2, 68	56, 86	34, 71	27. 11, 75	+14, 5	+14, 6	+ 2, 5	o.
Giug. 10.	55, 72	— 5, 14	50, 58	40, 99	28. 2, 15	+14, 8	+15, 3	— 2, 1	o.
15.	27, 8, 93	— 5, 63	27. 3, 30	28, 27	28. 3, 00	+17, 4	+17, 3	+ 7, 2	o.
22.	6, 72	— 6, 32	0, 40	31, 17	28. 1, 75	+17, 4	+17, 5	+ 2, 2	b.
Lugl. 12.	15, 41	— 8, 17	7. 24	24, 33	27. 11, 35	+19, 6	+19, 6	+ 1, 2	b.

γ Gru Δ"= 82°. 49' 1", 67. P.

1828. Sett. 23.	82.41.48, 26	+20, 79	82. 42. 9, 05	6. 52, 62	28. 3, 05	+15, 5	+15, 0	+ 7, 3	o.
24.	48, 94	+20, 67	9, 61	52, 06	3, 35	+15, 7	+15, 5	+ 7, 1	o.
25.	48, 58	+20, 54	9, 12	52, 55	3, 35	+16, 0	+16, 1	+ 5, 4	o.
26.	53, 06	+20, 42	13, 48	48, 19	3, 05	+17, 0	+17, 0	+ 7, 6	s.
30.	51, 23	+19, 93	11, 16	50, 51	1, 35	+16, 7	+16, 3	+ 4, 6	o.
Ott. 1.	56, 20	+19, 81	16, 01	45, 66	0, 94	+16, 9	+16, 8	+ 7, 8	s.
7.	54, 11	+19, 07	13, 18	48, 49	0, 94	+14, 9	+15, 0	+ 8, 6	m.

Mesi
e giorni

f Eridano seg. Δ"= 82.° 48'. 6", 52. P.

Mesi e giorni	Distanza allo Zen. osserv.	Variaz. in decl.	Distanza allo Zen. al principio del 1828	Rifrazione osservata	Barom.	Termometro		Tav. di Carl.	
						unito	esterno		
1828. Genn. 26.	82°40'.59",58	— 4",44	82.°40'.55",14	7.'11",38	28. 4, 68	+ 4°.7	+ 2, 7	+ 16",0	*s.*
Febb. 5.	41. 3, 57	— 5, 19	58, 38	8, 14	28. 3, 77	+ 3, 6	+ 1, 8	+ 20, 4	*s.*
8.	40. 53, 66	— 5, 42	48, 24	18, 28	27. 10, 77	+ 3, 5	+ 2, 0	+ 3, 0	*b.*
11.	40. 59, 25	— 5, 65	53, 60	12, 92	27. 10, 10	+ 1, 5	— 2, 9	+ 19, 0	*s.*

η Lupo Δ"= 82.° 32'. 22, 29. P.

1828. Febb. 6.	82.25.23, 50	— 1, 64	82 25.21, 86	7. 0, 43	28. 3, 77	+ 1, 9	— 1, 1	+ 20, 6	*s.*

μ1 Scorpione Δ"= 82.° 23'. 10", 73. P.

1828. Mar. 13.	82.16.27, 22	— 1, 84	82. 16.25, 38	6.45, 35	28. 3, 10	+ 7, 6	+ 4, 5	+ 14, 8	*s.*
1829. Lugl. 23.	17. 12, 86	—19, 30	53, 56	17, 17	2, 45	+20, 7	+21, 1	+ 9, 3	*s.*
25.	16, 13	— 19, 40	56, 73	14, 00	2, 30	+22, 0	+22, 3	+ 10, 1	*o.*
28.	4, 39	—19, 55	44, 84	25, 89	1, 10	+19, 6	+19, 0	+ 2, 9	*o.*

μ2 Scorpione Δ" = 82.° 21'. 30", 06. P.

1829. Lugl. 29.	82.15. 31, 08	—20, 09	82. 15.10, 99	6. 19, 07	28. 0, 35	+19, 8	+19, 8	+ 6, 2	
31.	32, 11	—20, 39	11, 72	18, 34	1, 00	+19, 9	+20, 0	+ 7, 4	
Agosto 2.	27, 02	—20, 69	6, 33	23, 73	3, 20	+19, 1	+19. 2	+ 6, 0	

υ Scorpione Δ"= 81.° 47'. 22", 53. P.

1828. Apr. 29.	81.41. 17, 97	— 1, 71	81. 41. 16, 26	6. 6, 27	28. 4, 60	+12, 7	+12, 7	+ 12, 3	*s.*
1829. Lugl. 25.	51, 88	—11, 22	40, 66	5.41, 87	2, 35	+21, 7	+21, 9	+ 18, 1	
29.	47, 51	—11, 48	36, 03	46, 50	0, 30	+19, 4	+19, 5	+ 15, 5	
31.	48, 03	—11, 61	36, 42	46, 11	1, 40	+19, 7	+19, 7	+ 16, 7	

γ Telescopio Δ"= 81.° 37'. 21", 50. P.

1829. Lugl. 25.	81.31. 40, 51	— 7, 33	81. 31. 33, 18	5.48, 32	28. 2, 35	+21, 7	+21, 9	+ 5, 0	
29.	38, 55	— 7, 49	31, 06	50, 44	0, 30	+19, 4	+19, 5	+ 4, 9	
31.	38, 46	— 7, 57	30, 89	50, 61	1, 40	+19, 7	+19, 7	+ 5, 5	

β Telescopio Δ"= 81.° 26'. 50", 12. P.

1829. Lugl. 25.	81.21. 12, 98	— 1, 12	81. 21. 11, 86	5.38, 26	28. 2, 35	+21, 7	+21, 9	+ 8, 6	
29	10, 63	— 1, 45	9, 18	40, 94	0, 30	+19, 4	+19, 5	+ 7, 8	
31.	11, 20	— 1, 61	9, 59	40, 53	1, 40	+19, 7	+19, 7	+ 9, 1	

ϑ Lupo Δ"= 80.° 58'. 11", 02. P.

1829. Lugl. 19.	80.53. 19, 79	—26, 89	80. 52.52, 90	5. 18, 12	27. 11, 90	+22, 4	+22, 8	+ 8, 3	*s.*
21.	4, 87	—26, 95	37, 92	33, 10	28. 2, 80	+20, 0	+19, 9	+ 0, 7	*s.*
22.	7, 33	—26, 98	40, 35	30, 67	28. 3, 70	+20, 1	+20, 2	+ 3, 4	*o.*

ϑ Centauro Δ" = 80.° 9'. 30", 22 P.

1828. Febb. 6.	80. 4.25, 31	+ 1, 08	80. 4.26, 39	5. 3, 83	28. 3, 85	+ 2, 0	— 0, 7	+ 37, 0	*m*
1829. Giug. 14.	5. 26, 39	—35, 41	50, 98	4. 39, 28	3, 45	+17, 2	+18, 0	+ 32, 2	*s.*
15.	26, 73	—35, 47	51, 26	38, 96	3, 00	+18, 4	+19, 0	+ 30, 7	*b.*
19.	29, 02	—35, 69	53, 23	36, 89	1, 00	+18, 1	+18, 5	+ 31, 7	*b.*

ε Sagittario Δ' = 79.° 5'. 54", 48. P.

1828. Sett. 11.	79. 1.28, 54	— 2, 91	79. 1.25, 63	4.28, 85	28. 1, 18	+19, 6	+20, 1	+ 9, 5	
12.	34, 58	— 2, 92	31, 66	22, 82	0, 27	+20, 3	+20, 6	+ 15, 2	
25.	28, 32	— 3, 09	25, 23	29, 25	3, 27	+16, 7	+17, 0	+ 14, 8	
30.	30, 95	— 3, 16	27, 79	26, 69	1, 27	+17, 2	+17, 4	+ 15, 2	

Tavola XIII.

α Colomba Δ"= 78.° 49'. 17",94. P.

Mesi e giorni	Distanza allo Zen. osserv.	Variaz. in decl.	Distanza allo Zen. al principio del 1828	Rifrazione osservata	Barom.	Termometro		Tav. di Carl.	
						uuito	esterno		
1828. Genn. 18.	78'44'.21",37	— 4,"32	78.° 44'.16",55	5'. 1",39	28. 9. 02	+ 1°,0	— 0°,3	+ 4",5	
19.	26, 29	— 5, 04	21, 25	4. 56, 69	8, 52	+ 1, 9	+ 0, 5	+ 6, 6	
20.	29, 12	— 5, 27	23, 85	54, 09	5, 35	+ 2, 1	+ 0, 7	+ 7, 1	
21.	32, 20	— 5, 49	26, 71	51, 23	5, 02	+ 3, 0	+ 2, 7	+ 6, 7	
22.	36, 93	— 5, 72	31, 21	46, 73	5, 02	+ 3, 5	+ 2, 3	+ 11, 8	
23.	39, 31	— 5, 94	33, 37	44, 57	3, 27	+ 4, 0	+ 2, 5	+ 12, 1	

ε Scorpione Δ"= 78.° 36'. 46", 74. P.

1829. Lugl. 19.	78.32. 57, 08	—17, 51	78. 32. 39, 57	4. 7, 17	27. 11, 95	+22, 2	+22, 4	+ 15, 6	
21.	52, 02	—17, 61	34, 41	12, 33	28. 2, 80	+20, 0	+19, 9	+ 16, 3	
22.	50, 76	—17, 66	33, 10	13, 64	28. 3, 70	+20, 1	+20, 2	+ 16, 3	

β Pesce Australe Δ"= 77.° 52'.23", 10 P.

1829. Ott. 10.	77.47, 22, 17	+38, 14	77. 48. 0, 31	4. 22, 79	28. 4, 50	+10, 8	+11, 4	+ 1, 0	s.
12.	26, 75	+37, 88	4, 63	18, 47	28. 3, 45	+10, 9	+10, 5	+ 5, 6	b.
28.	30, 34	+35, 79	6, 13	16, 97	27. 11, 50	+10, 4	+10, 0	+ 4, 6	o.

γ2 Sagittario Δ"= 75.° 3'. 30", 80. P.

1829. Lugl. 29.	75. 0. 22, 79	— 1, 60	75. 0, 21, 19	3. 9, 61	28. 0, 30	+19, 4	+19, 4	+ 14, 7	
31.	23, 06	— 1, 77	21, 29	9, 51	1, 40	+19, 7	+19, 7	+ 15, 2	
Agosto 10.	24, 88	— 2, 32	22, 56	8, 24	2. 25	+20, 3	+20, 4	+ 16, 3	

ζ Sagittario Δ" = 74.° 45'. 44', 22. P.

1829. Agos. 15.	74.42. 19, 78	+ 8, 76	74. 42. 28, 54	3. 15, 68	27, 11, 10	+19, 9	+19, 9	+ 3, 4	
16.	18, 35	+ 8, 70	27, 05	17, 17	28. 1, 10	+20, 0	+20, 0	+ 3, 1	
19.	17, 87	+ 8, 53	26, 40	17, 82	28. 0, 60	+19, 8	+19, 9	+ 2, 2	

δ Sagittario Δ"=74.° 32'. 10", 37. P.

1829. Agos. 15.	74.28. 58, 28	+ 0, 62	74. 28. 58, 90	3. 11, 47	27. 11, 00	+19, 8	+19, 3	+ 5, 2	
16.	58, 70	+ 0, 58	59, 29	11, 08	28. 1, 00	+20, 0	+20, 0	+ 6, 1	
19.	57, 85	+ 0, 45	58, 30	12, 07	28. 0, 70	+19, 9	+20, 1	+ 4, 8	

13. Eridano Δ"= 74.° 19'. 55", 12. P.

1829. Dic. 31.	74. 15. 19, 32	+21, 94	74. 15. 41, 26	4. 13, 86	28. 3, 6	— 0, 6	— 0, 3	— 38, 4	s.

ε Pesce Australe Δ"= 72.° 35'. 9", 00. P.

1829. Ott. 10.	72.31. 28, 03	+39, 29	72. 32. 7, 32	3. 1, 68	28. 4, 50	+10, 8	+11, 4	+ 1, 7	
12.	30, 91	+39, 01	9, 92	2. 59, 08	28. 3, 45	+10, 9	+10, 5	+ 4, 6	
28.	32, 93	+37, 02	9, 95	2, 59, 05	27. 11, 50	+10, 4	+10, 0	+ 2, 8	

τ Scorpione Δ"= 72.° 29'. 36", 49. P.

1829 Lugl. 19.	72.27. 14, 93	—17, 57	72. 26. 57, 36	2. 39, 13	27. 11, 90	+22, 4	+22, 8	+ 11, 8	
21.	7, 31	—17, 61	49, 70	46, 79	28. 2, 80	+20, 0	+19, 9	+ 7, 8	
22.	9. 73	—17, 63	52, 10	44, 39	28. 3, 70	+20, 1	+20, 2	+ 10, 4	

φ Sagittario Δ″= 71.° 48′. 11″. 65. P.

Mesi e giorni	Distanza allo Zen. osserv.	Variaz. in decl.	Distanza allo Zen. al principio del 1828.	Rifrazione osservata	Barom.	Termometro		Tav. di Carl.
						unito	esterno	
1828. Giug. 23.	71°45′.23″,14	+ 4″,48	71.° 45.′27″,62	2′. 44″,03	28.ᵖ 0ˡ,43	+21°,0	+21, 0	+ 1″,8
24.	22, 77	+ 4, 46	27, 23	44, 42	0, 93	+20, 4	+20, 0	+ 2, 3
25.	21, 06	+ 4, 45	25, 51	46, 14	2, 35	+18, 0	+17, 8	+ 3, 0
26.	22, 39	+ 4, 43	26, 82	44, 83	1, 52	+18, 6	+18, 3	+ 3, 5
28.	22, 52	+ 4, 40	26, 92	44, 73	27. 11, 93	+20, 0	+20, 0	+ 1, 5
29.	22, 24	+ 4, 39	26, 63	45, 02	28. 1, 77	+20, 2	+20, 2	+ 2, 0
30.	24, 47	+ 4, 37	28, 84	42, 81	0, 18	+21, 2	+21, 5	+ 2, 4
1829. Agos. 19.	25, 32	+ 5, 91	31, 23	40, 42	0, 70	+19, 9	+20, 1	+ 6, 1
20.	26, 42	+ 5, 87	32, 29	39, 36	27. 11, 05	+20, 5	+20, 7	+ 5, 9
23.	24, 11	+ 5, 75	29, 86	41, 79	28. 2, 20	+19, 7	+20, 0	+ 5, 5

σ Sagittario Δ″= 71°. 8′. 43″, 52. P.

1829. Agost. 15.	71. 6. 1, 72	+ 8, 41	71. 6. 10, 13	2. 33, 39	27. 11, 10	+19, 9	+19, 9	+ 6, 4
16.	2, 53	+ 8, 36	10, 89	32, 63	28. 1, 10	+20, 0	+20, 0	+ 8, 1
19.	4, 21	+ 8, 21	12, 42	31, 10	28. 0, 60	+19, 8	+19, 9	+ 9, 4

λ Sagittario Δ″= 70.° 8′. 58″, 75. P.

1828. Lugl. 1.	70. 6. 37, 84	+ 2, 29	70. 6. 40, 13	2. 18, 62	27. 11, 93	+21, 6	+21, 6	+ 11, 9
2.	37, 33	+ 2, 28	39, 61	19. 14	28. 0, 77	+20, 5	+20. 5	+ 12, 6
3.	38, 68	+ 2, 26	40, 94	17, 81	1, 35	+21, 3	+21, 4	+ 13, 5
4.	41, 91	+ 2, 25	44, 14	14, 61	1, 18	+22, 1	+22, 2	+ 16. 1
1829. Lugl. 31.	38, 56	+ 3, 26	41, 82	16, 93	1, 40	+19, 7	+19, 7	+ 15, 6
Agos. 10.	38, 76	+ 2. 98	41, 74	17, 01	2, 25	+20, 3	+20, 4	+ 15, 4
13.	39, 70	+ 2. 89	42, 59	16, 16	2. 30	+21, 1	+21, 5	+ 15. 5

ζ Capricorno Δ″=67.° 47′. 43″, 26. P.

1828. Lugl. 16.	67. 45. 19, 20	+20, 60	67. 45. 39, 80	2. 3, 46	27. 11, 53	+19, 0	+18, 9	+ 11, 3
17.	18, 59	+20, 64	39, 23	4, 03	28. 0, 27	+19, 5	+19, 1	+ 11, 0
18.	17, 46	+20, 67	38, 13	5, 13	0, 53	+20, 8	+20, 7	+ 8, 7
20.	22, 55	+20, 74	43, 29	1. 59. 97	27. 10, 35	+21, 9	+21, 9	+ 12, 6
21.	19, 02	+20, 78	39, 80	2. 3, 46	11, 85	+22, 0	+22, 0	+ 9. 6
22.	19, 69	+20, 81	40, 50	2, 76	11, 60	+21, 8	+21, 8	+ 10, 3
24	18, 20	+20, 88	39, 08	4, 18	28. 0, 35	+21, 7	+21, 9	+ 9, 2
25.	19, 63	+20, 91	40, 54	2, 72	27. 11, 85	+22, 0	+22, 0	+ 10, 4
26	19, 41	+20, 95	40, 36	2, 90	27. 11, 53	+22, 6	+22, 6	+ 9, 7
28.	15, 07	+21, 02	36, 09	7, 17	10, 68	+20, 1	+19, 6	+ 6, 9
29.	15, 99	+21, 05	37, 04	6, 22	11, 10	+18. 5	+18. 5	+ 8. 7

π Sagittario Δ″= 65°. 55′. 57″, 89. P.

1828. Giug 23.	65. 53. 55, 99	+ 6, 77	65. 54, 2, 76	1. 55, 13	28. 0, 43	+21, 0	+21, 0	+ 7, 4
24.	55, 33	+ 6, 79	2, 12	55, 77	0, 93	+20, 4	+20, 0	+ 7, 5
25.	51, 08	+ 6, 81	53. 57, 89	2 0, 00	2, 35	+18, 0	+17, 8	+ 5, 1
28.	57, 00	+ 6, 87	54. 3, 87	1. 54, 02	27. 11, 93	+20, 0	+20, 0	+ 8, 9
29.	56, 00	+ 6, 89	2, 89	55, 00	28. 1, 77	+20, 2	+20, 2	+ 8, 5
30.	57, 03	+ 6, 91	3, 94	53, 95	0, 18	+21, 2	+21, 5	+ 8, 2
Lugl. 1.	56, 23	+ 6, 93	3, 16	54, 73	27 11, 93	+21, 6	+21, 6	+ 7, 3
2.	56, 94	+ 6, 95	3, 89	54, 00	28. 0, 77	+20, 5	+20, 5	+ 9, 0
3.	56, 94	+ 6, 97	3, 91	53, 98	1, 35	+21, 3	+21. 4	+ 8, 7
4.	54, 91	+ 6, 99	1, 90	55, 99	1, 18	+22, 1	+22, 2	+ 6, 2

Tavola VI

d Sagittario Δ''=63.°53'.47'',36. P.

Mesi e giorni	Distanza allo Zenit osserv.	Variaz. in decl.	Distanza allo Zen. al principio del 1828	Rifrazione osservata	Barom.	Termometro		Tav. di Carl.
						unito	esterno	
1828. Lugl. 16.	63.51.47, 29	+ 8, 07	63. 51.55, 36	1.52, 00	27. 11, 35	+19, 3	+19, 2	+ 0, 5
18.	51, 94	+ 8, 11	52. 0, 05	47, 31	28. 0, 52	+21, 3	+21, 3	+ 4, 5
19.	50, 06	+ 8, 13	51, 58, 19	49, 17	27. 11, 43	+21, 4	+21, 4	+ 2, 2
25.	52, 02	+ 8, 25	52. 0, 27	47, 09	27. 11, 85	+22, 9	+23, 0	+ 3, 7

π Capricorno Δ''=63.° 24'. 50'', 04. P.

1829. Lugl. 19.	63.22.44, 19	+25, 27	63. 23. 9, 46	1.40, 58	27. 11, 80	+21, 3	+21, 3	+ 8, 7
21.	41, 22	+25, 32	6, 54	43, 50	28. 3, 70	+18, 7	+17, 5	+ 9, 0
23.	40, 41	+25, 36	5, 77	44, 27	2, 40	+20, 0	+20, 1	+ 6, 5
24.	41, 25	+25, 38	6, 63	43, 41	2, 25	+20, 7	+20, 6	+ 7, 1
25.	41, 42	+25, 40	6, 82	43, 22	2, 45	+21, 4	+21, 6	+ 6, 8
28.	40, 18	+25, 47	5, 65	44, 39	0, 90	+18, 8	+18, 2	+ 6, 8
29.	40, 56	+25, 49	6, 05	43, 99	0, 35	+19, 2	+19, 2	+ 6, 5
31.	40, 24	+25, 54	5, 78	44, 26	1, 45	+19, 2	+19, 3	+ 6, 5
Agosto 1.	38, 08	+25, 56	3, 64	46, 40	2, 25	+18, 4	+18, 3	+ 5, 2
2.	39, 49	+25, 58	5, 07	44, 97	3, 60	+18, 6	+18, 6	+ 6, 9

9.
be le pl
e comp
d'estate
rifrazio

Tavola XVI.

9. L'esposta serie di rifrazioni osservate fino alle più piccole altezze e da entrambe le plaghe australe e boreale del meridiano abbraccia l'intervallo di oltre un anno e comprende pure le quantità della rifrazion vera per le diverse ore della notte così d'estate come d'inverno. In vista di tali circostanze che possono influire a modificare le rifrazioni mi è sembrato che la serie medesima non sarà inutile porgendo essa la materia di confronti moltiplici sull' argomento. Ad averne però sott'occhio più facilmente le principali condizioni e influenze ho divisato di ricavar dalle tavole che precedono il seguente prospetto

TAVOLA GENERALE DELLE RIFRAZIONI OSSERVATE.

RIFRAZIONI BOREALI

Distanze app. allo Zenit.	Numero delle osservazioni	Medii delle differ. colle tavole di Carlini	Limiti delle differenze colla tav. di Carlini risp. ai medii		Mesi delle massime differenze in meno e in più	Ore di questi limiti in tempo *v.* prossim.
			in meno	in più		
89.° 26′	8	— 130″,01	— 47″,1	+ 70″,0	Ag. — Ott.	14.^{h} — 10.^{h}
89. 22	4	— 59, 90	23, 6	29, 9	Apr. — Mar.	10. — 12.
89. 8	43	— 71, 67	52, 0	53, 1	Lug. — Mar.	10. — 17.
88. 50	7	— 28, 06	50, 8	36, 5	Ott. — Feb.	16. — 8.
88. 44	4	— 10, 75	39, 4	32, 9	Dic. — Mar.	15. — 9.
88. 17	13	— 16, 67	25, 5	37, 3	Gen. — Feb.	9. — 7.
88. 9	11	— 6, 96	38, 2	38, 6	Nov. — Dic.	11. — 9.
87. 51	16	— 2, 35	11, 0	14, 0	Lug. — Giug.	8. — 10.
87. 21	15	+ 5, 00	14, 4	21, 4	Mag. — Giug.	10. — 8.
86. 38	8	+ 1, 00	22, 3	11, 7	Feb. — Giug.	16. — 9.
86. 26	38	+ 2, 67	16, 7	12, 4	Lug. — Ott.	13. — 7.
86. 24	12	+ 6, 13	17, 4	11, 8	Nov. — Dic.	8. — 6.
85. 54	2	+ 8, 30	10, 1	10, 1	Gen. — Feb.	19. — 17.
85. 46	13	+ 8, 89	6, 8	13, 5	Apr. — Nov.	9. — 19.
85. 21	11	+ 7, 88	4, 2	3, 2	Mar. — Mar.	8.
85. 1	11	+ 8, 18	8, 5	12, 3	Gen. — Gen.	6.
83. 50	2	+ 6, 00	5, 7	5, 7	Nov. — Nov.	19.
82. 48	6	+ 11, 30	4, 7	4, 2	Mar. — Mar.	6.
82. 47	6	+ 3, 55	2, 5	2, 4	Ott. — Ott.	8.
82. 35	3	+ 7, 73	3, 9	4, 6	Gen. — Gen.	6.
82. 17	1	+ 8, 30	. . . .	. . . .	Dic.	19
80. 37	16	+ 6, 20	6, 2	4, 5	Dic. — Dic.	6.
79. 40	6	— 0, 28	2, 6	1, 9	Apr. — Apr.	11.
77. 59	6	— 4, 73	2, 5	2, 4	Ott. — Ott.	10.
77. 55	3	+ 2, 93	4, 3	4, 0	Nov. — Nov.	19.
77. 18	3	+ 3, 83	4, 7	4, 8	Nov. — Ott.	9. — 11.
77. 4	1	— 1, 40	. . .	. . . .	Dic.	18.
76. 16	2	+ 3, 95	1, 2	1, 1	Febb. — Febb.	8.
75. 57	7	— 2, 16	2, 7	5, 1	Giug. — Mag.	8. — 10.
75. 43	3	+ 0, 27	0, 3	0, 4	Gen. — Feb.	7. — 5.
74. 7	2	— 4, 35	0, 6	0, 7	Nov. — Nov.	18.
74. 1	2	— 1, 90	0, 6	0, 6	Ott. — Ott.	7.
73. 26	3	— 3, 47	2, 5	1, 7	Nov. — Nov.	18.
73. 24	2	+ 1, 55	0, 5	0, 4	Feb. — Feb.	7.
72. 38	6	— 0, 20	5, 6	6, 1	Nov. — Nov.	8.
72. 29	3	— 1, 80	0, 8	1, 4	Giug. — Giug.	8.
71. 30	3	— 3, 10	1, 5	0, 3	Ott. — Ott.	8.
70. 7	4	— 0, 05	2, 3	3, 6	Gen. — Gen.	6.
70. 0	1	— 0, 40	. . . .	. . . .	Nov.	19.
67. 57	2	+ 0, 65	1, 3	1, 2	Mar. — Mar.	7.
65. 30	3	— 2, 30	1, 4	1, 6	Nov. — Nov.	18.
65. 3	8	— 2, 53	3, 9	4, 3	Nov. — Nov.	8.
64. 35	4	— 1, 78	4. 1	3, 1	Nov. — Nov.	9.
58. 39	1	— 6, 60	. . . .	. . . .	Dic.	18.

325 numero totale delle osservazioni

Distanze	Nume

RIFRAZIONI AUSTRALI

Distanze app. allo Zenit.	Numero delle osserva-zioni	Medii delle differ. colle tavole di Carlini	Limiti delle differenze colla tav. di Carlini risp. ai medii		Mesi delle massime differenze in meno e in più	Ore di questi limiti in tempo *v.* prossim.
			in meno	in più		
88.° 52'	6	— 43,"40	— 14",5	+ 16",4	Nov. — Ott.	9.^{h} — 11.^{h}
88. 55	1	— 28, 90	. . . .	. . . .	Lug.	15.
88. 53	3	— 34, 85	15, 9	10, 2	Giug. — Giug.	10.
88. 52	1	— 9, 00	. . . .	. . . .	Giug.	9.
88. 39	7	— 10. 34	28, 7	42, 4	Ag. — Nov.	13. — 7.
88. 30	11	— 7, 54	14, 7	20, 6	Ott. — Ott.	12.
88. 23	1 (*)	+ 50, 20	. . . .	. . . .	Giug.	9.
88. 4	1	— 53, 80	. . . .	. . . .	Gen.	7.
87. 37	24	+ 22, 07	23, 8	28, 4	Ott. — Dic.	11. — 7.
87. 26	12	+ 27, 38	15, 1	18, 4	Mar. — Mar.	7.
87. 24	4	+ 16, 15	3, 2	3, 3	Giug. — Lug.	11. — 9.
87. 21	6	+ 3, 83	11, 2	11, 1	Mar. — Mar.	8.
87. 9	1	+ 13, 80	. . . .	. . . .	Apr.	7.
86. 51	4	+ 14, 38	4, 1	7, 7	Giug. — Giug.	9.
86. 4	14	+ 8, 16	11, 9	8, 5	Giug. — Mar.	8. — 14.
85. 52	6	+ 7, 67	6, 4	11, 0	Giug. — Feb.	9. — 17.
85. 51	3	+ 25, 17	9, 3	13, 3	Giug. — Feb.	9, — 17.
85. 44	7	+ 16, 43	6, 1	9, 7	Apr. — Apr.	8.
85. 28	7	+ 12, 27	12, 5	13, 8	Gen. — Gen.	7.
85. 4	4	+ 15, 28	1, 6	3, 2	Lug. — Lug.	8.
84. 31	4	+ 8, 73	2, 1	2, 2	Lug. — Lug.	8.
84. 2	1	+ 10, 60	. . . .	. . . .	Apr.	6.
83. 27	15	+ 1, 34	5, 2	6, 4	Mar. — Giug.	18. — 12.
82. 42	7	+ 6, 92	2, 3	1, 7	Sett. — Ott.	10. — 8.
82. 41	4	+ 14, 60	11, 6	5, 8	Feb. — Gen.	6. — 8.
82. 25	1	+ 20, 60	. . . .	. . . .	Feb.	18.
82. 17	4	+ 9, 28	6, 4	5, 5	Lug. — Mar.	9. — 17.
82. 15	3	+ 6, 53	0, 5	0, 9	Ag. — Lug.	7. — 9.
81. 42	4	+ 15, 65	3, 4	2, 4	Apr. — Lug.	16. — 10.
81, 32	3	+ 5, 13	0, 2	0, 4	Lug. — Lug.	10.
81. 21	3	+ 8, 50	0, 7	0, 6	Lug. — Lug.	10.
80. 53	3	+ 4, 13	3, 4	4, 2	Lug. — Lug.	8.
80. 5	4	+ 32, 90	2, 2	4, 1	Giug. — Feb.	8. — 16.
79. 1	4	+ 13, 68	4, 2	1, 5	Sett. — Sett.	7.
78. 44	6	+ 6, 13	1, 6	6, 1	Gen. — Gen.	10.
78. 33	3	+ 16, 07	0, 5	0, 2	Lug. — Lug.	9.
77. 48	3	+ 3, 73	2, 7	1, 9	Ott. — Ott.	9.
75. 0	3	+ 15, 40	0, 7	0, 9	Lug. — Ag.	10. — 8.
74. 42	3	+ 2, 90	0, 7	0, 5	Ag. — Ag.	9.
74. 29	3	+ 5, 37	0, 6	0, 7	Ag. — Ag.	9.
74. 16	1	— 38, 40	. . . .	. . . .	Dic.	9.
72. 32	3	+ 3, 03	1, 3	1, 6	Ott. — Ott.	9.
72. 27	3	+ 10, 00	2, 2	1, 8	Lug. — Lug.	9.
71. 45	10	+ 3, 40	1, 9	2, 7	Giug. — Ag.	13. — 9.
71. 6	3	+ 7, 97	1, 6	1, 4	Ag. — Ag.	9.
70. 7	7	+ 14, 37	2, 5	1, 7	Lug. — Lug.	11.
67. 46	11	+ 9, 85	3, 0	2, 7	Lug. — Lug.	14.
65. 54	10	+ 7, 68	2, 6	1, 3	Giug. — Lug.	13. — 11.
63. 52	4	+ 2, 73	2, 2	1, 8	Lug. — Lug.	11.
63. 23	10	+ 7, 00	1, 8	2, 0	Ag. — Lug.	13. — 11.

266 numero totale delle osservazioni.

(*) È verisimile che nell' osservazione unica della stella ε Lupo leggendone l' altezza io abbia preso lo sbaglio di 1'; poichè la differenza troppo forte colla tavola di *Carlini*, e in senso opposto alle altre stelle osservate, non potrebbe attribuirsi alla declinazion calcolata o del catalogo.

12. Fin quì ho paragonato le mie rifrazioni colle sole tavole del Sig. *Carlini*, ma non volli ommettere un qualche paragone ancora colle altre migliori tavole moderne, e ristringendomi per queste a un picciol numero di osservazioni ottenni le differenze che soggiungo.

STELLE	GIORNI delle osservazioni	Differenze fra le rifrazioni osservate e le calcolate secondo le tavole o formule di						
		Piazzi S. A. L. V.	Delambre B. *d.* L.	Carlini E. M. 1823	Bessel F. A.	Bessel VII. Ab.	Brioschi C. A.	Ivory P. T.
ψ Orsa magg.	1829. Ag. 22	— 144″,1	— 70″,8	— 197″,1	— 55″,8	— 8″,5	— 112″,3	— 114″,7
. . . . .	Ott. 30	— 32, 8	— 1, 7	— 59, 0	+ 66, 2	+ 128, 8	+ 2, 2	+ 2, 0
α Auriga	Mar. 19	— 48, 2	— 34, 0	— 54, 7	+ 16, 1	+ 14, 1	— 31, 0	— 27, 6
. . . . .	Lug. 7	— 35, 6	— 0, 6	— 96, 1	— 7, 7	+ 5, 0	— 46, 0	— 46, 0
τ Ercole	Genn. 25	— 8, 7	— 8, 8	0, 0	+ 10, 9	+ 11, 6	— 6, 4	— 0, 3
. . . . .	Ott. 30	— 41, 4	— 39, 1	— 45, 6	— 32, 9	— 28, 9	— 47, 4	— 43, 4
r^2 Andromeda	Mag. 12	— 2, 7	+ 3, 6	— 3, 6	— 5, 8	. . .	— 12, 7	— 8, 8
. . . . .	Mag. 29	+ 11, 1	+ 17, 5	+ 8, 5	+ 5, 0	. . .	+ 0, 1	+ 5, 0
l Orsa magg.	Lug. 25	— 11, 6	— 0, 1	— 7, 5	— 15, 3	. . .	— 16, 6	— 14, 4
. . . . .	Nov. 10	— 0, 9	+ 2, 5	+ 5, 9	— 3, 6	. . .	— 0, 9	— 1, 4
Lucerta 141 P.	Mar. 18	+ 9, 6	+ 3, 0	+ 11, 2	+ 2, 3	. . .	+ 2, 2	+ 5, 6
. . . . .	Apr. 28	+ 3, 7	+ 2, 1	+ 4, 4	— 3, 4	. . .	— 3, 9	— 3, 4
β Dragone	1828. Mar. 4	+ 6, 6	+ 9, 9	+ 14, 8	+ 9, 4	. . .	+ 9, 8	+ 12, 1
ϑ Orsa magg.	1828. Ott. 7	— 4, 5	— 2, 0	+ 1, 1	— 4, 5	. . .	— 4, 2	— 2, 6
γ Orsa magg.	1827. Dic. 8	+ 3, 0	— 2, 5	+ 0, 3	— 3, 4	. . .	— 3, 1	— 1, 4
. . . . .	1827. Dic. 24	+ 13, 4	+ 8, 7	+ 10, 7	+ 7, 2	. . .	+ 7, 5	+ 8, 6
ϑ Dragone	1828. Feb. 8	+ 2, 0	+ 3, 7	+ 5, 1	+ 2, 7	. . .	+ 2, 5	+ 4, 0
δ Cassiopea	Giug. 2	— 9, 8	— 5, 9	— 4, 9	— 7, 5	. . .	— 7, 2	— 6, 6
ε Cassiopea	Ciug. 15	— 1, 1	— 3, 3	— 2, 6	— 4, 7	. . .	— 4, 4	— 3, 7
α Dragone	Gen. 20	+ 5, 1	+ 2, 8	+ 3, 5	+ 2, 2	. . .	+ 2, 1	+ 2, 9
ϰ Fenice	1829. Nov. 22	— 62, 0	— 62, 1	— 57, 9	— 16, 0	+ 44, 6	— 48, 7	— 45, 4
δ2 Gru	Lug. 5	+ 19, 9	+ 47, 2	— 28, 9	+ 32, 4	+ 19, 6	+ 3, 4	+ 3, 8
δ1 Gru	Ag. 22	— 13, 9	+ 5, 6	— 38, 7	— 3, 1	+ 9, 8	— 25, 3	— 22, 3
. . . . .	Nov. 22	— 36, 2	— 44, 2	— 37, 8	— 11, 3	— 10, 5	— 36, 1	— 32, 1
γ Fenice	Ott. 12	+ 5, 1	+ 12, 7	— 6, 8	+ 15, 5	. . .	— 4, 3	+ 1, 0
. . . . .	Nov. 21	— 21, 0	— 24, 1	— 15, 8	+ 2, 9	. . .	— 18, 2	— 13, 9
α Fenice	1828. Gen. 5	+ 39, 1	+ 39, 1	+ 45, 3	+ 48, 3	. . .	+ 35, 3	+ 41, 0
. . . . .	1828. Sett. 25	+ 13, 3	+ 21, 7	+ 5, 1	+ 8, 6	. . .	+ 2, 3	+ 5, 5
ϰ Scorpione	1829. Mar. 19	+ 6, 5	+ 3, 0	+ 7, 7	+ 2, 0	. . .	+ 2, 5	+ 4, 6
. . . . .	1829. Lug. 12	— 2, 9	— 0, 6	+ 1, 2	— 4, 8	. . .	— 4, 2	— 2, 9

„ la densità degli strati atmosferici, certa cosa è che ne vengon cangiate le dimensioni assolute della curva descritta „ dalla luce; ma basta che queste curve siano tutte tangenti alla medesima visuale perchè l'effetto in totalità che può „ misurarsi, ed è quanto dir la rifrazione, risulti la stessa relativamente a queste curve diverse (§. XXXVII.) „.

14. In mezzo alla oscurità e complicazione di cose che nasconde tuttora la legge e l' andamento preciso delle rifrazioni astronomiche a piccole altezze su l' orizzonte, si travede non pertanto il cammino che è da battere per avanzarci anche da questa parte, ed io affermai dapprincipio che già è stato fatto un passo rimarchevole che mette su tale cammino e lo dischiude alle indaggini ulteriori. Cade quì in acconcio il rammentarsi che la teorica delle rifrazioni fondata su fisici principii esprime la quantità del fenomeno dipendentemente da tre costanti le quali sono: 1.ª una costante relativa e proporzionale alla forza rifrattiva dell' aria per una data densità e temperatura dell' aria stessa e corrispondentemente ad un' altezza data, che si suol prendere di 45.° 2.ª un coefficiente relativo alle variazioni della densità dell' aria indicate dall'altezza del barometro, la quale costante barometrica è uguale al prodotto di 28 pollici nella densità del mercurio diviso per l' altro prodotto della densità dell'aria nel raggio della terra: 3.ª un coefficiente relativo alla diminuzion del calore nei diversi strati dell' atmosfera. Nelle tavole del Sig. *Carlini* la prima di queste costanti è =58",0; la seconda costante =0,001236; la terza = 25,3 nel meridiano al Nord e =28,0 nel meridiano al Sud. Ora la prima costante è assolutamente invariabile, non vedendosi ragion fisica per cui debba esser diversa la forza rifrattiva dell'aria nelle uguali circostanze o per gli stessi elementi di altezza, di densità e di temperatura. Ma non può dirsi altrettanto delle altre due costanti accennate, le quali non escludono di lor natura la possibilità di piccole variazioni dai valori di esse che siansi una volta coll' osservazione o coll' esperienza determinati; e già tutto induce a credere che

sian esse realmente variabili col diverso stato barometrico e termometrico dell'atmosfera. Sotto questo aspetto il problema delle rifrazioni conformasi alle altre parti dell'astronomia teorica, nelle quali ognora trattasi di stabilir alcune costanti ad epoche date o per date combinazioni, e poscia di determinar le picciole variazioni delle costanti medesime al cangiar delle combinazioni o dei tempi. Rimane dunque da conoscere per le rifrazioni prossime all'orizzonte la forma analitica delle variazioni di due costanti, alla quale rispondono poi le quantità osservate. Che una simile ricerca sia ormai necessaria per compierne la teorica delle rifrazioni ce ne ha dato prova il Sig. prof. *Plana*, ove calcolando egli alcune osservazioni del Sig. *Oriani* (Mem. cit. §. XXXIX.) dimostrò esser fra loro diversi i valori che s' incontrano per uno dei due parametri, ossia delle due costanti della formula del Sig. *Ivory*, comecchè l' astronomo di Torino si dichiari persuaso che detta formula o ipotesi dell'inglese matematico ,, ha un deciso vantaggio (§. XL.) sopra le altre finora immaginate e probabilmente ancora su quelle che potrebbero immaginarsi. ,, Quindi rifletteva eziandio l'Autore della Memoria che le trovate diversità nei valori del mentovato parametro dell'*Ivory* sono troppo grandi per attribuirle ad errori d'osservazione, e che è forza considerarle,, come prova di un effetto di una causa realmente esistente ,, locchè è quanto ammettere la variabilità dell' anzidetto parametro nella formula giudicata la più consentanea alle osservazioni. Tale se non m'appongo è il nuovo passo rivolto a progredir nell' esatta espression delle rifrazioni per le picciole altezze e fino all' orizzonte.

15. Checche ne sia dell' idea e possibilità di raggiungere le picciole variazioni delle costanti di rifrazione, a conferma nondimeno delle differenze avvertite dal Sig. prof. *Plana* ho amato io pure di calcolar i valori del parametro suddetto, desumendoli dal confronto delle tavole del Sig. *Ivory* colle mie osservazioni, e adoperando l' identico metodo e calcolo del citato §. XXXIX. che troppo lungo sarebbe il voler quì

richiamare. Trascelte all' uopo le prime dodici osservazioni di stelle circompolari e le prime otto di stelle australi, fra quelle dell' ultima tabella esposta al n.° 12., cominciai dal calcolar per ciascuna l'angolo ausiliario φ delle formule (§. cit.), e ne ottenni per ordine i seguenti valori.

(1) . . $\frac{1}{2}\varphi = 43.^{\circ}\ 7'.\ 20'',7$

(2) = 43. 6. 42, 7

(3) = 41. 54. 18, 3

(4) = 42. 1. 10, 6

(5) = 39. 8. 7, 3

(6) = 39. 7. 14, 1

(7) = 36. 4. 23, 6

(8) = 36. 5. 17, 1

(9) = 33. 20. 31, 0

(10) = 33. 18. 28, 2

(11) = 31. 23. 54, 5

(12) = 31. 25. 16, 7

(13) . . $\frac{1}{2}\varphi = 41.\ 3.\ 53,9$

(14) = 41. 14. 44, 9

(15) = 40. 24. 21, 7

(16) = 40. 16. 58, 6

(17) = 39. 51. 41, 2

(18) = 39. 46. 35, 3

(19) = 36. 56. 34, 2

(20) = 36. 58. 3, 9

Tratte dipoi le altre opportune quantità dalle osservazioni e dalla tavola di rifrazione del Sig. *Ivory* ebbi dal calcolo delle formole (un poco lungo veramente ma non difficile) il risultato dell'equazioni quì appresso, nelle quali entra incognita al 1.° grado il parametro f, che è quello di cui si tratta

(1) $1817'',4 = 1786,5 - 358,1 . f$

(2) $1634,9 = 1784,4 - 356,9 . f$

(3) $1539,0 = 1572,7 - 245,8 . f$

(4) $1572,2 = 1591,1 - 253,0 . f$

(5) $1188,8 = 1214,6 - 109,1 . f$

(6) $1229,5 = 1212,3 - 108,6 . f$

(7) $943,7 = 947,5 - 46,8 . f$

(8) $931,1 = 948,6 - 47,0 . f$

(9) $783,8 = 776,5 - 22,6 . f$

(10) $770,4 = 774,6 - 22,4 . f$

(11) $671,1 = 679,6 - 13,6 . f$

(12) $680,0 = 680,8 - 13,7 . f$

(13) $1450,9 = 1448,4 - 191,6 . f$

(14) $1415,4 = 1473,6 - 201,6 . f$

(15) $1342,2 = 1360,6 - 157,1 . f$

(16) $1340,7 = 1345,6 - 151,7 . f$

(17) $1259,7 = 1295,0 - 134,2 . f$

(18) $1267,7 = 1285,2 - 131,0 . f$

(19) $971,7 = 1013,5 - 59,2 . f$

(20) $1010,9 = 1015,5 - 59,6 . f$

donde finalmente i valori di f nella tavola che sottopongo

Mesi e giorni	Distanza allo Zenit. appar.	Baromet. in poll. inglesi	Termom. ester. di Fahrnheit	Valori di f
1829. Agosto 22.	89.°27'.32"	30,086	73,° 6	—0,08657
Ottobre 30.	89. 27. 21	30,037	49, 2	+0,42276
Marzo 19.	89. 6. 21	29,935	44, 0	+0,13710
Luglio 7.	89. 8. 21	29,948	77, 0	+0,07470
Gennajo 25.	88. 17. 7	29,655	34, 3	+0,23648
Ottobre 30.	88. 17. 1	30,001	48, 7	— 0,15838
Maggio 12.	87. 20.' 37	29,770	63, 3	+0,08120
Maggio 29.	87. 20 54	29,841	66, 0	+0,37234
Luglio 25.	86. 26. 40	30,064	80, 4	—0,32301
Novem. 10.	86. 25. 58	30,117	51, 4	+0,18750
Marzo 18.	85. 45. 31	29,912	45, 5	+0.62500
Aprile 28.	85. 46. 1	29,664	64, 9	+0,05839
Novem. 22.	88. 51. 46	30,046	34, 3	—0,01305
Luglio 5.	88. 54. 48	30,081	78, 4	+0,28869
Agosto 22.	88. 39. 59	30,090	69, 4	+0,11712
Novem. 22.	88. 37. 48	30,081	35, 3	+0,03230
Ottobre 12.	88. 30. 18	30,161	56, 5	+0,26304
Novem. 21.	88. 28. 47	30,250	35, 2	+0,13359
1828. Gennajo 5.	87. 37. 3	29,709	38, 3	+0,70608
Settem. 25.	87. 37. 31	30,135	67, 4	+0,07718

Per medio di tutti questi valori si trova

$$f = + 0{,}19002$$

che vuol dire meno di $\frac{1}{5}$ e più di $\frac{1}{6}$, invece di $\frac{1}{4}$, valore assegnato ad f dal Sig. *Jvory*. Ma le differenze dei singoli precedenti valori di f per verità sono troppo grandi, e il medio aritmetico ne è conseguentemente poco probabile. Io però col presentar tali valori non ho inteso altro fuor di mostrare che il parametro f è soggetto a fortissime variazioni, le quali particolarmente si manifestano a notabile diversità di temperatura, e accadono in contrario senso dalle stelle circompolari alle australi.

SOPRA L'USO DI ALCUNE SERIE
NELLA DETERMINAZIONE DEGLI INTEGRALI DEFINITI.

MEMORIA

DEL CAVALIERE GIULIANO FRULLANI.

Ricevuta adì 13 *Maggio* 1830.

In questa memoria mi propongo di rappresentare col mezzo delle serie l' integrale completo ed indefinito di alcune formole differenziali, onde ricavarne il modo di esprimerle quando che l' integrale di esse debba andare ristretto tra limiti determinati.

Nella scelta degli esempj pe' quali il metodo che sono per esporre può con felice successo adoperarsi, ne ho preferiti alcuni da cui discendono varie riduzioni già dai geometri riconosciute sussistere tra le trascendenti, e che sono particolari casi di più generali trasformazioni che andrò esponendo.

1. Prendiamo a considerare la formola differenziale $\frac{du}{a-\log.u}$ Ponghiamo per semplicità $x=a-\log.u$; e quindi risolvendo in serie rapporto ad u otterremo:

$$u=e^{a}\left[1-x+\frac{x^{2}}{2}-\frac{x^{3}}{2.3}+\frac{x^{4}}{2.3.4}-\text{ec.}\right];$$

ora sostituendo nella data formola in luogo di u la sua espressione in x avremo immediatamente:

$$\frac{du}{a-\log.u}=-e^{a}dx\left[\frac{1}{x}-1+\frac{x}{2}-\frac{x^{2}}{2.3}+\frac{x^{3}}{2.3.4}-\text{ec.}\right];$$

quindi trarremo, integrando indefinitamente:

$$(1)\quad \int \frac{du}{a-\log.u} = -e^{a}\left[\log.x - x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{2.3^2} + \frac{x^4}{2.3.4^2} - \text{ec.}\right]$$
$$+\ \text{cost.}$$

Facciamo attualmente $u = e^{\phi\sqrt{-1}}$; noi ricaveremo dalla equazione $x = a - \log.u$ il corrispondente valore di x che sarà $x = a - \phi\sqrt{-1}$. Di più si faccia $a = r\cos.z$; $\phi = r\sin.z$; cosicchè abbiasi $r = \sqrt{a^2+\phi^2}$; $z = \text{arc.tang.}\ \frac{\phi}{a}$. Noi avremo con queste denominazioni $x = re^{-z\sqrt{-1}}$. Sostituendo questi valori di u e di x nella equazione (1), troveremo:

$$(2)\quad \sqrt{-1}.\int \frac{d\phi(a\cos.\phi - \phi\sin.\phi)}{a^2+\phi^2} - \int \frac{d\phi(\phi\cos.\phi + a\sin.\phi)}{a^2+\phi^2} = \text{cost.}+$$
$$+\sqrt{-1}.e^{a}\left[z - r\sin.z + r^2.\frac{\sin.2z}{1.2^2} - r^3\frac{\sin.3z}{1.2.3^2} + r^4\frac{\sin.4z}{1.2.3.4^2} - \text{ec.}\right]$$
$$-e^{a}\left[\log.r - r\cos.z + r^2\frac{\cos.2z}{1.2^2} - r^3\frac{\cos.3z}{1.2.3^2} + r^4\frac{\cos.4z}{1.2.3.4^2} - \text{ec.}\right];$$

or confrontando tra di loro le parti imaginarie, e pur separatamente tra di loro le parti reali, conseguiremo:

$$(3)\quad \int \frac{d\phi(a\cos.\phi - \phi\sin.\phi)}{a^2+\phi^2} = e^{a}\left[z - r\sin.z + r^2\frac{\sin.2z}{1.2^2} - r^3\frac{\sin.3z}{1.2.3^2} + \text{ec.}\right]$$
$$+\ \text{cost.}$$

$$(4)\quad \int \frac{d\phi(\phi\cos.\phi + a\sin.\phi)}{a^2+\phi^2} = e^{a}\left[\log.r - r\cos.z + r^2\frac{\cos.2z}{1.2^2} - r^3\frac{\cos.3z}{1.2.3^2} + \text{ec.}\right]$$
$$+\ \text{cost.}$$

Se noi applicheremo letteralmente il metodo ed i calcoli precedenti alla formola differenziale $\frac{du}{a+\log.u}$, e se come sopra faremo $r = \sqrt{a^2+\phi^2}$, $z = \text{arc. tang.}\ \frac{\phi}{a}$, troveremo con somma facilità le seguenti riduzioni:

$$(5)\quad \int \frac{d\phi(a\cos.\phi + \phi\sin.\phi)}{a^2+\phi^2} = e^{-a}\left[z + r\sin.z + r^2\,\frac{\sin.2z}{1.2^2} + r^3\,\frac{\sin.3z}{1.2.3^2} + \text{ec.}\right]$$

$$+ \text{cost.}$$

$$(6)\quad \int \frac{d\phi(\phi\cos.\phi - a\sin.\phi)}{a^2+\phi^2} = e^{-a}\left[\log.r + r\cos.z + \frac{r^2\cos.2z}{1.2^2} + \frac{r^3\cos.3z}{1.2.3^2} + \text{ec.}\right]$$

$$+ \text{cost.}$$

2. Se tra di loro aggiungeremo le formole (3), (5) otterremo:

$$(7)\quad \int \frac{d\phi\cos.\phi}{a^2+\phi^2} = \frac{e^{a} + e^{-a}}{2a}\left[z + \frac{r^2\sin.2z}{1.2^2} + \frac{r^4\sin.4z}{1.2.3.4^2} + \frac{r^6}{1.2.3.4.5.6^2} + \text{ec.}\right]$$

$$- \frac{(e^{a} - e^{-a})}{2a}\left[r\sin.z + \frac{r^3\sin.3z}{1.2.3^2} + \frac{r^5\sin.5z}{1.2.3.4\ 5^2} + \text{ec.}\right]$$

$$+ \text{cost.}$$

Parimente sommando la formola (4) con la formola (7) si avrà

$$(8)\quad \int \frac{\phi d\phi.\cos.\phi}{a^2+\phi^2} = \frac{e^{a} + e^{-a}}{2}\left[\log.r + \frac{r^2\cos.2z}{1.2^2} + \frac{r^4\cos.4z}{1.2.3.4^2} + \text{ec.}\right]$$

$$- \frac{(e^{a} - e^{-a})}{2}\left[r\cos.z + \frac{r^3\cos.3z}{1.2.3^2} + \frac{r^5\cos.5z}{1.2.3.4.5^2} + \text{ec.}\right]$$

$$+ \text{cost.}$$

E se dalla formola (3) sottrarremo la formola (5); e quindi dalla formola (4) sottrarremo la (6), noi dedurremo:

$$(9)\quad \int \frac{\phi d\phi.\sin.\phi}{a^2+\phi^2} = \frac{e^{-a} - e^{a}}{2}\left[z + \frac{r^2\sin.2z}{1.2^2} + \frac{r^4\sin.4z}{1.2.3.4^2} + \frac{r^6\sin.6z}{1.2.3.4.5.6^2} + \text{ec.}\right]$$

$$+ \frac{(e^{a} + e^{-a})}{2}\left[r\sin.z + \frac{r^3\sin.3z}{1.2.3^2} + \frac{r^5\sin.5z}{1.2.3.4.5^2} + \text{ec.}\right]$$

$$+ \text{cost.}$$

$$(10)\quad \int\frac{d\phi.\sin.\phi}{a^2+\phi^2}=\frac{e^a-e^{-a}}{2a}\left[\log.r+\frac{r^2\cos.2z}{1.2^2}+\frac{r^4\cos.4z}{1.2.3.4^2}+\text{ec.}\right]$$

$$-\frac{(e^a+e^{-a})}{2a}\left[r\cos.z+\frac{r^3\cos.3z}{1.2.3^2}+\frac{r^5\cos.5z}{1.2.3.4.5^2}+\text{ec.}\right]$$

$$+\ \text{cost}.$$

3. I precedenti risultati potranno tutti facilmente verificarsi col mezzo della differenziazione.

Ma egli è notabile che quelli sviluppi e conseguenti integrali potrebbero anche facilmente conseguirsi mediante la trasformazione delle date funzioni. Posto infatti $a=r\cos.z$; $\phi=r\sin.z$ e quindi $r=\sqrt{a^2+\phi^2}$, $z=\text{arc.tang.}\frac{\phi}{a}$, noi avremo identicamente, come sarà facile di verificare;

$$(11)\quad \frac{a\cos.\phi-\phi\sin.\phi}{a^2+\phi^2}=\frac{ae^a}{a^2+\phi^2}\;\frac{\left(e^{-re^{z\sqrt{-1}}}+e^{-re^{-z\sqrt{-1}}}\right)}{2}$$

$$-\frac{\phi e^a}{a^2+\phi^2}\;\frac{\left(e^{-re^{-z\sqrt{-1}}}-e^{-re^{z\sqrt{-1}}}\right)}{2\sqrt{-1}}.$$

Indi risolvendo in serie gli esponenziali $e^{-re^{z\sqrt{-1}}}$, $e^{-re^{-z\sqrt{-1}}}$, il primo per le potenze di $e^{z\sqrt{-1}}$, il secondo per le potenze di $e^{-z\sqrt{-1}}$ troveremo immediatamente:

$$(12)\quad \frac{a\cos.\phi-\phi\sin.\phi}{a^2+\phi^2}=\frac{ae^a}{a^2+\phi^2}\left[1-r\cos.z+\frac{r^2\cos.2z}{1.2}-\frac{r^3\cos.3z}{1.2.3}+\text{ec.}\right]$$

$$-\frac{\phi e^a}{a^2+\phi^2}\left[r\sin.z-\frac{r^2\sin.2z}{1.2}+\frac{r^3\sin.3z}{1.2.3}-\text{ec.}\right].$$

Or dalle equazioni $a=r\cos.z$, $\phi=r\sin.z$ si ottiene

$$\frac{dz}{d\phi}=\frac{a}{a^2+\phi^2};\qquad \frac{dr}{d\phi}=\frac{\phi}{\sqrt{a^2+\phi^2}};$$

onde si avrà:

$$(13)\quad \frac{a\cos.\phi-\phi\sin.\phi}{a^2+\phi^2}\,d\phi=e^{a}.dz\left[1-r\cos z+\frac{r^2\cos.2z}{1.2}-\frac{r^3\cos 3z}{1.2.3}+\text{ec.}\right]$$

$$-e^{a}dr\left[\sin.z-\frac{r\sin.2z}{2}+\frac{r^2\sin.3z}{1.2.3}-\text{ec.}\right]$$

ove tanto il primo membro quanto il secondo essendo differenziali esatti, conseguiremo integrando:

$$(14)\quad \int\frac{a\cos\phi-\phi\sin.\phi}{a^2+\phi^2}.d\phi=e^{a}\left[z-r\sin.z+\frac{r^2\sin.2z}{1.2^2}-\frac{r^3\sin.3z}{1.2.3^2}+\text{ec.}\right]$$

$$+\text{cost.}$$

come sopra trovammo.

Sempre ritenute le equazioni $r\cos.z=a$; $r\sin.z=\phi$, potranno senze difficoltà verificarsi le identità seguenti:

$$(15)\quad \frac{a\cos.\varphi+\varphi\sin.\varphi}{a^2+\varphi^2}=\frac{ae^{-a}}{a^2+\varphi^2}\;\frac{\left(e^{re^{-z\sqrt{-1}}}+e^{re^{z\sqrt{-1}}}\right)}{2}$$

$$+\frac{\varphi e^{-a}}{a^2+\varphi^2}\;\frac{\left(e^{re^{z\sqrt{-1}}}-e^{re^{-z\sqrt{-1}}}\right)}{2\sqrt{-1}}$$

$$(16)\quad \frac{\varphi\cos.\varphi-a\sin.\varphi}{a^2+\varphi^2}=\frac{\varphi e^{-a}}{a^2+\varphi^2}\;\frac{\left(e^{re^{z\sqrt{-1}}}+e^{re^{-z\sqrt{-1}}}\right)}{2}$$

$$+\frac{ae^{-a}}{a^2+\varphi^2}\;\frac{\left(e^{re^{-z\sqrt{-1}}}-e^{re^{z\sqrt{-1}}}\right)}{2\sqrt{-1}}$$

$$(17)\quad \frac{\varphi\cos.c+a\cos.\varphi}{a^2+\varphi^2}=\frac{\varphi e^{a}}{a^2+\varphi^2}\;\frac{\left(e^{re^{-z\sqrt{-1}}}+e^{re^{z\sqrt{-1}}}\right)}{2}-$$

$$-\frac{ae^{a}}{a^2+\varphi^2}\;\frac{\left(e^{-re^{z\sqrt{-1}}}-e^{-re^{-z\sqrt{-1}}}\right)}{2\sqrt{-1}}.$$

E quì pure svolgendo in serie gli esponenziali che nei secondi membri dipendono da z, e notando che

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{a}{a^2+\varphi^2}, \quad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\varphi}{\sqrt{a^2+\varphi^2}}$$

ritroveremo subito gli integrali che nell'articolo 1 abbiamo assegnati alle formole differenziali

$$\frac{a\cos\varphi + \varphi\sin.\varphi.}{a^2+\varphi^2}.d\varphi, \quad \frac{\varphi\cos.\varphi - a\sin.\varphi}{a^2+\varphi^2}.\,d\varphi, \quad \frac{\varphi\cos.\varphi + a\cos.\varphi}{a^2+\varphi^2}\,d\varphi.$$

Vedremo in appresso che queste identità non altro sono che uno special caso di una trasformazione più generale.

4. Frattanto riprendiamo le formole integrali dimostrate nell' articolo 2.

Incominciando da quella segnata (7) che è la seguente:

$$\int \frac{d\varphi.\cos.\varphi}{a^2+\varphi^2} = \frac{e^a + e^{-a}}{2a}\left[z + \frac{r^2\sin.2z}{1.2^2} + \frac{r^4\sin.4z}{1.2.3.4^2} + \text{ec.}\right]$$

$$- \frac{(e^a - e^{-a})}{2a}\left[r\sin.z + \frac{r^3\sin.3z}{1.2.3^2} + \frac{r^5\sin.5z}{1.2.3.4.5^2} + \text{ec.}\right]$$

$$+ \text{cost.}$$

è manifesto che questa serie la quale finirà sempre con esser convergente, servirà per calcolare il valore di $\int \frac{d\varphi\cos.\varphi}{a^2+\varphi^2}$ qualunque siano i limiti dell'integrale. E se questi limiti esser debbano $\varphi=0$, $\varphi=\infty$, noi riprenderemo le equazioni $r=\sqrt{a^2+\varphi^2}$, $z=\text{arc. tang.}\,\frac{\varphi}{a}$, e ne dedurremo che al limite $\varphi=0$ si ha $r=a$, $z=0$, ed al limite $\varphi=\infty$ si avrà $r=\infty$, $z=\frac{\pi}{2}$, essendo π (noi useremo sempre una tal denominazione nel corso di questa Memoria) il rapporto della circonferenza al diametro, ovvero la mezza periferia circolare del raggio 1.

Ciò premesso, e facendo le indicate sostituzioni nella Equazione precedente, noi avremo tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\infty$,

$$(18) \qquad \int \frac{d\varphi.\cos.\varphi}{a^2+\varphi^2} = \frac{e^a+e^{-a}}{2a} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{(e^a-e^{-a})}{2a} \times$$

$$\left[r - \frac{r^3}{2.3^2} + \frac{r^5}{2.3.4.5^2} - \text{ec.} \right]$$

ove nel secondo membro deve farsi $r = \infty$.

Or se noi faremo principiare con zero l'integrale $\int \frac{\sin.r}{r}\, dr$ noi avremo:

$$\int \frac{\sin.r.dr}{r} = r - \frac{r^3}{2.3^2} + \frac{r^5}{2.3.4\,5^2} - \text{ec.}$$

quindi nel caso di $r = \infty$ la serie $r - \frac{r^3}{2.3^2} + \frac{r^5}{2.3.4.5^2} - \text{ec.}$ sarà eguale all'integrale $\int \frac{\sin.r}{r}\, dr$ esteso tra i limiti $r = 0$, $r = \infty$. Ora in questa ipotesi abbiamo $\int \frac{\sin.r}{r}\, dr = \frac{\pi}{2}$; onde sostituendo nella equazione (18), sarà tra i limiti, $\varphi = 0$, $\varphi = \infty$.

$$\int \frac{d\varphi.\text{ccs}.\varphi}{a^2+\varphi^2} = \frac{e^a+e^{-a}}{2a} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{(e^a-e^{-a})}{2a} \cdot \frac{\pi}{2}$$

ovvero:

$$(19) \qquad \int \frac{d\varphi.\cos\,\varphi}{a^2+\varphi^2} = \frac{\pi}{2a} \cdot e^{-a} .$$

Per richiamare alla mente i limiti tra i quali un dato integrale si estende, userò la notazione adottata da molti geometri di riportare nelle due estremità del segno sommatorio i limiti dell'integrale, cosicchè una integrazione estesa tra i limiti α, β sia indicata dal segno $\int_\alpha^\beta$. Con questa notazione sarà

$$(20) \qquad \int_0^\infty \frac{d\varphi.\text{ccs}.\varphi}{a^2+\varphi^2} = \frac{\pi}{2a}\, e^{-a} .$$

5. L' integrale completo della formola $\frac{\varphi\cos.\varphi.}{a^2+\varphi^2}\, d\varphi$ è dato

nell' articolo 2 dalla equazione

$$\int \frac{\varphi . d\varphi \cos \varphi}{a^2+\varphi^2} = \frac{e^a + e^{-a}}{2}\left[\log . r + \frac{r^2 \cos . 2z}{1.2^2} + \frac{r^4 \cos . 4z}{1.2.3.4^2} + \text{ec.}\right]$$

$$- \frac{(e^a - e^{-a})}{2}\left[r \cos . z + \frac{r^3 \cos . 3z}{1.2.3^2} + \frac{r^5 \cos . 5z}{1.2.3.4.5^2} + \text{ec.}\right]$$

$$+ \text{cost.}$$

Ove abbiamo al solito

$$r = \sqrt{a^2+\varphi^2}; \quad z = \text{arc. tang.}\ \frac{\varphi}{a}.$$

Sarà pertanto tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \infty$

$$(21) \quad \int_0^\infty \frac{\varphi d\varphi . \cos . \varphi}{a^2+\varphi^2} = \frac{e^a + e^{-a}}{2}\left[\log . r - \frac{r^2}{1.2^2} + \frac{r^4}{1.2.3.4^2} - \text{ec.}\right]$$

$$-\frac{(e^a + e^{-a})}{2}\left[\log . a + \frac{a^2}{1.2^2} + \frac{a^4}{1.2.3.4^2} + \text{ec.}\right]$$

$$- \frac{(e^{-a} - e^a)}{2}\left[a + \frac{a^3}{1.2.3^2} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5^2} + \text{ec.}\right]$$

Ove nel secondo membro dovremo porre $r = \infty$.

Ora è noto che per il caso di $r = \infty$ si ha

$$\log . r - \frac{r^2}{1.2^2} + \frac{r^4}{2.3.4^2} - \frac{r^6}{2.3.4.5.6^2} + \text{ec.} = -\text{K}$$

essendo $\text{K} = 0,577215$.

Pertanto avremo, sostituendo:

$$(22) \quad \int_0^\infty \frac{\varphi d\varphi . \cos . \varphi}{a^2+\varphi^2} = \frac{e^a - e^{-a}}{2}\left[a + \frac{a^3}{2.3^2} + \frac{a^5}{2.3.4.5^2} + \text{ec.}\right]$$

$$- \frac{(e^a + e^{-a})}{2}\left[\text{K} + \log . a + \frac{a^2}{1.2^2} + \frac{a^4}{1.2.3.4^2} + \text{ec.}\right].$$

6. Prendiamo ora in esame l' integrale completo $\int \frac{\varphi d\varphi \sin . \varphi}{a^2+\varphi^2}$ dato nell' articolo 2 dalla equazione:

$$\int \frac{\varphi d\varphi . \sin . \varphi}{a^2 + \varphi^2} = \frac{e^{-a} - e^{a}}{2} \left[z + \frac{r^2 \sin . 2z}{1.2^2} + \frac{r^4 \sin . 4z}{1.2.3.4^2} + \text{ec.} \right]$$

$$+ \frac{e^{a} + e^{-a}}{2} \left[r \sin . z + \frac{r^3 \sin . 3z}{1.2.3^2} + \frac{r^5 \sin . 5z}{1.2.3.4.5^2} + \text{ec.} \right]$$

$$+ \text{cost.}$$

Al caso attuale applicando le precedenti avvertenze, troveremo con la facilità maggiore.

$$(23) \quad \int_0^\infty \frac{\varphi d\varphi . \sin . \varphi}{a^2 + \varphi^2} = \frac{e^{-a} - e^{a}}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{(e^{a} + e^{-a})}{2} \cdot \int_0^\infty \frac{\sin . r dr}{r} .$$

E poichè $\int_0^\infty \frac{\sin . r . dr.}{r} = \frac{\pi}{2}$, noi avremo:

$$(24) \quad \int_0^\infty \frac{\varphi d . \varphi \sin . \varphi}{a^2 + \varphi^2} = \frac{\pi}{2} . e^{-a} .$$

Finalmente in modo analogo operando sopra l'integrale completo della formola $\frac{d\phi \sin . \phi}{a^2 + \phi^2}$ dato nel precedente articolo 2 dalla equazione ivi segnata dal numero marginale (10), troveremo con breve calcolo:

$$(25) \quad \int_0^\infty \frac{d\varphi \sin . \varphi}{a^2 + \varphi^2} = \frac{e^{a} + e^{-a}}{2a} \left[a + \frac{a^3}{1.2.3^2} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5^2} + \text{ec.} \right]$$

$$- \frac{(e^{a} - e^{-a})}{2a} \left[\text{K} + \log . a + \frac{a^2}{1.2^2} + \frac{a^4}{1.2.3.4^2} + \frac{a^6}{1.2.3.4.5.6^2} + \text{ec.} \right]$$

7. Le formole (22) (25) sono dovute al ch. Bidone che le ha dimostrate con metodi diversi dai precedenti nella sua dottissima memoria sopra gli integrali definiti inserita negli Atti della Società R. di Torino per l'anno 1812.

Sono dovute al cel. La Place le formole (20) (24) importantissime in questo ramo di analisi. Egli le dimostrò nelle Memorie dell'Accademia delle Scienze di Francia per l' anno 1782 fondandosi per induzione sul passaggio dal reale all'imaginario; e vale a dire cercando di esprimere l' integrale

$\int z^{-\beta} e^{-z} dz$ esteso tra i limiti imaginarj che annullino la formola $z^{-\beta} e^{-z}$, ed applicandovi poi il metodo generale con cui può rappresentarsi l' integrale $\int y dx$ nel caso in cui la funzione y sia $= 0$ ai due limiti dell' integrale: ritenendo che la funzione y non sia suscettibile che di un solo massimo tra quei limiti.

Un tal metodo di dimostrazione potendo andar soggetto a qualche incertezza, volle il La Place dedurre le citate formole da diverso metodo; ed uno ne propose fondato sopra l' alternativa delle integrazioni in un integrale doppio. Indi il ch. Bidone si prevalse per l'oggetto medesimo nella sopra citata Memoria della evoluzione in serie per le potenze ascendenti e discendenti della variabile: mentre già il Le Gendre aveva adoperato un artifizio di calcolo dipendente dal far variare i limiti dell' integrale: così pervenendo ad una semplice equazione lineare del secondo ordine dalla quale la data formola dipende. Finalmente il ch. Poisson ridusse pur esso il problema alla medesima equazione differenziale lineare del secondo ordine, valendosi delle formole

$$\int_0^\infty \cos.x.dx = 0; \quad \int_0^\infty \sin.x.dx. = 1.$$

Può vedersi nella Memoria sopra gli integrali definiti inserita in questo volume stesso un mezzo di pervenire alle formole di che si tratta, appoggiato esso pure alla integrazione doppia: e da questo principio medesimo può dedursi il metodo seguente che applicherò alla formola $\int \frac{\cos.\phi.d\phi}{a^2+\phi^2}$ per un esempio delle avvertenze che in alcuni casi può esigere l' integrazione doppia, onde essere adoperata con buon successo.

La formola $\int_0^\infty \frac{\cos.\phi.d\phi}{a^2+\phi^2}$ può subito ridursi all' altra $\int_0^\infty \frac{\cos.b\phi.d\phi}{1+\phi^2}$; e noi ci accingeremo a determinare il valore di quest' ultima.

Consideriamo la formola

$$z = \int\int e^{-y}\frac{\cos.bx.\sin.xy.dx.dy}{x}$$

ove la integrazione deve farsi tra i limiti $x=0$, $x=\infty$; $y=0$, $y=\infty$. Integrando rapporto ad y noi avremo

$$z = \int_0^\infty \frac{\cos.bx.dx}{1+x^2}.$$

Ora nel dato integrale doppio incominciando ad integrare rapporto ad x, noi dovremo considerare l' integrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos.bx.\sin.xy}{x}\,dx$$

il di cui valore è differente secondo che sia $y<b$, ovvero $y>b$.

Se $y>b$, noi avremo per i noti teoremi:

$$\int_0^\infty \frac{\cos.bx.\sin.xy}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

ma se $y<b$ noi avremo in vece

$$\int_0^\infty \frac{\cos.bx.\sin.xy}{x}\,dx = 0.$$

Ciò premesso, noi potremo dividere l' integrale doppio

$$\int\int e^{-y}\frac{\cos.bx.\sin.xy}{x}\,dx\,dy$$

in due distinte parti: la prima delle quali sia presa tra i limiti

$$x=0,\ x=\infty;\ y=0,\ y=b;$$

e di cui la seconda venga presa tra i limiti

$$x=0,\ x=\infty;\ y=b,\ y=\infty.$$

Ma è facile il convincersi che la prima parte sarà sempre nulla: ed infatti è manifesto che nell' integrare rapporto ad x la formola

$$\iint e^{-y}\frac{\cos.bx.\sin.xy}{x}\,dx.dy,$$

(la quale poi deve essere integrata tra i limiti $y=0, y=b$) noi dovremo ammettere che nell' integrare rapporto ad x sia $y<b$, il che ci dà

$$\int_0^\infty \frac{\cos.bx\ \sin.xy}{x}\,dx=0$$

onde si è in diritto di concludere che tra i limiti $x=0$, $x=\infty$, $y=0$, $y=b$ si ha

$$\iint e^{-y}\frac{\cos\ bx.\sin.xy}{x}\,dx.dy=0\,.$$

Per ottenere l' altra parte del propostoci integrale già stabilimmo che l'integrazione rapporto ad y debba farsi tra i limiti $y=b$, $y=\infty$; il che esige che nella integrazione rapporto ad x si consideri $y>b$. Ora abbiamo quando $y>b$

$$\int_0^\infty \frac{\cos.bx\sin.xy}{x}.\,dx=\frac{\pi}{2}\,;$$

or se noi moltiplicheremo da ambe le parti questa equazione per $e^{-y}dy$, ed integreremo quindi tra i limiti $y=b$, $y=\infty$, troveremo

$$\iint e^{-y}\frac{\cos.bx.\sin.xy}{x}\,.dx.dy=e^{-b}\,\frac{\pi}{2}\,;$$

questo pertanto è il valore dell' integrale doppio Z. Onde infine concluderemo

$$\int_0^\infty \frac{dx.\cos.bx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.\, e^{-b}$$

8. Dopo questa breve digressione riprendiamo alcun'altro esempio del modo di rappresentare in serie l'integrale di formole differenziali analoghe a quelle trattate negli articoli 2. e 3.

Sia data pertanto la formola differenziale

$$\frac{du}{(a+\log.u)^h}$$

ove a, h sono costanti qualunque.

Se noi faremo $(a+\log.u)^h = x$ otterremo $u = e^{-a+x^{\frac{1}{h}}}$; onde in virtù di queste convenzioni sarà

$$(27)\quad \frac{du}{(a+\log.u)^h} = \frac{e^{-a}.dx}{h}\left[x^{\frac{1-2h}{h}} + x^{\frac{2-2h}{h}} + \frac{x^{\frac{3-2h}{h}}}{2} + \frac{x^{\frac{4-2h}{h}}}{2.3} + \text{ec.}\right]$$

ed integrando:

$$(28)\quad \int \frac{du}{(a+\log.u)^h} = e^{-a}\left[\frac{x^{\frac{1-h}{h}}}{1-h} + \frac{x^{\frac{2-h}{h}}}{2-h} + \frac{x^{\frac{3-h}{h}}}{2(3-h)} + \frac{x^{\frac{4-h}{h}}}{2.3.(4-h)} + \text{ec.}\right.$$

$$\left. \ldots\ldots + \frac{x^{\frac{i-h}{h}}}{1.2.3\ldots\ldots(i-1)(i-h)} + \text{ec.}\right] + \text{cost.}$$

Se ora riprenderemo la equazione $x = (a+\log.u)^h$, e faremo $a = e^{q\sqrt{-1}}$, sarà $x = r^h.\, e^{hz\sqrt{-1}}$, purchè si stabilisca

$$a = r\cos.z, \qquad \phi = r\sin z.$$

Quindi trarremo, sostituendo:

$$(29)\quad \sqrt{-1}\int\frac{d\phi.e^{\phi\sqrt{-1}}}{(a+\phi\sqrt{-1})^h}=e^{-a}\left[\frac{r^{1-h}.e^{(1-h)z\sqrt{-1}}}{1-h}+\frac{r^{2-h}.e^{(2-h)z\sqrt{-1}}}{2-h}\right.$$

$$\left.+\frac{r^{3-h}.e^{(3-h)z\sqrt{-1}}}{2(3-h)}+\text{ec.}\ldots+\frac{r^{i-h}.e^{(i-h)z\sqrt{-1}}}{2.3\ldots(i-1)(i-h)}+\text{ec.}\right]+\text{cost.}$$

Paragonando tra di loro le parti imaginarie ricaveremo

$$(30)\quad \int\frac{d\phi.e^{\phi\sqrt{-1}}}{(a+\phi\sqrt{-1})^h}=e^{-a}.r^{-h}\left[\frac{r\sin.(1-h)z}{1-h}+\frac{r^2\sin.(2-h)z}{2-h}+\frac{r^3\sin.(3-h)z}{2(3-h)}+\text{ec.}\right.$$

$$\left.\ldots\ldots\ldots+\frac{r^i\sin\,(i-h)z}{2.3\ldots(i-1)(i-h)}+\text{ec.}\right]+\text{cost.}$$

ove nel primo membro debbono ommettersi le parti imaginarie.

9. Nè qui trascurerò di notare che la trasformazione adoperata sopra la formola differenziale $\frac{du}{(a+\log.u)^h}$ e consecutivo confronto delle parti imaginarie, onde ottenere il completo integrale $\int\frac{d\phi e^{\phi\sqrt{-1}}}{(a+\phi\sqrt{-1})^h}$ potrebbe, come in analogo caso vedemmo all'articolo 4. essere agevolmente supplita, opportunamente disponendo la stessa funzione $\frac{e^{\phi\sqrt{-1}}}{(a+\phi\sqrt{-1})^h}$.

In fatti sarà facile di verificare la identità seguente tra le parti reali:

$$(31)\quad \frac{e^{\phi\sqrt{-1}}}{(a+\phi\sqrt{-1})^h}=$$

$$e^{-a}.r^{-1-h}.\phi\left[\frac{e^{(1-h)z\sqrt{-1}}\,e^{re^{z\sqrt{-1}}}-e^{-(1-h)z\sqrt{-1}}.e^{re^{-z\sqrt{-1}}}}{2\sqrt{-1}}\right]$$

$$+e^{-a}.r^{-1-h}.a\left[\frac{e^{(1-h)z\sqrt{-1}}.e^{re^{z\sqrt{-1}}}+e^{-(1-h)z\sqrt{-1}}.e^{re^{-z\sqrt{-1}}}}{2}\right]$$

purchè si abbia $r.\cos.z=a$, $r.\sin.z=\phi$, ovvero $r=\sqrt{(a^2+\phi^2)}$; $z=\text{arc.tang.}\,\frac{\phi}{a}$.

Se noi svolgeremo in serie il secondo membro della equazione (31) si troverà facilmente:

$$(32)\quad \frac{e^{\phi\sqrt{-1}}}{(a+\phi\sqrt{-1})^h}=e^{-a}.r^{-h}\frac{\phi}{r}\Big[\sin.(1-h)z+r\sin.(2-h)z+r^2\sin.\frac{(3-h)z}{2}$$

$$+\,\ldots\ldots\ldots+\frac{r^{i-1}\sin.(i-h)z}{2.3\ldots(i-1)}+\text{ec.}\Big]$$

$$+e^{-a}.r^{1-a}\frac{a}{r^2}\Big[\cos.(1-h)z+r\cos.(2-h)z+\frac{r^2\cos.(3-h)z}{2}$$

$$+\,\ldots\ldots\ldots+\frac{r^{i-1}\cos.(i-h)z}{2.3\ldots.(i-1)}+\text{ec.}\Big].$$

Ma dalle equazioni

$$r=\sqrt{(a^2+\phi^2)};\ z=\text{Arc. tang.}\,\frac{\phi}{a}$$

si ottiene

$$\frac{\phi}{r}=\frac{dr}{d\phi};\ \frac{a}{r^2}=\frac{dz}{d\phi}$$

onde avremo, sostituendo

$$(33)\quad \frac{e^{\phi\sqrt{-1}}\,d\phi}{(a+\phi\sqrt{-1})^h}=e^{-a}dr\Big[r^{-h}\sin.(1-h)z+r^{1-h}\sin.(2-h)z+\frac{r^{2-h}\sin.(3-h)z}{2}$$

$$+\,\ldots\ldots+\frac{r^{i-1-h}\sin.(i-h)z}{2.3\ldots.(i-1)}+\text{ec.}\Big]$$

$$+e^{-a}dz\Big[r^{1-h}\cos.(1-h)z+r^{2-h}\cos.(2-h)z+\frac{r^{3-h}\cos.(3-h)z}{2}$$

$$+\,\ldots\ldots\ldots+\frac{r^{i-h}\cos.(i-h)z}{2.3\ldots..(i-1)}+\text{ec.}\Big]$$

È manifesto che il secondo membro di questa equazione è una differenziale esatta: e che integrando indefinitamente si avrà come sopra:

$$\int \frac{e^{\phi\sqrt{-1}}d\phi}{(a+\phi\sqrt{-1})^h}=e^{-a}.r^{-h}\left[\frac{r\sin.(1-h)z}{1-h}+\frac{r^2\sin.(2-h)z}{2-h}+\frac{r^3\sin.(3-h)z}{2(3-h)}\right.$$

$$\left.+\ldots\ldots+\frac{r^i\sin.(i-h)z}{2.3\ldots.(i-1)(i-h)}+\text{ec.}\right]+\text{cost.}$$

10. Or se vorremo estendere la formola integrale

$$\int \frac{e^{\phi\sqrt{-1}}d\phi}{(a+\phi\sqrt{-1})^h}$$

tra i limiti $\phi=-\infty$, $\phi=\infty$, noi osserveremo che nel secondo membro della equazione che ne determina l'integrale completo ed indefinito, le quantità r e z dipendono da ϕ in virtù delle equazioni

$$a=r\cos.z; \qquad \phi=r\sin.z:$$

onde dedurremo che ai limiti $\phi=0$, $\phi=\infty$ si avrà rispettivamente $z=-\frac{\pi}{2}$, $z=\frac{\pi}{2}$; e che nel risultato dovrà farsi $r=\infty$.

Sarà pertanto:

$$(34)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\phi.e^{\phi\sqrt{-1}}}{(a+\phi\sqrt{-1})^h}=2e^{-a}.r^{-h}\left[\frac{r\sin.(1-h)\frac{\pi}{2}}{1-h}+\frac{r^2\sin.(2-h)\frac{\pi}{2}}{2-h}\right.$$

$$\left.+\frac{r^3\sin.(3-h)\frac{\pi}{2}}{2(3-h)}+\ldots\ldots+\frac{r^i\sin.(i-h)\frac{\pi}{2}}{2.3\ldots.(i-1)(i-h)}+\text{ec.}\right]$$

Ma poichè

$$\sin.(i-h)\frac{\pi}{2}=\sin.\frac{i\pi}{2}\,.\,\cos.\frac{h\pi}{2}-\cos.\frac{i\pi}{2}\,.\,\sin.\frac{h\pi}{2}$$

noi avremo pure

$$(35)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varphi e^{\varphi\sqrt{-1}}}{(a+\varphi\sqrt{-1})^h}=2e^{-a}.r^{-h}\cos.\frac{h\pi}{2}\left[\frac{r}{1-h}-\frac{r^3}{2(3-h)}+\frac{r^5}{2.3.4.(5-h)}-\text{ec.}\right.$$

$$\left.\ldots\ldots\pm\frac{r^{2n+1}}{2.3\ldots 2n(2n+1-h)}\right]$$

$$+2e^{-a}.r^{-h}\sin.\frac{h\pi}{2}\left[\frac{r^2}{2-h}-\frac{r^4}{2.3.(4-h)}+\frac{r^6}{2.3.4.5.(6-h)}-\text{ec.}\right.$$

$$\left.\ldots\ldots\mp\frac{r^{2n}}{2.3.4\ldots.(2n-1)(2n-h)}\pm\text{ec.}\right]$$

ove dobbiamo porre $r=\infty$, e dove i segni superiori convengono ad n pari, e gli inferiori ad n dispari.

Ma nel caso di r infinito si avrà:

$$\int_0^{\infty} r^{-h}\cos.r.dr=r^{-h}\left[\frac{r}{1-h}-\frac{r^3}{2(3-h)}+\frac{r^5}{2.3.4(5-h)}-\text{ec.}\right.$$

$$\left.\ldots\ldots\pm\frac{r^{2n+1}}{2.3\ldots.2n(2n+1-h)}\mp\text{ec.}\right],$$

$$\int_0^{\infty} r^{-h}\sin.r.dr=r^{-h}\left[\frac{r^2}{2-h}-\frac{r^4}{2.3.(4-h)}+\frac{r^6}{2.3.4.5.(6-h)}-\text{ec.}\right.$$

$$\left.\ldots\ldots\mp\frac{r^{2n}}{2.3\ldots.(2n-1)(2n-h)}\pm\text{ec.}\right]$$

e pertanto sostituendo otterremo:

$$(36)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varphi e^{\varphi\sqrt{-1}}}{(a+\varphi\sqrt{-1})^h}=2e^{-a}\left[\cos.\frac{h\pi}{2}\int_0^{\infty} r^{-h}\cos.r.dr\right.$$

$$\left.+\sin.\frac{h\pi}{2}\int_0^{\infty} r^{-h}\sin.r.dr\right].$$

Questa espressione potrà notabilmente semplificarsi se rammenteremo le note riduzioni:

$$\int_0^{\infty} r^{-h}\cos.rdr=\sin.\frac{h\pi}{2}\int_0^{\infty} e^{-r}\,r^{-h}\,dr$$

$$\int_0^{\infty} r^{-h}\sin.r.dr=\cos.\frac{h\pi}{2}\int_0^{\infty} e^{-r}.r^{-h}\,dr$$

col soccorso delle quali conseguiremo:

$$(37)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\phi.e^{\phi\sqrt{-1}}}{(a+\phi\sqrt{-1})^h}=2e^{-a}\sin.h\pi\int_0^{\infty}e^{-r}.r^{-h}\,dr.$$

È noto pure che tra le trascendenti

$$\int_0^{\infty}e^{-r}.r^{h-1}\,dr,\qquad \int_0^{\infty}e^{-r}.r^{-h}\,dr$$

sussiste la relazione:

$$\int_0^{\infty}e^{-r}.r^{h-1}\,dr\times\int_0^{\infty}e^{-r}.r^{-h}\,dr=\frac{\pi}{\sin.h\pi}$$

ovvero

$$\int_0^{\infty}e^{-r}.r^{-h}.dr=\frac{\pi}{\sin.h\pi.\int_0^{\infty}e^{-r}.r^{h-1}\,dr}$$

cosicchè sostituendo otterremo:

$$(38)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\phi\; e^{\phi\sqrt{-1}}}{(a+\phi\sqrt{-1})^h}=\frac{2\pi.e^{-a}}{\int_0^{\infty}e^{-r}.r^{h-1}\,dr}.$$

Questa formola, una delle più osservabili nella teoria degli integrali definiti è stata dimostrata nel particolare caso di $h=a$ dal cel. Laplace col metodo di cui abbiamo fatto menzione nell' articolo 7. E nel caso di a qualunque, e di h numero intero e positivo il Poisson ne ha data una elegante dimostrazione (che per induzione egli estende al caso di h qualunque) nel fascicolo 19^{esimo} del giornale Politecnico: nel qual fascicolo stesso il ch. Cauchy è pervenuto egli pure alla equazione (38) senza nessuna restrizione dei valori di a e di h.

11. Il metodo che nei precedenti articoli abbiamo posto in uso può con maggiore generalità presentarsi come appresso.

Sia data tra u ed x una equazione qualunque $x=\mathrm{F}u$; dalla quale, risolvendo rapporto ad u si deduca

$$u = \mathrm{A} + \mathrm{A}_1 x + \mathrm{A}_2 x^2 + \mathrm{A}_3 x^3 + \text{ec.}$$

così ottenuto il valore di u sempre che ciò sia possibile, espresso per una serie procedente per le potenze intere e positive di x, noi supporremo che posto $u = e^{\phi\sqrt{-1}}$ la equazione $x = \mathrm{F}u$ somministri $x = p + q\sqrt{-1}$ essendo p, q funzioni date di ϕ, e ϕ una quantità reale comunque.

Se ora ci proporremo di determinare il valore della formola integrale $\int \frac{du}{x}$, noi potremo in luogo di u sostituire il suo precedente valore; e quindi integrare per serie.

Così avremo

$$\int \frac{du}{x} = \mathrm{A}_1 \log. x + 2\mathrm{A}_2 x + 3\mathrm{A}_3 \frac{x^2}{2} + 4\mathrm{A}_4 \frac{x^3}{3} + \text{ec.} \ldots + \text{cost.}$$

Se in luogo di u porremo $e^{\phi\sqrt{-1}}$, e quindi in luogo di x sostituiremo il suo valore $p + q\sqrt{-1}$ che deriva dal legame stabilito tra u ed x dalla equazione $x = \mathrm{F}u$: se di più faremo $p = r\cos. z$, $q = r\sin. z$, e quindi $r = \sqrt{p^2 + q^2}$; $z = \text{arc.tang.}\frac{q}{p}$ noi otterremo finalmente:

$$(39) \qquad \int \frac{d\phi(q\cos.\phi - p\sin.\phi)}{p^2 + q^2} + \sqrt{-1} \int \frac{d\phi(p\cos.\phi + q\sin.\phi)}{p^2 + q^2}$$

$$= \sqrt{-1}.\left[\mathrm{A}_1 z + 2\mathrm{A}_2 r\sin. z + 3\mathrm{A}_3 \frac{r^2 \sin. 2z}{2} + 4\mathrm{A}_4 \frac{r^3 \sin. 3z}{3} + \text{ec.}\right]$$

$$+ \mathrm{A}_1 \log. r + 2\mathrm{A}_2 r\cos. z + 3\mathrm{A}_3 \frac{r^2 \cos. 2z}{2} + 4\mathrm{A}_4 \frac{r^3 \cos. 3z}{3} + \text{ec.} + \text{cost.}$$

E paragonando tra di loro separatamente le parti reali e le parti imaginarie, noi conseguiremo:

$$(40) \quad \int \frac{d\phi(p\cos\phi + q\sin.\phi)}{p^2 + q^2} = \mathrm{A}_1 z + 2\mathrm{A}_2 r\sin. z + 3\mathrm{A}_3 \frac{r^2 \sin. 2z}{2} + 4\mathrm{A}_4 \frac{r^3 \sin. 3z}{3}$$

$$+ \text{ec.} \qquad + \text{cost.}$$

$$(41)\qquad \int \frac{d\phi(p\sin.\phi - q\cos.\phi)}{p^2+q^2} = -A_1 \log.r - 2A_2 r\cos.z - 3A_3 \frac{r^2\cos.2z}{2}$$

$$- \text{ec.} + \text{cost.}$$

12. Potrebbero questi integrali completi delle formole

$$\frac{d\phi(p\cos.\phi+q\sin.\phi)}{p^2+q^2}\,; \qquad \frac{d\phi(p\sin\,\phi-q\cos.\phi)}{p^2+q^2}$$

verificarsi col mezzo diretto della differenziazione: ed a quelli potremo anco pervenire con trasformazioni opportune: siccome già vedemmo succedere per casi più speciali negli articoli 3, 9.

Infatti data la equazione $x=\mathrm{F}u$ dalla quale abbiasi inversamente $u=\Psi x$: se facendovi $u=e^{\phi\sqrt{-1}}$ sia $x=p+q\sqrt{-1}$, io dico che avrà luogo la identità:

$$(42)\qquad \frac{p\cos\,\phi+q\sin\,\phi}{p^2+q^2} = \frac{p\,\frac{dq}{d\phi}-q\,\frac{dp}{d\phi}}{p^2+q^2}\left[\frac{\Psi' re^{z\sqrt{-1}}+\Psi' re^{-z\sqrt{-1}}}{2}\right]$$

$$+\frac{p\,\frac{dp}{d\phi}+q\,\frac{dq}{d\phi}}{p^2+q^2}\left[\frac{\Psi' re^{z\sqrt{-1}}-\Psi' re^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right]$$

ove sia $r=\sqrt{p^2+q^2}$, $z=\text{arc. tang.}\,\frac{q}{p}$; e dove per semplicità faccio $\frac{d\Psi y}{dy}=\Psi' y$.

Per dimostrare quella identità si osservi che avendosi identicamente

$$e^{\phi\sqrt{-1}} = \Psi\,(p+q\sqrt{-1})$$

$$e^{-\phi\sqrt{-1}} = \Psi\,(p-q\sqrt{-1})$$

sarà pure

$$\sqrt{-1}.e^{\phi\sqrt{-1}}=\left(\frac{dp}{d\phi}+\sqrt{-1}\,\frac{dq}{d\phi}\right)\Psi'(p+q\sqrt{-1});$$

$$-\sqrt{-1}.e^{\phi\sqrt{-1}}=\left(\frac{dp}{d\phi}-\sqrt{-1}\,\frac{dq}{d\phi}\right)\Psi'(p-q\sqrt{-1}),$$

quindi trarremo per le denominazioni stabilite:

$$\Psi'r.e^{z\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{-1}.e^{\phi\sqrt{-1}}}{\frac{dp}{d\phi}+\sqrt{-1}.\frac{dq}{d\phi}};$$

$$\Psi'r.e^{-z\sqrt{-1}}=\frac{-\sqrt{-1}.e^{-\phi\sqrt{-1}}}{\frac{dp}{d\phi}-\sqrt{-1}.\frac{dq}{d\phi}}$$

i quali valori, sostituiti nella equazione (42) la riducono di fatti alla identità.

Supponghiamo ora che la funzione $\Psi'x$ possa ridursi in serie della forma

$$\Psi'x = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + \text{ec.}$$

Se porremo in questa succesivamente

$$x = re^{z\sqrt{-1}}; \qquad x = re^{-z\sqrt{-1}}$$

e quindi prenderemo la somma o la differenza dei risultati, è manifesto che noi perverremo a rappresentare le quantità

$$\Psi're^{z\sqrt{-1}}, \qquad \Psi're^{-z\sqrt{-1}};$$

e facendo di queste la sostituzione nella equazione (42), otterremo:

$$\frac{p\cos.\phi+q\cos.\phi}{p^2+q^2}=$$

$$\frac{p\frac{dq}{d\phi}-q\frac{dp}{d\phi}}{p^2+q^2}\left[A_1+2A_2r\cos.z+3A_3r^2\cos.2z+\text{ec.}\right]+$$

$$+\frac{p\,\frac{dp}{d\phi}+q\,\frac{dq}{d\phi}}{\sqrt{p^2+q^2}}[\,2A_2\sin.z+3A_3r\sin.2z+4A_4r^2\sin 3z+\text{ec.}\,]$$

Ma poichè

$$z=\text{arc. tang.}\,\frac{q}{p};\qquad r=\sqrt{p^2+q^2}$$

sarà pure:

$$\frac{dz}{d\phi}=\frac{p\,\frac{dq}{d\phi}-q\frac{dp}{d\phi}}{p^2+q^2};\quad \frac{dr}{d\phi}=\frac{p\,\frac{dp}{d\phi}+q\,\frac{dq}{d\phi}}{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

E pertanto avremo:

$$\frac{p\cos.\phi+q\sin.\phi}{p^2+q^2}\,d\phi=dz[\,A_1+2A_2r\cos.z+3A_3r^2\cos.2z+\text{ec.}\,]$$

$$+\,dr[\,2A_2\sin.z+3A_3r\sin.2z+4A_4r^2\sin.3z+\text{ec.}\,]$$

È facile il vedere che il secondo membro è differenziale esatta; e che integrando otterremo:

$$\int\frac{p\cos.\varphi+q\sin.\varphi}{p^2+q^2}\,d\phi=A_1z+2A_2r\sin.z+3A_3\frac{r^2\sin.2z}{2}+4A_4\frac{r^3\sin.3z}{3}+\text{ec.}$$

$$+\ \text{cost.}$$

come sopra trovammo.

Egualmente potrà dimostrarsi la esistenza della identità

$$(43)\qquad \frac{p\sin.\varphi-p\cos.\varphi}{p^2+q^2}=\frac{p\,\frac{dp}{d\varphi}+q\,\frac{dq}{d\varphi}}{p^2+q^2}\left[\frac{\Psi'r e^{z\sqrt{-1}}+\Psi'r e^{-z\sqrt{-1}}}{2}\right]$$

$$-\,\frac{\left(p\,\frac{dq}{d\varphi}-q\,\frac{dp}{d\varphi}\right)}{\sqrt{p^2+q^2}}\left[\frac{\Psi'r e^{z\sqrt{-1}}-\Psi'r e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right]$$

nella quale operando come precedentemente, e sempre tenendo presenti le equazioni

$$p = r\cos.z, \qquad q = r\sin.z$$

si troverà dopo semplici riduzioni:

$$\frac{p\,\mathrm{sen}.\varphi - q\cos.\varphi}{p^2+q^2}\,d\varphi = -\,dr\left[\frac{A_1}{r} + 2A_2\cos.z + 3A_3 r\cos.2z\right.$$

$$\left. + \, 4A_4 r^2\cos.3z + \text{ec.}\right] +$$

$$+\, dz[2A_2 r\sin.z + 3A_3 r^2\sin.2z + 4A_4 r^3\sin.3z + \text{ec.}],$$

ovvero integrando da ambe le parti indefinitamente:

$$\int \frac{p\sin.\varphi - q\cos.\varphi}{p^2+q^2}\,d\varphi = -\,A_1\log.r - 2A_2 r\cos.z - 3A_3\,\frac{r^2\cos.2z}{2} - \text{ec.}$$

$$+\ \text{cost.}$$

13. Gli integrali completi come sopra assegnati alle formole differenziali

$$d\varphi\,\frac{(p\cos.\varphi + q\sin.\varphi)}{p^2+q^2},$$

$$d\varphi\,\frac{(p\sin.\varphi - q\cos.\varphi)}{p^2+q^2}$$

ci somministreranno talvolta il mezzo per passare ai loro integrali definiti.

Per averne un esempio supponghiamo che quelle formole debbano estendersi tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \infty$. Per vedere cosa debba farsi nei secondi membri delle equazioni (40), (41) che rappresentano gli integrali completi delle formole di cui si tratta, riprenderemo le equazioni

$$r = \sqrt{p^2 + q^2}; \qquad z = \text{arc. tang. } \frac{q}{p}$$

e di quì determineremo i valori di r e di z convenienti ai due limiti stabiliti. Se per esempio al limite $\varphi=0$ si abbia $q=0$, ed al limite $\varphi=\infty$ divenga $q=\infty$, è manifesto che al primo limite avremo $z=0$, ed al secondo limite $z=\frac{\pi}{2}$: quindi sostituendo nelle equazioni (40) (41) troveremo:

$$(44)\qquad \int_0^\infty \frac{d\varphi(p\cos.\varphi+q\sin.\varphi)}{p^2+q^2}=A_1\frac{\pi}{2}+2A_2r-4A_4\frac{r^3}{3}+6A_6\frac{r^5}{5}-\text{ec.}$$

$$(45)\qquad \int_0^\infty \frac{d\varphi(p\sin.\varphi-q\cos.\varphi)}{p^2+q^2}=-A_1\log.r+3A_3\frac{r^2}{2}-5-A_5\frac{r^4}{4}+\text{ec.}$$

$$+A_1\log.p+2A_2p+3A_3\frac{p^2}{2}+4A_4\frac{p^3}{3}+\text{ec.}$$

nei secondi membri delle quali equazioni deve farsi $r=\infty$; avvertendo altresì che nel secondo membro della equazione (45) deve farsi $\varphi=0$ nel valore di p

14. Ma per vedere anco più dappresso come nei casi particolari si debba procedere, riprendiamo la formola differenziale

$$\frac{d\varphi(p\cos.\varphi+q\sin.\varphi)}{p^2+q^2}$$

ove p, q sono funzioni date di φ; e proponghiamoci di integrarla indefinitamente.

Noi faremo

$$x=p+q\sqrt{-1}$$

e supporremo poi

$$u=e^{\varphi\sqrt{-1}}.$$

Tra queste due equazioni eliminando φ, noi giungeremo ad una equazione tra u ed x che supporremo risoluta rapporto ad u onde si abbia $u=\Psi x$. Quindi sempre chè ciò sia possibile, svolgeremo la funzione Ψx in serie per le potenze intere e positive di x; e ne dedurremo:

$$u = \mathrm{A} + \mathrm{A}_1 x + \mathrm{A}_2 x^2 + \text{ec.}$$

E calcolati i coefficienti

$$\mathrm{A},\ \mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_3,\ \text{ec.}$$

il problema sarà risoluto, ed avremo:

$$\int \frac{d\varphi(p\cos.\varphi + q\sin.\varphi)}{p^2+q^2} = \mathrm{A}_1 z + 2\mathrm{A}_2 r\sin.z + 3\mathrm{A}_3 \frac{r^2\sin.2z}{2} + 4\mathrm{A}_4 \frac{r^3\sin.3z}{3}$$

$$+ \text{ec.} \ldots\ldots + \text{cost.}$$

E sarà pure

$$\int \frac{d\varphi(p\sin.\varphi - q\cos.\varphi)}{p^2+q^2} = -\mathrm{A}_1 \log.r - 2\mathrm{A}_2 r\cos.z - 3\mathrm{A}_3 \frac{r^2\cos.2z}{2}$$

$$- 4\mathrm{A}_4 \frac{r^3\cos.3z}{3} - \text{ec.} \ldots\ldots + \text{cost.}$$

essendo

$$r = \sqrt{p^2+q^2}, \qquad z = \text{arc. taug.} \frac{q}{p}.$$

15. Riprendiamo presentemente la formola (44)

$$\int_0^\infty \frac{d\varphi(p\cos.\varphi + q\sin.\varphi)}{p^2+q^2} = \mathrm{A}_1 \frac{\pi}{2} + 2\mathrm{A}_2 r - 4\mathrm{A}_4 \frac{r^3}{3} + 6\mathrm{A}_6 \frac{r^5}{5} - \text{ec.}$$

ove nel secondo membro deve farsi $r = \infty$.

I coefficienti A_1, A_2, A_4, ec. dipendono dalla evoluzione della funzione Ψx formata con la regola qui sopra stabilita, in modo che sia

$$\Psi x = \mathrm{A} + \mathrm{A}_1 x + \mathrm{A}_2 x^2 + \mathrm{A}_3 x^3 + \mathrm{A}_4 x^4 + \text{ec.}$$

Ora è manifesto che noi avremo:

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d[\Psi(r\sqrt{-1})+\Psi(-r\sqrt{-1})]}{r}=2A_2 r-4A_4\frac{r^3}{3}+6A_6\frac{r^5}{5}-\text{ec.}$$

purchè gli integrali si facciano principiare da $r=0$.

Onde per il caso di $r=\infty$ si avrà

$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{d[\Psi(r\sqrt{-1})+\Psi(-r\sqrt{-1})]}{r}=2A_2 r-4A_4\frac{r^3}{3}+6A_6\frac{r^5}{5}-\text{ec.}$$

E per tanto avremo, sostituendo:

$$(46)\qquad \int_0^\infty\frac{d\varphi(p\cos\varphi+q\sin.\varphi)}{p^2+q^2}=A_1\frac{\pi}{2}+\int_0^\infty\frac{dr[\Psi'(r\sqrt{-1})-\Psi'(-r\sqrt{-1})]}{2r\sqrt{-1}}$$

facendo per semplicità $\Psi'y=\frac{d\Psi y}{dy}$.

Se adopreremo analoghe riduzioni per la formola integrale $\int_0^\infty d\varphi\frac{(p\sin.\varphi-q\cos.\varphi)}{p^2+q^2}$ che nell'articolo 13 è determinata dalla equazione (45), noi troveremo:

$$(47)\qquad \int_0^\infty\frac{d\varphi(p\sin.\varphi-q\cos.\varphi)}{p^2+q^2}=\int_0^\beta\frac{\Psi'p.dp}{p}-\int_0^\infty\frac{dr[\Psi'(r\sqrt{-1})+\Psi'(-r\sqrt{-1})]}{2r}$$

essendo β quello che p diviene quando vi si ponga $\varphi=0$.

Se fosse, per un esempio semplicissimo, $p=a$, $q=\varphi$, essendo a una costante, noi dovremo secondo le prescrizioni dell' articolo 14 stabilire

$$x=p+q\sqrt{-1}$$

$$u=e^{\varphi\sqrt{-1}}$$

ovvero pel caso nostro:

$$x=a+\varphi\sqrt{-1}$$

$$u=e^{\varphi\sqrt{-1}}$$

e quindi dedurre la equazione $u=\Psi x$ che nel caso nostro sarà

$$u = \Psi x = e^{-a} \cdot e^{x}.$$

Indi risolvendo in serie per le potenze ascendenti di x la funzione Ψx in modo che si abbia

$$\Psi x = \mathrm{A} + \mathrm{A}_{1} x + \mathrm{A}_{2} x^{2} + \text{ec.}$$

noi avremo: $\mathrm{A} = e^{-a}$; $\mathrm{A}_{1} = e^{-a}$, $\mathrm{A}_{2} = \frac{e^{-a}}{2}$, ec.; e sarà pure

$$\frac{\Psi'(r\sqrt{-1}) - \Psi'(-r\sqrt{-1})}{2r\sqrt{-1}} = e^{-a} \frac{\sin. r}{r}$$

$$\frac{\Psi'(r\sqrt{-1}) + \Psi'(-r\sqrt{-1})}{2r} = e^{-a} \frac{\cos. r}{r}$$

$$\frac{\Psi' p}{p} = \frac{e^{-a} \cdot e^{p}}{p}; \quad \beta = a.$$

Con queste determinazioni sostituendo nelle equazioni (46), (47), troveremo:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{d\phi(a\cos.\phi + \phi\sin.\phi)}{a^{2} + \phi^{2}} = e^{-a} \left[\frac{\pi}{2} + \int_{0}^{\infty} \frac{\sin. r}{r} dr \right]$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{d\phi(a\sin.\phi - \phi\cos.\phi)}{a^{2} + \phi^{2}} = e^{-a} \left[\int_{0}^{a} \frac{e^{p}\, dp}{p} - \int_{0}^{\infty} \frac{\cos. r dr}{r} \right].$$

È inutile di avvertire che nell' esempio quì sopra scelto si verificano appunto le condizioni espresse nell' articolo 13; in grazia delle quali la quantità $\frac{q}{p}$ deve annullarsi e diventar infinita quando rispettivamente si faccia $\phi = 0$, $\phi = \infty$.

16. Per altro esempio sia data la formola differenziale

$$\frac{d\phi(m(am-1)\cos.\phi + m\cos.(m-1)\phi)}{(am-1)^{2} + 2(am-1)\cos. m\phi + 1}$$

di cui vogliasi l' integrale completo col metodo dell' articolo 14. Potrà essa mettersi sotto la forma

$$\frac{d\phi(p\cos.\phi + q\sin.\phi)}{p^{2} + q^{2}}$$

facendo

$$p = \frac{\cos.m\varphi + am - 1}{m}$$

$$q = \frac{\sin.m\varphi}{m}\,.$$

Quindi dovremo stabilire:

$$\frac{\cos.m\varphi + am - 1}{m} + \sqrt{-1}\,\frac{\sin.m\varphi}{m} = x$$

$$u = e^{\varphi\sqrt{-1}}\,.$$

Ed eliminando φ si otterrà tra u ed x la equazione

$$u^{m} = 1 - ma + mx$$

dalla quale risolvendo in serie dedurremo:

$$u = (1 - ma)^{\frac{1}{m}}\left[1 + \frac{x}{1 - ma} + \frac{1 - m}{2(1 - ma)^2}\,x^2 + \frac{(1 - m)(1 - 2m)}{2.3(1 - ma)^3}\,x^3 + \text{ec.}\right]$$

onde avremo per le denominazioni che abbiamo usate nell'articolo 14,

$$A = (1 - ma)^{\frac{1}{m}}$$

$$A_1 = (1 - ma)^{\frac{1}{m}}\,\frac{1}{1 - ma}$$

$$A_2 = (1 - ma)^{\frac{1}{m}}\,\frac{(1 - m)}{2.3(1 - ma)^2}$$

$$\vdots$$

$$A_n = (1 - ma)^{\frac{1}{m}}\,\frac{(1 - m)(1 - 2m)\ldots\ldots(1 - (n - 1)m)}{2.3\ldots\ldots n(1 - ma)^n}$$

E per tanto sarà:

$$(48)\qquad \int \frac{d\varphi(m(am-1)\cos.\varphi+m\cos.(m-1)\varphi)}{(am-1)^2+2(am-1)\cos.m\varphi+1} = (1-ma)^{\frac{1}{m}}\Big[\frac{z}{1-ma}$$

$$+\frac{(1-m)}{2(1-ma)^2}\,2r\sin z+\frac{(1-m)(1-2m)}{2.3\,(1-ma)^3}\cdot\frac{3}{2}\,r^2\sin 2z$$

$$+\frac{(1-m)(1-2m)(1-3m)}{2.3.4(1-ma)^4}\cdot\frac{4}{3}\,r^3\sin.3z+\text{ec.}\Big]+\text{cost.}$$

ove $r=\sqrt{p^2+q^2}$; $z=\text{arc.tang.}\frac{q}{p}$, ovvero nel caso nostro:

$$r=\frac{1}{m}\sqrt{[(am-1)^2+2(am-1)\cos.m\varphi+1]}$$

$$z=\text{arc. tang.}\frac{\sin.m\varphi}{\cos.m\varphi+am-1}\,.$$

17. Così avremo espresso in serie l' integrale completo della proposta formola. Se vorremo passare al di lei integrale definito estendendolo tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{m}$, noi troveremo

$$(49)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{m}} \frac{d\varphi(m(am-1)\cos.\varphi+m\cos.(m-1)\varphi)}{(am-1)^2+2(am-1)\cos.m\varphi+1} = (1-ma)^{\frac{1}{m}}\cdot\frac{\pi}{1-ma}.$$

L' integrale

$$\int_0^{\infty}\frac{d\varphi(a\cos\varphi+\varphi\sin.\varphi)}{a^2+\varphi^2}=\pi e^{-a}$$

non è che un caso particolare della precedente formola (49).

Facciamo in essa $m=0$. In tal caso la funzione

$$\frac{m(am-1)\cos.\varphi+m\cos.(m-1)\varphi}{(am-1)^2+2(am-1)\cos.m\varphi+1}$$

diverrà $\frac{0}{0}$. Cercandone il valore con i metodi noti, lo troveremo $= \frac{a\cos.\varphi + \varphi\sin.\varphi}{a^2+\varphi^2}$.

Per il caso di $m=0$ è noto dalla dottrina degli esponenziali che

$$(1-ma)^{\frac{1}{m}} = e^{-a}.$$

Pertanto sarà sostituendo:

$$\int_0^\infty \frac{dz(a\cos.\varphi+\varphi\sin.\varphi)}{a^2+\varphi^2} = \pi e^{-a}.$$

18. Nella serie (48) facciamo $a=0$. Per questo particolare caso sarà

$$r = \frac{\sqrt{2}}{m}\sqrt{(1-\cos.m\varphi)}\,; \quad z = -\text{Arc. tang.}\frac{\sin.m\varphi}{1-\cos.m\varphi}$$

ovvero:

$$r = -\frac{2}{m}\sin.\frac{m\varphi}{2}\,;$$

$$z = -\text{Arc. tang.}\frac{\sin.\frac{m}{2}\varphi\cos.\frac{m}{2}\varphi}{\overline{\sin.\frac{m}{2}\varphi}^2} = \frac{m\varphi-\pi}{2}.$$

Quindi avremo, facendo le corrispondenti mutazioni nella serie (48)

$$(50)\qquad m\int\frac{d\varphi(\cos.(m-1)\varphi-\cos.\varphi)}{2(1-\cos.m\varphi)} = \frac{m\varphi}{2} + 2\frac{(1-m)}{m}.\sin.\frac{m\varphi}{2}.\cos.\frac{m\varphi}{2}$$

$$-\frac{2^2(1-m)(1-2m)}{2^2.m^2}.\sin.\overline{\frac{m\varphi}{2}}^2\sin.m\varphi$$

$$-\frac{2^3(1-m)(1-2m)(1-3m)}{2.3^2m^3}.\sin.\overline{\frac{m\varphi}{2}}^3\cos.3\frac{m\varphi}{2}$$

$$+\frac{2^4(1-m)(1-2m)(1-3m)(1-4m)}{2.3.4^2.m^4}.\sin.\overline{\frac{m\varphi}{2}}^4.\sin.2m\varphi + \text{ec.} + \text{cost.}$$

Da questo risultato noi potremo dedurre alcune conseguenze.

Poichè esso rappresenta l'integrale completo della formola

$$\frac{md\varphi(\cos.(m-1)\varphi-\cos.\varphi)}{2(1-\cos.m\varphi)}$$

noi potremo concluderne il definito tra limiti determinati. Siano i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{m}$; e noi dedurremo tosto:

$$\int_0^{\frac{\pi}{m}} d\varphi.\frac{m(\cos.(m-1)\varphi-\cos.\varphi)}{2(1-\cos.m\varphi)}=\frac{\pi}{2}.$$

Se faremo $m=0$, in tal caso la formola

$$\frac{m(\cos.(m-1)\varphi-\cos.\varphi)}{2(1-\cos.m\varphi)}$$

diverrà $\frac{0}{0}$. Cercandone il valore in questo caso, noi lo troveremo $=\frac{\sin.\varphi}{\varphi}$; onde sarà:

$$\int_0^{\infty} d\varphi.\frac{\sin.\varphi}{\varphi}=\frac{\pi}{2}.$$

Che se per il caso di $m=0$ vorremo l'integrale indefinito e completo della formola $d\varphi.\frac{m(\cos.(m-1)\varphi-\cos.\varphi)}{2(1-\cos.m\varphi)}$, ci òconseguiremo dalla equazione (50) ove notandosi che quando sia $m=0$ si ha $\frac{\sin.\frac{m\varphi}{2}}{m}=\frac{\varphi}{2}$, otterremo:

$$\int d\varphi.\frac{\sin.\varphi}{\varphi}=\text{cost.}+\varphi-\frac{\varphi^3}{2.3^2}+\frac{\varphi^5}{2.3.4.5^2}-\text{ec.}$$

come deve essere.

Potremo anche avvertire che la precedente equazione

(48) ove si faccia $1 - ma = b$, si muterà nella seguente più semplice:

$$(51) \qquad m\int \frac{d\varphi(\cos.(m-1)\varphi - b\cos.\varphi)}{b^2 - 2b\cos.m\varphi + 1} = b^{\frac{1}{m}} \Big[\frac{z}{b} + \frac{(1-m)}{2b^2} \,.\, 2r\sin.z$$

$$+ \frac{(1-m)(1-2m)}{2.3.b^3} \,.\, \frac{3}{2} r^2 \sin.2z + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{(1-m)(1-2m)\ldots\ldots(1-nm)}{2.3\ldots.(n+1)b^{n+1}} \,.\, \frac{n+1}{n} r^n \sin.nz + \text{ec.} \Big] + \text{cost.}$$

ove sarà

$$r = \frac{1}{m} \sqrt{(b^2 - 2b\cos.m\varphi + 1)}$$

$$z = \text{Arc. tang.} \frac{\sin.m\varphi}{\cos.m\varphi - b} \,.$$

Dalla quale potremo dedurre espresso in un numero finito di termini l' integrale completo della formola differenziale

$$\frac{d\varphi(\cos.(m-1)\varphi - b\cos.\varphi)}{b^2 - 2b\cos.m\varphi + 1}$$

ogni qualvolta m sia una quantità della forma $\frac{1}{n}$ ed n un numero intero e positivo qualunque.

Osservazioni sopra la convergenza delle Serie.

19. Nei precedenti articoli abbiamo dedotto qualche volta l' integrale definito di una formola differenziale dal suo integrale indefinito espresso in serie. Per questi casi abbiamo tenuta presente la condizione (ed ognuno potrà accertarsi che ella si verifica nei particolari esempj di sopra trattati) che le serie messe in uso risultino convergenti nella estensione assegnata all'integrale; che se una tal condizione si fosse negletta, non avremmo potuto contare sulla esattezza delle formole a cui si fosse pervenuti. Infatti, e per servirmi del-

la adequata espressione di alcuni illustri geometri, una serie divergente non ha somma: ovvero ciò che viene allo stesso, manca di limite: e quindi tornerebbe fallace ogni conseguenza che si traesse dalla supposta esistenza o cognizione di quel limite.

Possono vedersi a tal proposito le eccellenti riflessioni dei celebri Poisson e Cauchy (*), alle quali potranno aggiungersi le seguenti per sempre meglio convincerne, che senza rischio di cadere in errore non si potranno mai nel calcolo integrale ammettere le serie, se prima non siasi certi della loro convergenza e della loro estensione.

20. Abbiamo la equazione identica:

$$ax\sin.ax = -\frac{(e^{2ax\sqrt{-1}}-1)}{2e^{ax\sqrt{-1}}}\log.(1+e^{ax\sqrt{-1}})$$

$$-\frac{(e^{-2ax\sqrt{-1}}-1)}{2e^{-ax\sqrt{-1}}}\log.(1+e^{-ax\sqrt{-1}})$$

che facilmente si verifica in grazia dei noti rapporti tra le funzioni del circolo e gli esponenziali imaginarj.

Se dei due termini che compongono il secondo membro risolveremo in serie il primo per le potenze di $e^{ax\sqrt{-1}}$, e l' altro per le potenze di $e^{-ax\sqrt{-1}}$, noi troveremo immediatamente:

$$(52)\qquad ax\sin.ax = 1-\frac{\cos.ax}{2}-\frac{2\cos.2ax}{2^2-1}+\frac{2\cos.3ax}{3^2-1}-\frac{2\cos.4ax}{4^2-1}+\text{ec.}$$

ove la legge è manifesta.

A questa serie potremmo giungere anche per altra via. Se di fatti stabiliremo:

(*) Poisson, Mémoire sur les intégrales definies; Journal Polytechnique 19. cahier. Cauchy. Cours d'Analyse.

$$ax\sin.ax = A_0 + A_1\cos.ax + A_2\cos.2ax + \ldots\ldots + A_m\cos.max + \text{ec.}$$

noi potremo da ambe le parti moltiplicare per $\cos.max$, ed integrar poi tra i limiti $x = 0$, $ax = \pi$; e quindi facilmente troveremo:

$$A_0 = 1\,;\quad A_1 = -\frac{1}{2}\,;\quad A_m = -\frac{2\cos.m\pi}{m^2-1}\,.$$

Le quali determinazioni ci ricondurranno alla serie precedente.

Or moltiplicando tutti i termini di questa serie per $\frac{dx}{1+x^2}$, ed integrando tra i limiti $x=0$, $x=\infty$ noi otteremo:

$$(53)\qquad \int_0^\infty \frac{adx.x\sin.ax}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{e^{-a}}{2}\right)$$
$$-\pi\left(\frac{e^{-2a}}{2^2-1} - \frac{e^{-3a}}{3^2-1} + \frac{e^{-4a}}{4^2-1} - \frac{e^{-5a}}{5^2-1} + \text{ec.}\right)$$

la quale risulta dal sostituire in luogo del termine della forma $\int_0^\infty \frac{dx\cos.hax}{1+x^2}$ il suo valore $\frac{\pi}{2}\,.\,e^{-ha}$.

La serie che nella formola precedente stà compresa tra le parentesi può facilmente sommarsi. Infatti noi abbiamo:

$$\frac{e^{-2a}-1}{2e^{-a}}\log.(1+e^{-a}) + \frac{2-e^{-a}}{4} = \frac{e^{-2a}}{2^2-1}$$
$$-\frac{e^{-3a}}{3^2-1} + \frac{e^{-4a}}{4^2-1} - \text{ec.}$$

Pertanto sarà, sostituendo:

$$\int_0^\infty \frac{xdx\sin.ax}{1+x^2} = \frac{e^{a} - e^{-a}}{2a}\,.\,\pi\log.(1+e^{-a})\,.$$

Il qual risultato è erroneo, e non ha veruna analogìa con quello conosciuto e che si ottiene differenziando rapporto ad a la equazione:

$$\int_0^\infty \frac{dx\cos.ax}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\, e^{-a}.$$

22. L'errore è derivato dall'uso che abbiamo fatto della serie (52), che si è supposto potersi legittimamente adoprare per tutta la estensione dell'integrale: e vale a dire per tutti i valori di x compresi tra $x=0$, ed $x=\infty$: mentre invero la detta serie non si estende di gran lunga a tanto intervallo.

Per assicurarci di ciò dedurremo la serie (52) da altra origine.

È nota la serie

$$\frac{ax}{2} = \sin ax. - \frac{\sin.2ax}{2} + \frac{\sin 3ax}{3} - \frac{\sin.4ax}{4} + \text{ec.}$$

Se d'ambe le parti moltiplicheremo per $\sin.ax$, avremo una seconda serie il cui termine generale sarà

$$\pm \frac{\sin.hax.\sin ax}{h} = \pm \frac{(\cos.(h-1)x - \cos.(h+1)x)}{2h}$$

ove il segno superiore conviene ad h dispari, e l'inferiore ad h pari.

Avremo pertanto:

$$ax\sin.ax = 1 - \frac{\cos.ax}{2} - \frac{2\cos 2ax}{2^2-1} + \frac{2\cos 3ax}{3^2-1} - \text{ec.}$$

come sopra trovammo.

Ora è dimostrato rigorosamente che la serie

$$\frac{ax}{2} = \sin.ax - \frac{\sin.2ax}{2} + \frac{\sin.3ax}{3} - \text{ec.}$$

sussiste unicamente per i valori di x compresi tra i limiti $x = -\frac{\pi}{a}$, $x = \frac{\pi}{a}$ esclusi i limiti stessi. E quindi negli stessi confini sarà ristretta la serie (52): nè pertanto sarà maraviglia se inopportunamente estendendola a tutti i valori di x

compresi tra zero e l'infinito siamo giunti nel precedente articolo ad un resultato erroneo.

23. All'arco qualunque ax possono appartenere una infinità di serie che lo rappresentino, e procedenti per i seni degli archi molteplici di ax.

Una tale indeterminazione può facilmente riconoscersi dalla seguente riduzione. Sia m un numero intero qualunque, noi avremo la identità:

$$e^{2max\sqrt{-1}}=\frac{(c_1+e^{ax\sqrt{-1}})(c_2+e^{ax\sqrt{-1}})(c_3+e^{ax\sqrt{-1}})\ldots(c_{2m}+e^{ax\sqrt{-1}})}{(c_1+e^{-ax\sqrt{-1}})(c_2+e^{-ax\sqrt{-1}})(c_3+e^{-ax\sqrt{-1}})\ldots(c_{2m}+e^{-ax\sqrt{-1}})}$$

purchè $c_1, c_2, c_3, \ldots\ldots c_{2m}$ siano le $2m$ radici di una equazione reciproca del grado $2m$ della forma

$$0=1+p_1y+p_2y^2+\ldots\ldots+p_2y^{2m-2}+p_1y^{2m-1}+y^{2m}$$

ove $p_1, p_2, \ldots p_m$ siano quantità qualunque,

Indi consegue che se col segno $S^{(k)}$ dinoteremo la somma delle potenze k^{esime} delle $2m$ radici della quì sopra assegnata equazione algebrica: cosicche si abbia

$$S^{(k)}=c_1^k+c_2^k+c_3^k+\ldots\ldots+c_{2m}^k$$

l' arco ax risulterà espresso dalla seguente serie:

(54) $$max=S^{(1)}\sin.ax-\frac{S^{(2)}}{2}\sin.2ax+\frac{S^{(3)}}{3}\sin.3ax-\text{ec.}$$

la quale per la natura delle radici delle equazioni reciproche sarà necessariamente divergente.

Moltiplicando d' ambe le parti per $\cos.ax$ otterremo:

$$2max.\cos.ax = S^{(1)}(1-\cos.2ax) - \frac{S^{(2)}}{2}(\cos.ax - \cos.3ax)$$

$$+\frac{S^{(3)}}{3}(\cos.2ax - \cos.4ax) - \text{ec.}$$

Quindi nuovamente moltiplicando per $\frac{dx}{1+x^2}$ ed integrando rapporto ad x tra i limiti $x=0$, $x=\infty$ si avrà:

$$\frac{4m}{\pi}\int_0^\infty \frac{ax\sin.ax.dx}{1+x^2} = (e^a - e^{-a})\left(S^{(1)}e^{-a} - \frac{S^{(2)}}{2}e^{-2a}\right.$$

$$\left. + \frac{S^{(3)}}{3}e^{-3a} - \frac{S^{(4)}}{4}e^{-4a} + \text{ec.}\right).$$

Ma poichè le quantità $c_1, c_2, c_3 \ldots\ldots c_{2m}$ sono le $2m$ radici della equazione reciproca del grado $2m$

$$0 = 1 + p_1 y + p_2 y^2 + \ldots\ldots + p_2 y^{2m-2} + p_1 y^{2m-1} + y^{2m}$$

così noi pure avremo:

(55)
$$\frac{4m}{\pi}\int_0^\infty \frac{ax.\sin.ax}{1+x^2}\,dx =$$

$$(e^a - e^{-a})\log.(1 + p_1 e^{-a} + p_2 e^{-2a} + \ldots + p_1 e^{-(2m-1)a} + e^{-2ma})$$

ove $p_1, p_2, \ldots p_m$ sono quantità qualunque.

A tale assurdo ci condurrebbe l' adoperare la serie non convergente (54): la quale ciò nonostante, ed attesa appunto la sua indeterminazione potrebbe in infiniti casi condurne a resultati esatti.

Se per esempio le quantità arbitrarie $p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots p_m$ fossero tra di loro dipendenti in virtù della equazione

$$1 + p_1 e^{-a} + p_2 e^{-2a} + \ldots\ldots + p_1 e^{-(2m-1)a} + e^{-2ma} = e^{\frac{2ma}{e^a - e^{-a}}}$$

in tal caso la equazione (55) ci condurrebbe al vero. Ma tali anomalie provano vie meglio l' incertezza che sempre deriva dall' uso delle serie divergenti : e come elleno non possano nell' analisi essere di uso nessuno.

24. Essendo u la funzione generatrice di una data equazione differenziale tra y_x ed x il cel. Laplace dà per determinarne l' integrale il metodo seguente.

Poichè u è la funzione generatrice di y_x noi avremo:

$$u=y_0+y_1 t+y_2 t^2+\ldots\ldots+y_x t^x+\text{ec.}$$

Facciamo in questa equazione $t=e^{z\sqrt{-1}}$ e sia U quello che u diviene in virtù di tale sostituzione. Indi moltiplicando la equazione risultante per $e^{-xz\sqrt{-1}}$ ed integrando si avrà

$$\int \mathrm{U}dz.e^{-xz\sqrt{-1}}=\int dz[y_0 e^{-xz\sqrt{-1}}+y_1 e^{-(x-1)z\sqrt{-1}}$$

$$+y_2 e^{-(x-2)z\sqrt{-1}}+\text{ec.}+\ldots\ldots+y_x+y_{x+1}e^{z\sqrt{-1}}+\text{ec.}].$$

Se ora estenderemo gli integrali tra i limiti $z=-\pi$, $z=\pi$, è manifesto che il secondo membro si riduce a $2\pi y_x$, e che quindi avremo:

$$y_x=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \mathrm{U}.\,dz\, e^{-xz\sqrt{-1}}$$

Si veda la prima parte della Teoria Analitica delle probabilità art. 21.

Ma questo metodo non è esatto e può facilmente condurre in errore.

Per averne un esempio semplicissimo ponghiamo

$$u=\frac{2t}{nt^2+2t+n}$$

n essendo una quantità qualunque. Sia y_x il coefficiente di t^x nello sviluppo di u per le potenze intere e positive di t. Se dalla cognizione della funzione generatrice u vorremo aver quella del coefficiente y_x, noi faremo.

$$u = y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \ldots\ldots + y_x t^x + \ldots\ldots + y_\infty t^\infty .$$

Ed adoperando il metodo del Laplace troveremo:

$$y_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos.xzdz}{1+n\cos.z} - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin.xz.\,dz}{1+n\cos.z} .$$

Ora è evidente che l'integrale $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin.xz.dz}{1+n\cos.z}$ è nullo per identità: poichè di esso gli elementi negativi sono distrutti dagli equivalenti positivi.

Abbiamo inoltre identicamente

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos.xz.dz}{1+n\cos.z} = 2\int_{0}^{\pi} \frac{\cos.xz.dz}{1+n\cos.z} .$$

Ma nel caso di $n<1$ sappiamo per i conosciuti teoremi di Euler che

$$\int_{0}^{\pi} \frac{\cos.xz.dz}{1+n\cos.z} = \pm \frac{\pi}{\sqrt{1-n^2}} \left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^x .$$

ove il segno superiore deve preferirsi nel caso dell' esponente pari, e l' inferiore nel dispari.

Pertanto dedurremo

$$y_x = \pm \frac{1}{\sqrt{1-n^2}} \left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^x .$$

Il qual risultato è falso, poichè dalla dottrina delle serie ricorrenti noi abbiamo, qualunque sia n

$$y_x = \pm \frac{1}{\sqrt{1-n^2}} \left[\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^x - \left(\frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^x\right] .$$

25. È facile di riconoscere che la sorgente dell' errore stà nella mancanza di convergenza della serie adoprata.

Infatti riprendendo le denominazioni di sopra usate, la funzione generatrice u diverrà U postovi $e^{z\sqrt{-1}}$ in luogo di t; e la funzione U si svolgerà nella serie

$$(56)\quad U = y_0 + y_1 \cos.z + y_2 \cos.2z + y_3 \cos.3z + \ldots\ldots + y_x \cos.xz + \text{ec.}$$
$$+ \sqrt{-1}\,(y_1 \sin.z + y_2 \sin.2z + \ldots\ldots + y_x \sin.xz + \text{ec.})$$

dalla quale, se non sarà convergente, non potremo ricavare alcun profitto.

Così nel caso particolare in cui

$$u = \frac{2t}{nt^2 + 2t + n}$$

noi sappiamo dalla dottrina delle serie ricorrenti che

$$y_x = \pm \frac{1}{\sqrt{1-n^2}} \left(a^x - \frac{1}{a^x} \right)$$

ove $a = \frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}$. Quindi la serie (56) è essenzialmente divergente: nè potremmo per conseguenza farne uso senza incorrere in errore.

In altri casi potremmo usare bensì la serie analoga e corrispondente alla (56) quando chè fosse ella convergente: ma di ciò non saremmo certi senza conoscere preventivamente il valore di y_x da cui dipende la convergenza o la divergenza della serie di che si tratta. Ma quel metodo è diretto appunto a determinare il valore di y_x: onde il metodo stesso esige per essere adoperato la cognizione di ciò che si cerca; esso è pertanto inammissibile nell' analisi, meno che nei casi evidenti in cui la serie terminandosi non sia d'uopo aver riguardo al residuo di lei, perchè si tratti di funzioni razionali ed intere.

26. Per maggiore chiarezza di ciò, riprendiamo l'esempio

$$u=\frac{2t}{nt^2+2t+n}.$$

Svolgendo in serie per le potenze di t, e tenendo conto dei residui, e per semplicità facendo

$$a=1-\frac{\sqrt{1-n^2}}{n}$$

noi avremo identicamente:

$$\frac{2t}{nt^2+2t+n}=-\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left[\left(a-\frac{1}{a}\right)t-\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)t^2+\text{ec.}\right.$$

$$\left.\ldots\pm\left(a^x-\frac{1}{a^x}\right)t^x\mp\text{ec.}\ldots\ldots\pm\left(a^m-\frac{1}{a^m}\right)t^m\right]$$

$$\pm\frac{n}{2\sqrt{1-n^2}}\,\frac{\left(a^{m+1}-\frac{1}{a^{m+1}}\right)t^m+\left(a^m-\frac{1}{a^m}\right)t^{m+1}}{1+\frac{n}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}.$$

Se in questa equazione faremo $t=e^{z\sqrt{-1}}$; quindi $t=e^{-z\sqrt{-1}}$ noi troveremo aggiungendo i resultati, la seguente equazione vera pur' essa per identità:

$$(57)\qquad \frac{1}{1+n\cos.z}=-\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left[\left(a-\frac{1}{a}\right)\cos.z-\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)\cos.2z+\text{ec.}\right.$$

$$\left.\ldots\ldots\pm\left(a^x-\frac{1}{a^x}\right)\cos.xz\mp\text{ec.}\ldots\ldots\pm\left(a^m-\frac{1}{a^m}\right)\cos.mz\right]$$

$$\pm\frac{n}{2\sqrt{1-n^2}}\,\frac{\left(a^{m+1}-\frac{1}{a^{m+1}}\right)\cos.mz+\left(a^m-\frac{1}{a^m}\right)\cos.(m+1)z}{1+n\cos.z}.$$

Se d'ambe le parti moltiplicheremo per $\cos.xz.dz$, e prenderemo poi gli integrali tra i limiti $z=0$, $z=\pi$, otterremo l'altra identità:

$$\int_0^\pi \frac{dz\cos.xz}{1+n\cos.z} = \mp \frac{\pi}{\sqrt{1-n^2}} \left(a^x - \frac{1}{a^x}\right)$$

$$\pm \frac{n}{2\sqrt{1-n^2}} \left(a^{m+1} - \frac{1}{a^{m+1}}\right) \int_0^\pi \frac{dz\cos.mz.\cos.xz}{1+n\cos.z}$$

$$\pm \frac{n}{2\sqrt{1-n^2}} \left(a^m - \frac{1}{a^m}\right) \int_0^\pi \frac{dz\cos.(m+1)z\cos.xz}{1+n\cos.z}$$

ove m ed x sono numeri interi, ed $m > x$.

Ma per quanto la m si faccia crescere, e si estenda anche all' infinito, non potremo giammai dalla quazione precedente concludere che il secondo membro si riduca al suo primo termine, come inopportunamente si dedurrebbe se non si facesse attenzione al residuo della serie (57).

Questa serie ammette per altro una trasformazione molto utile per l' oggetto di cui si tratta.

Sarà facilissimo di verificare la identità seguente:

$$0 = \frac{1}{\sqrt{1-n^2}} \Big[1 - \left(a + \frac{1}{a}\right)\cos.z + \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)\cos.2z$$

$$-\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)\cos.3z + \text{ec.} \ldots . \pm \left(a^x + \frac{1}{a^x}\right)\cos.xz + \text{ec.}$$

$$\ldots\ldots \pm \left(a^m + \frac{1}{a^m}\right)\cos.mz \Big]$$

$$\mp \frac{n}{2\sqrt{1-n^2}} \, \frac{\left(a^{m+1} + \frac{1}{a^{m+1}}\right)\cos.mz + \left(a^m + \frac{1}{a^m}\right)\cos.(m+1)z}{1+n\cos.z} .$$

Se aggiungeremo questa identità alla equazione (57) vera pur essa per identità, otterremo una terza identità, e sarà la seguente:

$$\frac{1}{1+n\cos.z} = \frac{1}{\sqrt{1-n^2}} \Big[1 - 2a\cos.z + 2a^2\cos.2z - 2a^3\cos.3z + \text{ec.}\ldots..$$

$$\pm 2a^x\cos.xz \mp \text{ec.}\ldots\ldots \pm 2a^m\cos.mz \Big] \mp$$

$$\mp \frac{na^m}{\sqrt{1-n^2}} \frac{a\cos.mz+\cos.(m+1)z}{1+n\cos.z}.$$

Se moltiplicheremo per $\cos.xzdz$, e quindi integreremo tra i limiti $z=0$, $z=\pi$ si avrà

$$\int_0^\pi \frac{dz\cos.xz}{1+n\cos.z} = \pm \frac{a^x}{\sqrt{1-n^2}} \mp \frac{na^m}{\sqrt{1-n^2}} \int \frac{dz(a\cos.mz+\cos.(m+1)z)\cos.xz}{1+n\cos.z}$$

ora noi abbiamo:

$$n < 1;\ a = \frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}$$

quindi sarà sempre $a < 1$.

Poichè pertanto la precedente equazione sussiste comunque grande si supponga m, noi faremo $m=\infty$, e ne dedurremo rigorosamente:

$$\int_0^\pi \frac{dz\cos.xz}{1+n\cos.z} = \pm \frac{a^x}{\sqrt{1-n^2}}.$$

come è noto.

27. Le osservazioni precedenti debbono tenersi presenti quando si facesse uso delle equazioni (40), (41); e che da queste si volessero dedurre gli integrali definiti delle formole

$$\frac{p\cos.\varphi+q\sin.\varphi}{p^2+q^2}\,d\varphi\,, \quad \frac{p\sin.\varphi-q\cos.\varphi}{p^2+q^2}\,d\varphi$$

come appunto si è fatto negli articoli 13. 15. tra i limiti $\varphi=0$ $\varphi=\infty$; cosicchè le riduzioni ivi riferite cesseranno di essere dimostrate quando le serie d' onde sono dedotte non siano convergenti in tutta la estensione dell' integrale.

Converrà pertanto ricorrere ai noti criterj della convergenza e della estensione delle serie.

Supponghiamo infatti che l'integrale indefinito $\int F\varphi.d\varphi$, ove $\mathrm{F}\varphi$ è una funzione qualunque di φ, sia determinato dalla serie

$$\int \mathrm{F}\varphi . d\varphi = \mathrm{A}_1 z + \mathrm{A}_2 r \sin. z + \mathrm{A}_3 r^2 \sin. 2z + \mathrm{A}_4 r^3 \sin. 3z + \text{ec.} + \text{cost.}$$

ove z, r siano funzioni date di φ.

Or perchè questa serie riesca convergente, è necessario in primo luogo che all' indefinito accrescersi di n la quantità $\frac{\mathrm{A}_{n+1}}{\mathrm{A}_n}$ si avvicini ad un fisso limite; e chiamato Δ questo limite, la nostra serie sarà convergente quando il valore della quantità r rapporto a cui è ordinata resti, per tutta la estensione dell' integrale, compresa tra i limiti $-\frac{1}{\Delta}$, $\frac{1}{\Delta}$.

28. Così per esempio se sia data la funzione $\mathrm{F}y$ la quale ridotta in serie per le potenze di y ci dia:

$$\mathrm{F}y = b_1 + b_2 y + b_3 y^2 + b_4 y^3 + \ldots\ldots + b_\infty y^\infty$$

noi avremo manifestamente:

$$(58) \qquad \frac{e^{\varphi\sqrt{-1}}\,\mathrm{F}e^{e^{\varphi\sqrt{-1}}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}}\,\mathrm{F}e^{e^{-\varphi\sqrt{-1}}}}{2} = b_1 \cos.\varphi$$

$$+ b_2 e^{\cos.\varphi} \cos.(\varphi + \sin.\varphi) + b_3 e^{2\cos.\varphi} \cos.(\varphi + 2\sin.\varphi)$$

$$+ b_4 e^{3\cos.\varphi} \cos.(\varphi + 3\sin.\varphi) + \text{ec.}$$

e la serie contenuta nel secondo membro sarà convergente quando, chiamato Δ il limite di $\frac{b_{m+1}}{b_m}$ rispetto all' accrescimento di m, la quantità φ sia tale che l'esponenziale $e^{\cos.\varphi}$ rimanga compreso per tutta la estensione della variabile, tra i limiti $-\frac{1}{\Delta}$, $\frac{1}{\Delta}$, ovvero in questo caso, inferiore al limite $\frac{1}{\Delta}$; poichè φ ritenuta come quantità reale, non potrebbe l'esponenziale divenire negativo.

Poichè e sarà il massimo valore di $e^{\cos.\varphi}$, noi concluderemo che se la variabile φ avrà nella sua estensione il valore $2m\pi$, potendo m essere anco $=0$, la serie precedente convergerà quando si abbia $\Delta < \frac{1}{e}$.

Ciò premesso; e moltiplicando la equazione (58) per $d\varphi$, ed integrando poi tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\pi$ noi osserveremo che qualunque sia h abbiamo evidentemente:

$$\int_0^\pi d\varphi . e^{h\cos.\varphi} \cos.(\varphi + h\sin.\varphi) = 0$$

e quindi si dedurrà

$$(59) \quad \int_0^\pi d\varphi \left(e^{\varphi\sqrt{-1}} \mathrm{F} e^{e^{\varphi\sqrt{-1}}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}} \mathrm{F} e^{e^{-\varphi\sqrt{-1}}} \right) = 0$$

ove la condizione $\Delta < \frac{1}{e}$ stabilirà le restrizioni cui dovranno assoggettarsi le costanti comprese nella funzione $\mathrm{F}y$ affinchè la equazione (59) risulti dimostrata.

Per un caso semplicissimo si assuma $\mathrm{F}y = \frac{1}{1-ay}$. Ripetendo il calcolo sopra questa formula, si troverà $\frac{b_{m+1}}{b_m} = a$, quindi la quantità $e^{\cos.\varphi}$ dovrà rimanere in tutta la estensione dell'integrale, inferiore al limite $\frac{1}{a}$; onde se l' integrale si estenda da $\phi = 0$ sino a $\phi = \pi$ è manifesto, che la quantità a dovrà rimanere ella medesima inferiore ad $\frac{1}{e}$. E perchè nulla vieta che a possa esser negativa, noi comprenderemo i due casi in una condizione sola, e supporremo che a resti intercetta tra i limiti $-\frac{1}{e}$, $\frac{1}{e}$.

Il che ritenuto, la formola (59) diverrà nell' attuale caso

$$\int_0^\pi d\phi . \frac{\cos.\phi + ae^{\cos.\phi}\cos.(\phi - \sin.\phi)}{1 + 2ae^{\cos.\phi}\cos.\sin.\phi + a^2 e^{2\cos.\phi}} = 0.$$

29. Abbiamo tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$

$$\int_0^\pi d\phi . e^{-a\cos.\phi} \cos. a\sin.\phi = \pi.$$

Questa riduzione, dovuta io credo al cel. Poisson, può verificarsi facilmente. Facciamo

$$y = \int d\phi . e^{-a\cos.\phi} \cos. a\sin.\phi.$$

Avremo, differenziando rapporto ad a

$$\frac{dy}{da} = -\int d\phi . e^{-a\cos.\phi} \cos.(\phi - a\sin.\phi).$$

Ma tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$ noi abbiamo:

$$\int_0^\pi d\phi . e^{-a\cos.\phi} \cos.(\phi - a\sin.\phi) = 0$$

onde sarà:

$$\int_0^\pi d\varphi . e^{-a\cos.\varphi} \cos.a\sin.\varphi = \mathrm{C}$$

essendo C indipendente da a. Per determinarne il valore faremo $a=0$, e si otterrà come sopra

$$\int d\varphi . e^{-asco.\varphi} \cos.a\sin.\varphi = \pi.$$

Or se la funzione qualunque $\mathrm{F}y$ possa risolversi in serie per le potenze intere e positive di y onde si abbia

$$\mathrm{F}y = b_1 + b_2 y + b_3 y^2 + b_4 y^3 + \text{ec.}$$

noi dedurremo:

$$\frac{\mathrm{F}e^{e^{\varphi\sqrt{-1}}} + \mathrm{F}e^{e^{-\varphi\sqrt{-1}}}}{2} = b_1 + b_2 e^{\cos.\varphi} \cos.\sin.\varphi + b_3 e^{2\cos.\varphi} \cos.2\sin.\varphi + \text{ec.}$$

la qual serie sarà convergente ogni volta che chiamato Δ il limite di $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ relativo all' indefinito accrescimento di n si abbia $e^{\cos.\varphi} < \frac{1}{\Delta}$.

Pertanto, moltiplicando per $d\varphi$ la equazione precedente, ed integrando tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ si otterrà

$$\int_0^\pi d\varphi \left(\mathrm{F}e^{e^{\varphi\sqrt{-1}}} + \mathrm{F}e^{e^{-\varphi\sqrt{-1}}} \right) = 2\pi (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots + b_\infty)$$

ovvero:

$$(60) \qquad \int_0^\pi d\varphi \left(\mathrm{F}e^{e^{\varphi\sqrt{-1}}} + \mathrm{F}e^{e^{-\varphi\sqrt{-1}}} \right) = 2\pi\mathrm{F}1$$

essendo F1 ciò che Fy diviene quando in luogo di y si ponga l'unità.

Quì pure osserveremo che il massimo valore di $e^{\cos.\phi}$ tra i limiti dell'integrale, essendo e; la equazione (60) sarà dimostrata quando per $n = \infty$ e prescindendo da segni si abbia $\frac{b_{n+1}}{b_n} < \frac{1}{e}$.

Se fosse per uno speciale caso $Fy = \frac{1}{a+by}$, sarebbe $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \pm \frac{b}{a}$; onde le condizioni della convergenza saranno che la quantità $\frac{b}{a}$ resti compresa tra i limiti $-\frac{1}{e}$, $\frac{1}{e}$.

Indi troveremo:

$$(61) \qquad \int_0^\pi \frac{d\phi(a+be^{\cos.\phi}\cos.\sin\phi)}{a^2+2abe^{\cos.\phi}\cos.\sin.\phi+b^2e^{2\cos.\phi}} = \frac{\pi}{a+b}.$$

Se in luogo di $Fy = \frac{1}{a+by}$ si fosse assunto $Fy = \frac{1}{a+by^i}$ essendo i quantità comunque purchè positiva, troveremmo che la quantità $\frac{b}{a}$ deve restar compresa tra i limiti $-\frac{1}{e^i}$, $\frac{1}{e^i}$; e che questa condizione ammessa si avrà

$$(62) \qquad \int_0^\pi \frac{d\phi(a+be^{i\cos.\phi}\cos.i\sin.\phi)}{a^2+2abe^{i\cos.\phi}\cos.i\sin.\phi+b^2e^{2i\cos.\phi}} = \frac{\pi}{a+b}.$$

Così pure si otterrebbe

$$(63) \qquad \frac{1}{2}\int_0^\pi d\phi \log.(a^2+2abe^{i\cos.\phi}\cos.i\sin.\phi+b^2e^{2i\cos.\phi}) = \pi\log.(a+b).$$

Non mi tratterrò attualmente più a lungo nella esposizione dei casi speciali che discendono dalle formole referite nel corso di questa memoria: principalmente perchè nella dottrina degli integrali definiti non tanto consiste il pregio dell'opera nella molteplice esposizione di singoli casi che l'esercizio del calcolo talvolta somministra spontanei; come piuttosto nel comprendere sotto forme meno particolari estese classi di trascendenti; delle quali così risulti palese il legame e la dipendenza.

SOPRA LA RIDUZIONE
DI ALCUNE TRASCENDENTI
MEMORIA
DEL CAVALIERE GIULIANO FRULLANI.

Ricevuta adì 1. *Ottobre* 1830.

1. Rappresenti $F\cos.z$ una funzione qualunque *dispari* di $\cos.z$; tale in conseguenza che essa muti segno allora quando $\cos.z$ diviene $-\cos.z$; cosicchè si abbia $F\cos.z = -F(-\cos.z.)$ Sia inoltre i un numero intero e pari. Ciò premesso la formola integrale

$$\int z^i dz \, F \cos. z$$

estesa tra i limiti $z=0$, $z=\pi$, ove π rappresenta il rapporto tra la periferia circolare e il diametro, ammetterà alcune riduzioni che in qualche caso potrà essere utile di avere presenti, e che brevemente andrò esponendo.

Rappresenterò col segno y_i la formola di cui si tratta. Nè occorrerà che io richiami alla mente dei miei lettori i limiti dell' integrale con adoperare il segno $\int_0^\pi$; poichè una volta per tutte mi basterà il dire che le formole integrali che si incontreranno nel corso di questa memoria sono tutte assunte tra i limiti citati.

2. Ammesse tali convenzioni, noi avremo

$$y_i = \int z^i dz. \, F\cos. z$$

se in luogo di z si sostituisca $\pi - z$, sarà senza che i limiti vengano alterati

$$y_i = \int (\pi - z)^i dz \mathrm{F} - \cos.z.$$

Ma poichè $\mathrm{F} - \cos.z = - \mathrm{F}\cos.z$ avremo pure

$$y_i = - \int (\pi - z)^i dz \mathrm{F} \cos.z$$

Ora risolvendo il binomio $(\pi - z)^i$, e dinotando col segno y_{i-n} l'integrale $\int z^{i-n} dz \, \mathrm{F} \cos.z$, noi otterremo, rammentando che il numero intero i è pari,

$$2y_i = i\pi y_{i-1} - \frac{i(i-1)}{2} \pi^2 y_{i-2} + \frac{i(i-1)(i-2)}{2.3} \pi^3 y_{i-3} - \text{ec.}$$

E parimente

$$2y_{i-2} = (i-2)\pi y_{i-3} - \frac{(i-2)(i-3)}{2} \pi^2 y_{i-4} + \frac{(i-2)(i-3)(i-4)}{2.3} \pi^3 y_{i-5} - \text{ec.}$$

$$2y_{i-4} = (i-4)\pi y_{i-5} - \frac{(i-4)(i-5)}{2} \pi^2 y_{i-6} + \frac{(i-4)(i-5)(i-6)}{2.3} \pi^3 y_{i-7} - \text{ec.}$$

$$2y_{i-6} = (i-6)\pi y_{i-7} - \frac{(i-6)(i-7)}{2} \pi^2 y_{i-8} + \frac{(i-6)(i-7)(i-8)}{2.3} \pi^3 y_{i-9} - \text{ec.}$$

$$\vdots$$

$$2y_2 = 2\pi y_1 .$$

Attualmente moltiplichiamo la seconda di queste equazioni per $i(i-1)\pi^2\lambda$; la terza per $i(i-1)(i-2)(i-3)\pi^4\lambda'$; la quarta per $i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)(i-5)\pi^6\lambda''$, e così di seguito: essendo λ, λ', λ'' ec. coefficienti arbitrarj, si otterrà, sommando tutte le precedenti equazioni così moltiplicate:

$$0=2y_i-i\pi y_{i-1}-i(i-1)(i-2)\pi^3\left(\frac{1}{2.3}+\lambda\right)y_{i-3}$$

$$-i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)\pi^5\left(\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{\lambda}{2.3}+\lambda'\right)y_{i-5}$$

$$-(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)(i-5)(i-6)\pi^7\left(\frac{1}{2.3.4.5.6.7}+\frac{\lambda}{2.3.4.5}+\frac{\lambda'}{2.3}+\lambda''\right)y_{i-7}$$

$$-\text{ ec.}\tag{1}$$

$$+\,i(i-1)\pi^2\left(\frac{1}{2}+2\lambda\right)y_{i-2}$$

$$+\,i(i-1)(i-2)(i-3)\,\pi^4\left(\frac{1}{2.3.4}+\frac{\lambda}{2}+2\lambda'\right)y_{i-4}$$

$$+\,i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)(i-5)\pi^6\left(\frac{1}{2.3.4.5.6}+\frac{\lambda}{2.3.4}+\frac{\lambda'}{2}+2\lambda''\right)y_{i-6}$$

$$+\text{ ec.}$$

Abbiamo supposto i numero pari: è dunque manifesto che le quantità λ, λ', λ'' ec. saranno $\frac{i}{2}-1$ di numero; cosicchè la serie di esse si estenderà sino a $\lambda^{\left(\frac{i}{2}-2\right)}$.

3. La precedente equazione (1) rappresenterà la funzione y_i, data per mezzo delle $i-1$ funzioni $y_{i-1}, y_{i-2}, y_{i-3}\ldots\ldots y_1$; delle quali potremo eliminarne $\frac{i}{2}-1$ convenientemente determinando le quantità λ, λ', λ'',..... $\lambda^{\left(\frac{i}{2}-2\right)}$, meno per altro la funzione y_{i-1} la quale non può eliminarsi perchè non è affetta da nessuna di quelle arbitrarie.

Così per esempio osserveremo che nella serie

$$y_{i-1},\, y_{i-2},\, y_{i-3}\ \ldots\ldots\ y_1$$

ove i è numero pari, li termini collocati in posto pari sono $\frac{i}{2}-1$ di numero; noi potremo dunque eliminare tutti questi termini; ed in tal caso la funzione y_1 resterà espressa linearmente nella equazione precedente (1) per mezzo delle quantità

$$y_{i-1},\, y_{i-2},\, y_{i-3},\, \ldots\ldots y_1.$$

4. Per eseguire questa eliminazione è chiaro che noi dovremo determinare le arbitrarie λ, λ', $\lambda''\ldots\ldots\lambda^{\left(\frac{i}{2}-2\right)}$ per mezzo delle equazioni seguenti:

$$(A)\qquad \begin{aligned}
&2\lambda+\frac{1}{2}=0\\
&2\lambda'+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2.3.4}=0\\
&2\lambda''+\frac{\lambda'}{2}+\frac{\lambda}{2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5.6}=0\\
&2\lambda'''+\frac{\lambda''}{2}+\frac{\lambda'}{2.3.4}+\frac{\lambda}{2.3.4.5.6}+\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8}=0\\
&\text{ec.}
\end{aligned}$$

Ammesse le quali rimarrà y_i espresso dalla equazione

$$(2)\qquad \begin{aligned}
2y_i &= i\pi y_{i-1}+i(i-1)(i-2)a\pi^3 y_{i-3}\\
&+i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)a'\pi^5 y_{i-5}+\text{ec.}\\
&+i(i-1)(i-2)\ldots\ldots(i-2h)\pi^{2h+1}\, a^{(h-1)}\, y_{i-2h-1}+\text{ec.}
\end{aligned}$$

purchè si abbia

$$a = \lambda + \frac{1}{2.3}$$

$$a' = \lambda' + \frac{\lambda}{2.3} + \frac{1}{2.3.4.5}$$

$$\text{(B)} \qquad a'' = \lambda'' + \frac{\lambda'}{2.3} + \frac{\lambda}{2.3.4.5} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7}$$

$$\vdots$$

$$a^{(h-1)} = \lambda^{(h-1)} + \frac{\lambda^{(h-2)}}{2.3} + \frac{\lambda^{(h-3)}}{2.3.4.5} + \ldots\ldots + \frac{1}{2.3.4\ldots.(2h+1)}$$

ec.

5. Tutto dunque consisterà nella risoluzione delle equazioni (A) e nel calcolo delle quantità a, a', a'', ec. date dalle equazioni (B).

Per tale oggetto è facile il convincersi che ritenute le equazioni (A) sussisterà pure la equazione

$$\frac{1-\lambda x-\lambda' x^2-\lambda'' x^3-\lambda''' x^4-\text{ec.}}{1+\lambda x+\lambda' x^2+\lambda'' x^3+\lambda''' x^4+\text{ec.}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2.3.4} + \frac{x^3}{2.3.4.5.6} + \text{ec.}$$

ove x rappresenta una variabile qualunque:

Or supponendo

$$1 + \lambda x + \lambda' x^2 + \lambda'' x^3 + \lambda''' x^4 + \text{ec.} = fx$$

ed osservando che

$$\frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{y^2}{2.3.4} + \frac{x^3}{2.3.4.5.6} + \text{ec.}$$

è manifesto che la precedente equazione diverrà

$$\frac{2-fx}{fx} = \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2}$$

d'onde trarremo:

$$fx = \frac{4}{\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} + e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}\right)}$$

e ne inferiremo che le quantità $\lambda, \lambda', \lambda'' \ldots\ldots$ ec. sono i coefficienti delle successive potenze di x nello sviluppo della funzione

$$\frac{4}{\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} + e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}\right)^2}$$

cosicchè si avrà

$$\lambda^{(n)} = \frac{4}{2.3.4\ldots.(n+1)dx^{n+1}}\, d^{n+1} \frac{1}{\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} + e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}\right)^2}$$

facendo $x = 0$ dopo le differenziazioni.

Per determinare i valori di a, a', a'' ec. dati dalle equazioni (B), noi osserveremo che in virtù di queste ed essendo x una variabile qualunque, sussisterà pure la equazione

$$\frac{1 + ax + a'x^2 + a''x^3 + a'''x^4 + \text{ec.}}{1 + \lambda x + \lambda' x^2 + \lambda'' x^3 + \lambda''' x^4 + \text{ec.}} = 1 + \frac{x}{2.3} + \frac{x^2}{2.3.4.5} + \frac{x^3}{2.3.4.5.6.7.} + \text{ec.}$$

Or noi abbiamo

$$1 + \lambda x + \lambda' x^2 + \lambda'' x^3 + \lambda''' x^4 + \text{ec.} = \frac{4}{\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} + e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}\right)^2}$$

e si ha non meno

$$1 + \frac{x}{2.3} + \frac{x^2}{2.3.4.5} + \frac{x^3}{2.3.4.5.6.7.} + \text{ec.} = \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}}}$$

quindi concluderemo

$$1+ax+a'x^2+a''x^3+a'''x^4+\text{ec.} = \frac{2\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} - e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} + e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}\right)\sqrt{x}}$$

E pertanto

$$a^{(n)} = \frac{2}{2.3.4\ldots.(n+1)dx^{n+1}}\;\frac{d^{n+1}\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} - e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} + e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}\right)\sqrt{x}}$$

oppure

$$a^{(n)} = \frac{8}{2.3.4\ldots.(n+1)dx^{n+2}}\,d^{n+2}\log.\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} + e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}\right)$$

purchè si faccia $x=0$ dopo le differenziazioni.

Or dalla decomposizione nei suoi infiniti fattori della funzione esponenziale

$$e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} + e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}$$

noi abbiamo:

$$\log.\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} + e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}\right) = \log.2 + \frac{S_2\,x}{\pi^2} + \frac{S_4\,x^2}{2\pi^4}$$

$$+ \frac{S_6\,x^3}{3\pi^6} - \text{ec.}\ldots\ldots \pm \frac{S_{2n+4}\,x^{n+2}}{(n+2)\pi^{2n+4}} \mp \text{ec.}$$

essendo

$$S_{2m} = 1 + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{5^{2m}} + \frac{1}{7^{2m}} + \text{ec.}$$

ove m è un numero intero e positivo. Pertanto

$$a^{(n)} = \pm \frac{8}{\pi^{2n+4}} \cdot S_{2n+4}$$

ove il segno superiore conviene al caso di n dispari, e l' inferiore al caso di n pari.

Denotiamo attualmente con i segni $B_1, B_3, B_5 \ldots\ldots B_{2n+3}$ ec. la serie dei numeri di Bernoulli. Noi avremo, come è noto dagli elementi di algebra

$$S_{2n+4} = \frac{2^{2n+4}-1}{2} \; \frac{\pi^{2n+4} \, B_{2n+3}}{1.2.3 \ldots\ldots (2n+4)}$$

onde sostituendo nel valore di $a^{(n)}$ otterremo finalmente

$$a^{(n)} = \pm \frac{4(2^{2n+4}-1) \, B_{2n+3}}{2.3.4 \ldots\ldots (2n+4)}$$

Nè questa espressione di $a^{(n)}$ potrà lasciare da desiderare quanto alla generalità, perchè il termine generale dei numeri di Bernoulli è analiticamente determinato in funzione del suo indice.

6. Riprendiamo attualmente il valore di y_i dato nel precedente articolo 4 dalla equazione (2). In esso potremo sostituire in luogo di a, a', a'', ec. i loro valori dedotti dalla generale loro espressione: e ciò facendo otterremo:

$$
\begin{aligned}
2y_i = {} & \frac{i}{2} . 4(2^2-1) B_1 \pi y_{i-1} - \frac{i(i-1)(i-2)}{2.3.4} 4(2^4-1) B_3 \pi^3 y_{i-3} \\
& + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)}{2.3.4.5.6} 4(2^6-1) B_5 \pi^5 y_{i-5} \\
(3) \qquad & - \text{ec.} \\
& \pm \frac{i(i-1)(i-2) \ldots\ldots (i-2h)}{2.3.4 \ldots (2h+2)} 4(2^{2h+2}-1) B_{2h+1} \pi^{2h+1} y_{i-2h-1} \\
& \mp \text{ec.} \ldots\ldots \pm 4(2^i-1) B_{i-1} \pi^{i-1} y_1
\end{aligned}
$$

nella quale espressione il termine generale che vi è compreso avrà il segno superiore quando h è pari, e l' inferiore quando è dispari: e l'ultimo termine di essa dovrà essere preceduto dal segno positivo quando $\frac{i}{2}$ sia dispari, e dal negativo nel caso contrario.

Si noterà che nella espressione di $2y_i$ in luogo del primo termine che sarebbe $i\pi y_{i-1}$ ho scritto il suo equivalente $\frac{i}{2}4(2^2-1)B_1\pi y_{i-1}$, e ciò per meglio rappresentare la legge dei termini.

La equazione (3) potrebbe scriversi in ordine inverso: e ciò facendo si troverà:

$$\begin{aligned} 2y_i = \pm 4 \Big[& \pi^{i-1}(2^i - 1(B_{i-1}\, y_1 - \frac{i(i-1)}{2.3}\pi^{i-3}(2^{i-2}-1)B_{i-3}\, y_3 \\ & + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{2.3.4.5}\pi^{i-5}(2^{i-4}-1)B_{i-5}\, y_5 \\ & - \text{ec.} \\ & \pm \frac{i(i-1)\ldots(i-2n+3)}{2.3\ldots(2n-1)}\pi^{i-2n+1}(2^{1-2n+2}-1)B_{i-2n+1}\, y_{2n-1} \\ & \mp \text{ec.}\ldots\ldots \pm \frac{i\pi}{2}(2^2-1)B_1\, y_{i-1} \Big]. \end{aligned} \tag{4}$$

Nella quale equazione il coefficiente di $B_{i-2n+1}\, y_{2n-1}$ avrà il segno superiore quando sia n dispari, e l'inferiore quando sia pari; mentre poi degli altri doppj segni dovranno preferirsi i superiori quando $\frac{i}{2}$ sia dispari, e gli inferiori quando $\frac{i}{2}$ sia pari. Tale sarà dunque il valore dell' integrale

$$2y_i = 2\int z^i dz \mathrm{F}\cos.z$$

esteso tra i limiti $z=0$, $z=\pi$ purchè sia i un numero intero e pari; ed $\mathrm{F}\cos.z$ una funzione dispari di $\cos.z$,

7. Abbiamo, come è noto,

$$B_1=\frac{1}{6},\ B_3=\frac{1}{30},\ B_5=\frac{1}{42},\ B_7=\frac{1}{30};\ B_9=\frac{5}{66},\ B_{11}=\frac{691}{2730},\ \text{ec.}$$

Se pertanto nel valore generale di y_i faremo successivamente $i=0,\ 2,\ 4,\ 6$, ec. troveremo le riduzioni seguenti

$$\int dz\mathrm{F}\cos.z=0$$

$$\int z^2dz\mathrm{F}\cos.z=\pi\int zdz\mathrm{F}\cos.z$$

$$\int z^4dz\mathrm{F}\cos.z=2\pi\int z^3dz\mathrm{F}\cos.z-\pi^3\int zdz\mathrm{F}\cos.z$$

$$\int z^6dz\mathrm{F}\cos.z=3\pi\int z^5dz\mathrm{F}\cos.z-5\pi^3\int z^3dz\mathrm{F}\cos.z+3\pi^5\int zdz\mathrm{F}\cos.z$$

ec.

8. È notabile che la generale equazione (3) può molto semplicemente rappresentarsi per mezzo di una equazione simbolica.

Infatti abbiamo la equazione identica

$$\frac{2-(1+k\sqrt{-1})^{i+1}-(1-k\sqrt{-1})^{i+1}}{2k(i+1)}=\frac{ik}{2}$$

$$-\frac{i(i-1)(i-2)}{2.3.4}k^3+\frac{i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)}{2.3.4.5.6}k^5-\text{ec.}$$

Indi è manifesto che la equazione (3) equivarrà alla seguente:

$$(5)\qquad 0=y_i+\frac{(1+\pi k\sqrt{-1})^{i+1}+(1-\pi k\sqrt{-1})^{i+1}-2}{\pi k(i+1)}$$

purchè nello sviluppo per le potenze di k si ponga

$$(2^{2h+2}-1)B_{2h+1}\,y_{i-2h-1}\ \text{in luogo}$$

della potenza k^{2h+1}, essendo B_{2h+1} il numero di Bernoulli rispondente all'indice $2h+1$.

9. Riprendiamo la generale equazione (1) riportata nel precedente articolo 2.

In quella abbiamo sino ad ora determinate le arbitrarie λ, λ', λ'' ec. in modo da esprimere la trascendente y_i per mezzo delle analoghe trascendenti y_{i-1}, y_{i-3}, y_{i-5} .... y_i. Potremo invece disporre di quelle arbitrarie in modo che la trascendente y_i venga determinata per mezzo delle trascendenti

$$y_{i-1},\, y_{i-2},\, y_{i-4} \,\ldots\ldots\, y_2 \,;$$

ed otterremo ciò facilmente purchè si faccia

$$(C)\qquad \begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2.3} + \lambda \\ 0 &= \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{\lambda}{2.3} + \lambda' \\ 0 &= \frac{1}{2.3.4.5.6.7} + \frac{\lambda}{2.3.4.5} + \frac{\lambda'}{2.3} + \lambda'' \end{aligned}$$

ec.

In virtù delle quali noi conseguiremo:

$$2y_i = i\pi y_{i-1} - i(i-1)\pi^2 b y_{i-2} - i(i-1)(i-2(i-3)\pi^4 b' y_{i-4} - \text{ec.}$$

purchè si abbia

$$(D)\qquad \begin{aligned} b &= \frac{1}{2} + 2\lambda \\ b' &= \frac{1}{2.3.4} + \frac{\lambda}{2} + 2\lambda' \\ b'' &= \frac{1}{2.3.4.5.6} + \frac{\lambda}{2.3.4} + \frac{\lambda'}{2} + 2\lambda'' \end{aligned}$$

ec.

Per risolvere le equazioni (C), e determinare le quantità

λ, λ', λ'' ec. noi osserveremo che sopra quelle equazioni stesse si ricadrà quando per risolvere in serie secondo le potenze della variabile x la funzione $\frac{2\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}}$ si ponga

$$\frac{2\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}} = 1+\lambda x+\lambda' x^2+\lambda'' x^3+\lambda''' x^4+\text{ec.}$$

onde sarà

$$\lambda^{(n)} = \frac{2}{2.3.4\ldots(n+1)dx^{n+1}}\, d^{n+1}\, \frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}}$$

purchè si faccia $x=0$ dopo le differenziazioni.

Parimente risolveremo le equazioni (D) osservando che in virtù di esse sussisterà indipendentemente da x la equazione

$$\frac{1+bx+b'x^2+b''x^3+b'''x^4+\text{ec.}-\lambda x-\lambda' x^2-\lambda'' x^3-\text{ec.}}{1+\lambda x+\lambda' x^2+\lambda'' x^3+\text{ec.}} = \frac{e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{2}$$

$$\varphi x = 1+bx+b'x^2+b''x^3+\text{ec.}$$

Facciamo

$$Fx = 1+\lambda x+\lambda' x^2+\lambda' x^3+\text{ec.},$$

e la precedente equazione ci darà

$$\varphi x = \frac{(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}})}{2}\,Fx+Fx-1.$$

Ma si ha $Fx = \frac{2\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}}$ quindi pure sarà riducendo,

$$\varphi x = \frac{e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}}+e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}}{e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}}-e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}}\cdot\sqrt{x}-1$$

Una formola conosciuta (*) ci dà

$$\frac{e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}}+e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}}{e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}}-e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}}.\sqrt{x}-1=1+\frac{2B_1\,x}{2}-\frac{2B_3\,x^2}{2.3.4}+\frac{2B_5x^3}{2.3.4.5.6}-\text{ec.}$$

ove B_1, B_3, B_5 ec. sono i numeri di Bernoulli. Tale dunque sarà lo sviluppo di φx, dal quale, confrontato con l'altra sua espressione

$$\varphi x=1+bx+b'x^2+b''x^3+\text{ec.}$$

si deduce

$$b^{(n)}=\pm\frac{2B_{2n+1}}{2.3.4..(2n+2)}$$

prendendo il segno superiore se n è pari, e l'inferiore se è dispari:

Con queste determinazioni si avrà

$$(6)\qquad 2y_i=i\pi y_{i-1}-\frac{2i(i-1)}{2}\pi^2B_1\,y_{i-2}+\frac{2i(i-1)(i-2)(i-3)}{2.3.4}\pi^4B_3\,y_{i-4}$$

$$-\frac{2i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)(i-5)}{2.3.4.5.6}\pi^6B_5\,y_{i-6}$$

$$+\text{ ec.}$$

$$\pm\frac{2i(i-1)(i-2)\ldots(i-2n-1)}{2.3.4\ldots(2n+2)}\pi^{2n+2}B_{2n+1}\,y_{i-2n-2}$$

$$\mp\text{ ec.}\ldots\ldots\pm\frac{2i(i-1)}{2}\pi^{i-2}B_{i-3}\,y_2$$

(*) Legendre, Exercices de Calcul Intégral 4.me partie art. 64 et suiv.

ove il segno superiore avrà luogo nel termine generale se n è dispari, e l'inferiore se n pari: e così pure nell'ultimo termine si preferirà il superiore o l'inferior segno secondo che sarà dispari o pari il numero $\frac{i}{2}$.

Pertanto se daremo ad i li particolari valori 0, 2, 4, ec. ed in luogo di y_i riprenderemo la formola integrale che ne è rappresentata, si avrà

$$\int dz \mathrm{F} \cos z = 0$$

$$\int z^2 dz \mathrm{F} \cos . z = \pi \int z dz \mathrm{F} \cos . z$$

$$\int z^4 dz \mathrm{F} \cos . z = 2\pi \int z^3 dz \mathrm{F} \cos . z - \pi^2 \int z^2 dz \mathrm{F} \cos . z$$

$$\int z^6 dz \mathrm{F} \cos . z = 3\pi \int z^5 dz \mathrm{F} \cos . z - \frac{5\pi^2}{2} \int z^4 dz \mathrm{F} \cos . z + \frac{\pi^4}{2} \int z^2 dz \mathrm{F} \cos . z$$

ec.

10. Anco la equazione (6) potrà rappresentarsi col mezzo di una equazione simbolica.

Di fatti abbiamo, svolgendo in serie per le potenze di k

$$\frac{2-(1+k\sqrt{-1})^i-(1-k\sqrt{-1})^i}{2k} = \frac{i(i-1)}{2} k - \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{2.3.4} k^3 + \text{ec.}$$

Indi inferiremo:

$$(7) \qquad 2y_i = i\pi y_{i-1} + \frac{(1+\pi k\sqrt{-1})^i+(1-\pi k\sqrt{-1})^i-2}{k}$$

purchè nello sviluppo per le potenze di k si ponga

$$\mathrm{B}_{2h+1} \, y_{i-2h-2} \text{ in luogo di } k^{2h+1}.$$

11. Abbiamo sino ad ora supposto che nella formola integrale

$$y_i = \int z^i dz \mathrm{F}\cos.z$$

sia i un numero pari, ed $\mathrm{F}\cos.z$ una funzione di $\cos.z$ che non muti segno allora quando $\cos.z$ divenga $-\cos.z$.

Analoghe riduzioni varranno se nella formula

$$\int z^i dz\, \mathrm{F}\cos.z$$

sia i un numero dispari, conchè per altro $\mathrm{F}\cos.z$ sia funzione pari di $\cos.z$; ovvero tale che il suo segno ed il suo valore non muti se in luogo di $\cos.z$ si ponga $-\cos.z$.

Sia difatti in questa ipotesi

$$y_i = \int z^i dz\, \mathrm{F}\cos.z.$$

Se in luogo di z si sostituisca $\pi - z$, avremo:

$$y_i = -\int (z-\pi)^i dz \mathrm{F}\cos.z.$$

E dinotando al solito col segno y_{i-n} la funzione $\int z^{i-n} dz \mathrm{F}\cos.z$, noi otterremo, svolgendo il binomio $(z-\pi)^i$,

$$2y_i = i\pi y_{i-1} - \frac{i(i-1)}{2}\pi^2 y_{i-2} + \frac{i(i-1)(i-2)}{2.3}\pi^3 y_{i-3} - \text{ec.}$$

In questa equazione successivamente mutando i in $i-2$, $i-4$, $i-6$, ec. otterremo altrettante equazioni analoghe: e se alla prima aggiungasi la seconda moltiplicata per $i(i-1)\pi^2\lambda$; la terza moltiplicata per $i(i-1)(i-2)(i-3)\pi^4\lambda'$,
la quarta moltiplicata per

$$i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)(i-5)\pi^6\lambda'',$$

e così di seguito, ove λ, λ', λ'' ec. sono quantità indeterminate, noi otterremo una equazione della stessa forma di quella riportata nell' articolo 2; dalla quale se vorremo eliminare le trascendenti

$$y_{i-2}, y_{i-4}, \dots . y_1$$

non dovremo che ripetere i calcoli dell' articolo 4; e troveremo quindi

$$(8) \quad 2y_i = i\pi y_{i-1} - \frac{i(i-1)(i-2)}{2.3.4}\pi^3.4(2^4-1)B_3 y_{i-3}$$

$$+ \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)\pi^5}{2.3.4.5.6}.4(2^6-1)B_5 y_{i-5} - \text{ec.}$$

$$\pm \frac{i(i-1)(i-2)\dots\dots(i-2n)}{2.3.4\dots(2n+z)}\pi^{2n+1}.4(2^{2n+2}-1)B_{2n+1} y_{i-2n-1} \mp \text{ec.}$$

$$\dots\dots \pm \frac{\pi^i}{i+1}4(2^{i+1}-1)B_i y_0$$

notando che il termine generale compreso in questa formula avrà il segno superiore quando sia n pari; l'inferiore quando sia dispari, e l' ultimo termine sarà preceduto dal segno positivo se $\frac{\pi}{2}$ sia pari, e dal negativo nel caso contrario.

Indi si dedurrà, facendo successivamente $i=1, 3, 5,$ ec.

$$\int z dz \, F\cos.z = z\frac{2}{\pi}\int dz F\cos.z$$

$$\int z^3 dz F\cos.z = \frac{3\pi}{2}\int z^2 dz F\cos.z - \frac{\pi^3}{4}\int dz F\cos.z$$

$$\int z^5 dz. F\cos.z = \frac{5\pi}{2}\int z^4 dz F\cos.z - \frac{5\pi^3}{2}\int z^2 dz F\cos.z + \frac{\pi^5}{2}\int dz F\cos.z$$

ec.

12. È manifesto che anco nel caso che ora ci trattiene potremo rappresentare la trascendente y_i per le trascendenti

$$y_{i-1}\,,\ y_{i-2}\,,\ y_{i-4}\,,\ \ldots\ldots\ y_1\ ;$$

ed indi si troverà:

$$2y_i = i\pi y_{i-1} - \frac{2i(i-1)}{2}\pi^2 B_1 y_{i-2} + \frac{2i(i-1)(i-2)(i-3)}{2.3.4}\pi^4 B_3 y_{i-4}$$

$$(9)\qquad - \frac{2i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)(i-5)}{2.3.4.5.6}\pi^6 B_5 y_{i-6} + \text{ec.}$$

$$\pm \frac{2i(i-1)\ldots.(i-2n-1)}{2.3\ldots.(2n+2)}\pi^{2n+2} B_{2n+1} y_{i-2n-2} \mp \ldots. \pm 2i\pi^{i-1} B_{i-2} y_1$$

ove nel termine generale si prenderà il segno negativo se n è pari, ed il positivo se è dispari; valendo per l' ultimo termine la regola stessa secondo che sia $\frac{i-1}{2}$ dispari, ovvero $\frac{i-1}{2}$ pari.

E quì pure noteremo che le equazioni (8) (9) possono rappresentarsi per mezzo di equazioni simboliche; valendo per la prima di esse la forma stessa segnata (5) nell' articolo 8 ; e per la seconda la forma segnata (7) nell' articolo 10.

13. Oltre la trascendente $\int z^i dz F\cos.z$ che nei casi precedentemente distinti ammette le esposte riduzioni, una infinità di altre trascendenti possono come quella ridursi. Così per esempio è manifesto che la formola integrale $\int z^i dz F\sin.z$ estesa tra i soliti limiti, e dove i sia un numero dispari, può soggettarsi alle trasformazioni riportate nei precedenti articoli 10, 11; e che dalle stesse riduzioni può dipendere la più generale formola

$$\int z^i dz F(\cos.z,\ \sin.z)$$

purchè la funzione F(cos$z$, sin$z$) non muti segno nè valore quando in luogo di cos.z si ponga —cos.z

Per un caso semplicissimo consideriamo la formola integrale

$$\int z^{i} dz \sin.z(a + b\cos.z^{2n})^{m}$$

presa tra i soliti limiti; e dove sia i numero intero e dispari; n numero intero comunque; ed a, b, m quali si siano costanti.

A questa formula potremo applicare le riduzioni dell'articolo 11; e così nel particolare caso di $i = 1$ si avrà:

$$\int z dz \sin.z(a + b\cos.z^{2n})^{m} = \frac{\pi}{2} \int dz \sin.z(a + b\cos.z^{2n})^{m} .$$

Ponghiamo

$$y = \int dz \sin.z(a + b\cos.z^{2n})^{m} ,$$

si avrà, integrando per parti,

$$y = -\cos.z\,(a + b\cos.z^{2n})^{m}$$

$$- 2mnb \int dz \cos.z^{2n} \sin.z(a + b\cos.z^{2n})^{m-1}$$

ovvero:

$$y = 2(a + b)^{m} - 2mnb \int dz \cos.z^{2n} \sin.z(a + b\cos.z^{2n})^{m-1}$$

ma abbiamo pure:

$$2nb \frac{dy}{db} = 2mnb \int dz \cos.z^{2n} \sin.z(a + b\cos.z^{2n})^{m-1}$$

onde dedurremo:

$$y + 2nb\,\frac{dy}{db} = 2\,(\,a + b\,)^m\,.$$

e quindi

$$yb^{\frac{1}{2n}} = \mathrm{C} + \frac{1}{n}\int \frac{(a+b)^m}{b^{\frac{2n-1}{2n}}}\,db\,.$$

Pertanto se faremo cominciare con zero l' integrale compreso nel secondo membro, si avrà:

$$y = \frac{1}{nb^{\frac{1}{2n}}}\int \frac{(a+b)^m db}{b^{\frac{2n-1}{2n}}}$$

onde sarà finalmente:

$$(10)\qquad \int zdz\sin.z(\,a + b\cos.z^{2n}\,)^m = \frac{\pi}{2nb^{\frac{1}{2n}}}\int \frac{(a+b)^m db}{b^{\frac{2n-1}{2n}}}\,.$$

Sia per semplicità maggiore $b = h^{2n}$; ed avremo:

$$(11)\qquad \int zdz\sin.z(a+h^{2n}\cos.z^{2n}\,)^m = \frac{\pi}{h}\int (a + h^{2n})dh$$

la quale riduzione potrà condurre a calcolare molte formole integrali definite.

Così se sia $m = -\frac{1}{2}$, $n = 1$ si troverà:

$$(12)\qquad \int \frac{zdz\sin.z}{\sqrt{(a+h^2\cos.z^2)}} = \frac{\pi}{h}\ \log.\ \frac{\sqrt{(a+h^2)}+h}{\sqrt{a}}\,.$$

Uno dei più semplici casi quello sarà in cui abbiasi $m = -1$, $n = 1$. Con tali determinazioni conseguiremo:

(13) $$\int \frac{zdz\sin.z}{a+h^2\cos z^2} = \frac{\pi}{h}\int \frac{dh}{a+h^2}$$

ovvero:

(14) $$\int \frac{zdz\sin.z}{a+h^2\cos.z^2} = \frac{\pi}{h\sqrt{a}}\,\text{arc. tang.}\,\frac{h}{\sqrt{a}}.$$

Per una semplificazione ulteriore facendo $a = h = 1$ otterremo:

(15) $$\int \frac{zdz\sin.z}{1+\cos.z^2} = \frac{\pi^2}{4}$$

la quale formola dedotta da diversa analisi trovasi riferita dal cel. Poisson nella sua seconda memoria sopra gli integrali definiti inserita nel giornale Politecnico.

Dalla formola (14) potremo trarre altre riduzioni. Pongasi $h\sqrt{-1}$ in luogo di h; noi abbiamo se $h < \sqrt{a}$

$$\frac{\pi}{h\sqrt{-1}.\sqrt{a}}\,\text{arc. tang.}\,\frac{h\sqrt{-1}}{\sqrt{a}} = \frac{\pi}{2h\sqrt{a}}\,\log.\,\frac{\sqrt{a}+h}{\sqrt{a}-h}$$

e quando fosse $h > \sqrt{a}$ sarebbe

$$\frac{\pi}{h\sqrt{-1}\sqrt{a}}\,\text{arc. tang.}\,\frac{h\sqrt{-1}}{\sqrt{a}} = \frac{\pi}{2h\sqrt{a}}\,\log.\,\frac{h+\sqrt{a}}{h-\sqrt{a}}$$

onde in questi due respettivi casi otterremo:

(16) $$\int \frac{zdz\sin.z}{a-h^2\cos.z^2} = \frac{\pi}{2h\sqrt{a}}\,\log.\frac{\sqrt{a}+h}{\sqrt{a}-h}$$

(17) $$\int \frac{zdz\sin.z}{a-h^2\cos.z^2} = \frac{\pi}{2h\sqrt{a}}\,\log.\,\frac{h+\sqrt{a}}{h-\sqrt{a}}.$$

Le formole (14), (15), (16), (17) possono dedursi da quelle riportate dal cel. Legendre nei suoi esercizj di calcolo integrele art. 75 e seg. della 5.ª parte.

Altre integrazioni definite potranno dedursi dalla equazione generale:

$$\int zdz\sin.z(a+b\cos.z^{2n})^m = \frac{\pi}{h}\int(a+h^{2n})^m$$

a seconda degli infiniti casi di integrabilità della formola $\int(a+h^{2n})^m dh$. Tale assunto essendo straniero all' oggetto di questa memoria, mi limiterò ad osservare che qualora per la specialità degli esponenti m, n non ammetta questa formola una finita evoluzione; potremo adottare in tale occasione li metodi approssimativi referiti nella eccellente memoria di Euler che è contenuta nel 4.° volume del suo calcolo Integrale (*a*).

14. Essendo i un numero impari, ed $F\cos.z$ una funzione pari di $\cos.z$, e ponendo

$$y_{i-n} = \int z^{i-n}dzF\cos.z$$

ove i limiti della integrazione sono sempre $z=0$, $z=\pi$ noi trovammo nell' articolo 11

$$\frac{1}{2}y_i = \frac{i\pi}{2}(2^2-1)B_1y_{i-1} - \frac{i(i-1)(i-2)}{2.3.4}\pi^3(2^4-1)B_3y_{i-3}$$

$$+\frac{i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)}{2.3.4.5.6}\pi^5(2^6-1)B_5y_{i-5}$$

$$-\text{ec.}$$

$$\pm\frac{i(i-1)(i-2)\ldots.(i-2n)}{2.3.4\ldots.(2n+2)}\pi^{2n+1}(2^{2n+2}-1)B_{2n+1}y_{i-2n-1}$$

$$\mp\text{ec.}$$

(a) De resolut. formulae $\int x^{m-1}dx(\Delta+x^n)^\lambda$. MS. Acad. Petrop.

Se nella formola

$$y_{i-n} = \int z^{i-n} dz \mathrm{F}\cos.z$$

faremo $\mathrm{F}\cos.z = a$, essendo a una costante qualunque, noi otterremo

$$y_{i-n} = \frac{\pi^{i-n+1}}{i-n+1}\, a$$

e sostituendo nella equazione precedente si avrà

$$\frac{1}{2} = \frac{i+1}{2}(2^2-1)\mathrm{B}_1 - \frac{(i+1)i(i-1)}{2.3.4}(2^4-1)\mathrm{B}_3$$

$$(18) \qquad + \frac{(i+1)i(i-1)(i-2)(i-3)}{2.3.4.5.6}(2^6-1)\mathrm{B}_5$$

$$+ \text{ec.} \ldots \pm \frac{(i+1)i(i-1)\ldots\ldots(i-2n+1)}{2.3.4\ldots(2n+2)}(2^{2n+2}-1)\mathrm{B}_{2n+1} \mp \text{ec.}$$

La quale equazione contiene una generale relazione tra i numeri Bernoulliani, che per mezzo di quella potrebbero tutti successivamente determinarsi. Ed infatti se successivamente faremo $i = 1, 3, 5, 7$, ec. si avrà:

$$\frac{1}{2} = \frac{1+1}{2}(2^2-1)\mathrm{B}_1$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3+1}{2}(2^2-1)\mathrm{B}_1 - \frac{(3+1)3(3-1)}{2.3.4}(2^4-1)\mathrm{B}_3$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5+1}{2}(2^2-1)\mathrm{B}_1 - \frac{(5+1)5(5-1)}{2.3.4}(2^4-1)\mathrm{B}_3 + \frac{(5+1)5(5-1)(5-2)(5-3)}{2.3.4.5.6.}(2^6-1)\mathrm{B}_5$$

ec.

E potremo anche in tale circostanza osservare che la equazione (18) può rappresentarsi concisamente col mezzo della equazione simbolica

1/31.P

$$0 = 1 + \frac{(1+k\sqrt{-1})^{i+1} + (1-k\sqrt{-1})^{i+2} - 2}{(i+2)k} \tag{19}$$

la quale sussisterà quando nello sviluppo per le potenze di k si ponga $(2^{2h+2}-1)B_{2h+1}$ in luogo della potenza k^{2h+1}.

15. Moivre nelle sue miscellanee analitiche dedusse dal calcolo delle differenze finite una generale equazione, nella quale successivamente determinando un indice compresovi, si ottenevano altrettante equazioni atte a determinare l'uno dopo l'altro i numeri di Bernoulli, appunto come ho accennato potersi conseguire dalla equazione (17).

La equazione di Moivre può dedursi dalla equazione (9) che ho riportata nell' articolo 12.

Di fatti facendo in questa $F\cos. z = a$ troveremo:

$$\frac{i-1}{2} = \frac{(i+1)\,i}{2}B_1 - \frac{(i+1)i(i-1)(i-2)}{2.3.4}B_3 + \frac{(i+1)i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)}{2.3.4.5.6}B_5$$

$$- \text{ec.}$$

che appunto è quella di Moivre; e dalla quale altrettante equazioni successive si ricaveranno facendovi successivamente $i=3, 5, 7, 9$. ec. Ma egli è manifesto che tanto la equazione di Moivre quanto la equazione (17) che ho di sopra ottenuta, le quali possono offrire forse qualche curiosità come teoremi numerici, non presentano nessun' interesse quando si tratti del calcolo dei numeri di Bernoulli, dei quali è nota l' espressione del termine generale in funzione del suo indice.

FINE.

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY